MACI 2019

Vol. 7

VII CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA, COMPUTACIONAL E INDUSTRIAL

Luis R. Ceballos, Claudia M. Gariboldi y Bruno A. Roccia (Eds.)

UNRC

Río Cuarto, Córdoba, Argentina
8 al 10 de Mayo de 2019

PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE PARA LA ECUACION DE DIFUSIÓN-CONVECCIÓN: EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN

Adriana C. Briozzo[†] y Domingo A. Tarzia[†]

[†]CONICET y Depto. de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales- Sede Rosario, Universidad Austral, Argentina, abriozzo@austral.edu.ar; dtarzia@austral.edu.ar

Resumen: Un problema de frontera libre unidimensional a una fase para la ecuación de difusión-convección con condición de tipo Dirichlet $f = f(t), t > 0$ en el borde fijo y una concentración inicial $u = u_0(x), x \in [0, b]$ es considerado. Se obtiene la representación integral de la solución y se demuestra la existencia y la unicidad local en el tiempo utilizando teoremas de punto fijo.

Palabras clave: *problema de frontera libre,ecuación de difusión-convección, ecuacón integral, solución exacta*
2000 AMS Subject Classification: 35R35-35K55 - 45D05

1. INTRODUCCIÓN

Se considera la frontera libre $s = s(t) > 0$, $t > 0$ y $u(x, t)$ que satisface una ecuación de difusión-convección con las siguientes condiciones (problema P_1):[3]

$$u_t = u^2(Du_{xx} - u_x) \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \tag{1}$$

$$u(0, t) = f(t) \; , \qquad u(s(t), t) = \beta > 0 \; , \quad t > 0 \tag{2}$$

$$Du_x(s(t), t) - u(s(t), t) = -\dot{s}(t) \; , \quad t > 0 \quad , \tag{3}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \; , \quad 0 \leq x \leq b \quad , \qquad s(0) = b \tag{4}$$

donde D es la difusividad, $u_0 = u_0(x)$ es la concentración inicial , $f = f(t)$ es la concentración en el borde fijo $x = 0$. Se asume que:

$$f \in C^1[0, \sigma], \quad u_0 \in C^1[0, b], u_0(x) \geq \beta \quad u_0(0) = f(0), \quad u_0(b) = \beta, \quad f(t) > \frac{3\beta}{2} \tag{5}$$

Siguiendo [5] se define el siguiente cambio de variable

$$v(z, t) =, \qquad z_x = \frac{1}{u(x, t)}, \qquad z_t = u(x, t) - Du_x(x, t). \tag{6}$$

Entonces teniendo en cuenta las condiciones iniciales y de borde se obtiene que

$$z(x, t) = C_1 + \int_0^t (u(x, \tau) - Du_x(x, \tau))\, d\tau + \int_0^x \frac{1}{u(\eta, t)} d\eta \tag{7}$$

para $0 \leq x \leq s(t)$ and $t \geq 0$, donde C_1 es una constante arbitraria. Así se obtiene el siguiente problema gobernado por la ecuación de Burgers para v dado por

$$v_t = Dv_{zz} - 2vv_z \quad , \quad z_0(t) < z < z_1(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \tag{8}$$

$$v(z_0(t), t) = f(t) \; , \quad v(z_1(t), t) = \beta \; , \quad t > 0 \quad , \tag{9}$$

$$D\frac{v_z(z_1(t), t)}{v(z_1(t), t)} - v(z_1(t), t) = -\frac{\beta}{\beta + 1}\dot{z}_1(t) \; , \quad t > 0 \quad , \tag{10}$$

$$v(z, 0) = v_0(z) \; , \quad C_1 \leq z \leq C_2 \quad , \tag{11}$$

donde

$$v_0(z) = u_0(g^{-1}(z)), \qquad g(x) = C_1 + \int_0^x \frac{1}{u_0(\eta)} d\eta, \quad C_2 = C_1 + U_0 = C_1 + \int_0^b \frac{1}{u_0(\eta)} d\eta \tag{12}$$

y

$$z_0(t) = C_1 + \int_0^t \left[f(\tau) - D\frac{v_z(z_0(\tau),\tau)}{f(\tau)} \right] d\tau, \quad z_1(t) = C_2 + (\beta+1)t - \frac{D(\beta+1)}{\beta^2}\int_0^t v_z(z_1(\tau),\tau)d\tau \tag{13}$$

son fronteras libre. Se define

$$V(y,t) = v(z,t) - \beta, \qquad y = z - 2\beta t \qquad t > 0 \tag{14}$$

y se obtiene el siguiente problema de frontera libre equivalente

$$V_t = DV_{yy} - 2VV_y \quad , \quad y_0(t) < y < y_1(t) \ , \ t > 0 \ , \tag{15}$$

$$V(y_0(t),t) = f(t) - \beta \ , \qquad V(y_1(t),t) = 0 \ , \ t > 0 \ , \tag{16}$$

$$D\frac{V_y(y_1(t),t)}{\beta} = \frac{\beta(1-\beta) - \beta\dot{y}_1(t)}{\beta+1} \ , \ t > 0 \ , \tag{17}$$

$$V(y,0) = V_0(y) = v_0(y) - \beta \ , \ C_1 \le y \le C_2 \ , \tag{18}$$

$$y_0(t) = C_1 - 2\beta t + \int_0^t \left[f(\tau) - D\frac{V_y(y_0(\tau),\tau)}{f(\tau)} \right] d\tau \tag{19}$$

$$y_1(t) = C_2 + (1-\beta)t - \frac{D(\beta+1)}{\beta^2}\int_0^t V_y(y_1(\tau),\tau)d\tau \tag{20}$$

Utilizando la transformación de Hopf Cole

$$w(y,t) = C(t)V(y,t)\eta(y,t), \quad y_0(t) \le y \le y_1(t) \ , \ t > 0 \tag{21}$$

$$C(t) = 1 - \int_0^t w_y(y_1(\tau),\tau)d\tau \tag{22}$$

$$\eta(y,t) = exp\left(\tfrac{1}{D}\int_y^{y_1(t)} V(\xi,t)d\xi \right) = \frac{C(t) - \frac{1}{D}\int_y^{y_1(t)} w(\xi,t)d\xi}{C(t)} \tag{23}$$

se transforma $(15)-(20)$ en el siguiente problema gobernado por la ecuación del calor-difusión

$$w_t = Dw_{yy} \quad , \ y_0(t) < y < y_1(t) \ , \ t > 0 \ , \tag{24}$$

$$w(y_0(t),t) = h(t) \ , \ t > 0 \ , \tag{25}$$

$$w(y_1(t),t) = 0 \ , \ t > 0 \ , \tag{26}$$

$$\frac{Dw_y(y_1(t),t)}{\beta C(t)} = \frac{\beta(1-\beta) - \beta\dot{y}_1(t)}{\beta+1} \ , \ t > 0 \ , \tag{27}$$

$$w(y,0) = F(y) \ , \ C_1 \le y \le C_2 \ , donde \tag{28}$$

$$F(y) = V_0(y)exp\left(\tfrac{1}{D}\int_y^{C_2} V_0(\xi)d\xi \right) \tag{29}$$

$$y_0(t) = C_1 - \beta^2\int_0^t \frac{1}{f(\tau)}d\tau - D\int_0^t \frac{w_y(y_0(\tau),\tau)}{w(y_0(\tau),\tau)}\left(1 - \tfrac{\beta}{f(\tau)}\right)d\tau \tag{30}$$

$$y_1(t) = C_2 + (1-\beta)t + \frac{D(\beta+1)}{\beta^2} ln\left(1 - \int_0^t w_y(y_1(\tau),\tau)d\tau\right) \tag{31}$$

$$h(t) = (f(t) - \beta)\left(C(t) - \frac{1}{D}\int_{y_0(t)}^{y_1(t)} w(\xi,t)d\xi\right) \tag{32}$$

2. REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE LA SOLUCIÓN

Se tiene el siguiente teorema de equivalencia para la existencia de solución al problema de frontera libre $(24)-(32)$

Teorema 1 *Se asumen las hipótesis dadas en* (5) *y* $D<2$. *La solución del problema de frontera libre* $(24)-(32)$ *tiene la siguiente representación integral [1, 2]*

$$w(y,t)=\int_{C_1}^{C_2}G(y,t;\xi,0)F(\xi)d\xi+D\int_0^t\phi_1(\tau)G(y,t;y_1(\tau),\tau)d\tau \tag{33}$$

$$+\beta^2\int_0^t\frac{h(\tau)}{f(\tau)}G(y,t;y_0(\tau),\tau)d\tau-D\beta\int_0^t\frac{\phi_2(\tau)}{f(\tau)}G(y,t;y_0(\tau),\tau)d\tau-D\int_0^t h(\tau)N_y(y,t;y_0(\tau),\tau)d\tau$$

con

$$y_0(t)=C_1-\beta^2\int_0^t\frac{1}{f(\tau)}d\tau-D\int_0^t\tfrac{1}{h(\tau)}\left(1-\tfrac{\beta}{f(\tau)}\right)\phi_2(\tau)d\tau \tag{34}$$

$$y_1(t)=C_2+(1-\beta)t+\tfrac{D(\beta+1)}{\beta^2}ln\left(1-\int_0^t\phi_1(\tau)d\tau\right) \tag{35}$$

y ϕ_1, ϕ_2 *están definidas por* $\phi_1\left(t\right)=\frac{\partial w}{\partial y}\left(y_1(t),t\right),\phi_2\left(t\right)=\frac{\partial w}{\partial y}\left(y_0(t),t\right)$ *si y sólo si satisfacen el sistema de ecuaciones integrales de tipo Volterra:*

$$\phi_1\left(t\right)=\frac{2}{2-D}\left\{\int_{C_1}^{C_2}N(y_1(t),t;\xi,0)F'(\xi)d\xi+D\int_0^t\phi_1(\tau)G_y(y_1(t),t;y_1(\tau),\tau)d\tau\right.$$

$$+\beta^2\int_0^t\frac{h(\tau)}{f(\tau)}G_y(y_1(\tau),t;y_0(\tau),\tau)d\tau-D\beta\int_0^t\frac{\phi_2(\tau)}{f(\tau)}G_y(y_1(\tau),t;y_0(\tau),\tau)d\tau,$$

$$\left.-\int_0^t h'(\tau)N(y_1(t),t;y_0(\tau),\tau)d\tau\right\} \tag{36}$$

$$\phi_2\left(t\right)=\frac{2f(t)}{2f(t)-D\beta}\left\{-\beta^2\frac{h(t)}{f(t)}+\int_{C_1}^{C_2}N(y_0(t),t;\xi,0)F'(\xi)d\xi\right.$$

$$+D\int_0^t G_y(y_0(t),t;y_1(\tau),\tau)\phi_1(\tau)d\tau+\beta^2\int_0^t\frac{h(\tau)}{f(\tau)}G_y(y_0(t),t;y_0(\tau),\tau)(\tau)d\tau$$

$$\left.-D\beta\int_0^t\frac{\phi_2(\tau)}{f(\tau)}G_y(y_0(t),t;y_0(\tau),\tau)(\tau)d\tau-\int_0^t h'(\tau)N(y_0(t),t;y_0(\tau),\tau)(\tau)d\tau\right\} \tag{37}$$

donde G, N *son las funciones de Green y Neumann respectivamente,* K *es la solución fundamental de la ecuación del calor, definidas por*

$$G\left(x,t,\xi,\tau\right)=K\left(x,t,\xi,\tau\right)-K\left(-x,t,\xi,\tau\right),\quad N\left(x,t,\xi,\tau\right)=K\left(x,t,\xi,\tau\right)+K\left(-x,t,\xi,\tau\right) \tag{38}$$

$$K\left(x,t,\xi,\tau\right)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-\tau)}\right) & t>\tau\\ 0 & t\le\tau\end{cases} \tag{39}$$

e y_0 , y_1 *están dadas por* (34) *y* (35) *respectivamente. La función* $h(t)=w(y_0(t),t)$ *debe ser solución de la ecuación integral*

$$h(t)=Z(h)(t):=(f(t)-\beta)\left(1-\int_0^t\phi_1(\tau)d\tau-\frac{1}{D}\int_{y_0(t)}^{y_1(t)}w(y,t)dy\right) \tag{40}$$

2.1. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN

En esta sección se demuestra que para cada función h definida sobre el compacto y convexo

$$\Pi := \left\{h \in C^1[0,\sigma]/h(t) \geq H, \|h\| \leq R, \left\|h'\right\| \leq S\right\},$$

el sistema de ecuaciones integrales $(36) - (37)$ tiene unica solución sobre el espacio de Banach

$$C_{M,\sigma} = \left\{\overrightarrow{\phi^*} = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} / \ \phi_i : [0,\sigma] \to \mathbb{R}, i = 1,2, \text{ continuas } \left\|\overrightarrow{\phi^*}\right\|_\sigma \leq M\right\}$$

$$\left\|\overrightarrow{\phi^*}\right\|_\sigma := \max_{t\in[0,\sigma]} |\phi_1(t)| + \max_{t\in[0,\sigma]} |\phi_2(t)|$$

con R, S, H, σ y M a determinar. Luego se demuestra que para determinados valores de R, S y H existe única solución $h^* \in \Pi$ a la ecuación integral $Z(h) = h$. Esto queda establecido en el siguiente teorema.

Teorema 2 *Bajo las hipótesis dadas en* (5) *con* $D < 2$*, si se toma*

$$H = \frac{\beta}{2}, \quad E_1 = 1 + \frac{2A_1}{2-D} + 2\frac{\|f\|}{\beta(3-D)}A_1, \quad E_2 = 2\frac{\|f\|}{(3-D)}, \quad E_3 = \frac{1}{\|f\| + \beta}, \quad R = \frac{1+E_1}{E_3 - E_2} \tag{41}$$

$$M\left(u_0, U_0, f, D, \beta, R\right) = 1 + \frac{2A_1}{2-D} + 2\frac{\|f\|}{\beta(3-D)}\left(\beta R + A_1\right) \tag{42}$$

$$S = \left\|f'\right\|(1+M)exp\left(\tfrac{(C_1 + \frac{3}{2}U_0)(\|f\|+\beta)}{D}\right) + (\|f\| + \beta)\left(5M + \frac{R\beta}{D}\right) \tag{43}$$

y se eligen σ *y* C_1 *tales que ,*

$$\sigma \leq 1, \quad 2(1+\beta)\left(1 + \frac{M}{\beta^2}\right)\sigma \leq C_1 + U_0, \quad C_1 < \frac{U_0}{2}2\left(\beta + 2\frac{MD}{H}\right)\sigma \leq C_1, \tfrac{4M}{H}\left(\beta + \tfrac{2DM}{H}\right)\sigma \leq 1 \tag{44}$$

$$H_1 = \left\{\left(\frac{2}{2-D}\right)\left[A_2 + A_3 + A_4 + \frac{2S}{\sqrt{\pi D}}\right] + \frac{2\|f\|}{\beta(3-D)}\left[A_4 + A_5 + A_6 + \frac{2S}{\sqrt{\pi D}}\right]\right\}\sqrt{\sigma} \leq 1 \tag{45}$$

$$H_2 = \left\{\frac{2}{2-D}\left[P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5\right] + \frac{2\|f\|}{\beta(3-D)}\left[P_1 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7\right]\right\}\sqrt{\sigma} \leq 1 \tag{46}$$

donde los coeficientes A_i *y* P_i *están determinados en función de los datos del problema, entonces existe única solución* h^* *a la ecuación integral* $Z(h) = h$ *y únicas* ϕ_1^**,* ϕ_2^* *soluciones del sistema de ecuaciones integrales de tipo Volterra (36) y (37) correspondientes a* h^**.*

Prueba. Se utilizan teoremas de punto fijo de Banach y de Brouwer [1, 2] □

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente patrocinado por el Proyecto PIP No 0275 de CONICET-UA, Rosario, Argentina, y ANPCyT PICTO Austral 2016 No 0090.

REFERENCIAS

[1] A. C. Briozzo and D. A. Tarzia, *Existence and uniqueness for one-phase Stefan problems of non-classical heat equations with temperature boundary condition at a fixed face.* EJDE, **21** (2006), 1–16.

[2] A. C. Briozzo and M. F. Natale , *On a non-linear moving boundary problem for a diffusion convection equation*, IJNM,**47** (2012), 712-718.

[3] S. De Lillo, M.C. Salvatori, G. Sanchini *On a free boundary problem in a nonlinear diffusiveconvective system*, PLA, 310 (2003), 25-29.

[4] R. K. Miller, *Volterra integral equations*, W.A. Benjamin, Menlo Park (1971).

[5] G. Rosen *Method for the Exact Solution of a Nonlinear Diffusion-Convection Equation*, PRL, **49** No 25, (1982) 1844-1847.

[6] B. Sherman, *A free boundary problem for the heat equation with prescribed flux at both fixed face and melting interface,* Quart. Appl. Math., **25** (1967), 53-63.