# COMPORTAMIENTO DEL PROBLEMA DE STEFAN A UNA FASE CUANDO EL NÚMERO DE BIOT TIENDE A CERO

Adriana C. Briozzo y Domingo A. Tarzia

*Depto. Matemática - CONICET, F.C.E., Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, ARGENTINA, E-mail: ABriozzo@austral.edu.ar, DTarzia@austral.edu.ar*

Resumen: Se considera un problema de Stefan a una fase con una condición convectiva en el borde fijo, caracterizada por el coeficiente de transferencia $h > 0$ (directamente proporcional al número de Biot). Se estudia la convergencia de la temperatura y de la frontera libre cuando $h \to 0$. Se realiza el análisis matemático del problema fśico planteado en Naaktgeboren, Int. J. Heat Mass Transfer, 50 (2007), 4614-4622.

Palabras clave: *problema de Stefan, problema de frontera libre, ecuación integral de Volterra*
2000 AMS Subject Classification: 80A22 - 35R35 - 45D05 - 35C15

## 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se considera el problema de frontera libre unidimensional (problema de Stefan a una fase) con una condición convectiva sobre la frontera fija $\xi = 0$ el cual consiste en determinar la temperatura $\theta = \theta(\xi, \tau)$ y la frontera libre $\xi = s(\tau)$ que satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{cases} (i)\ \rho c\theta_\tau - k\theta_{\xi\xi} = 0, & 0 < \xi < s(\tau), \tau > 0 \\ (ii)\ k\theta_\xi(0,\tau) = h\left[\theta(0,\tau) - g(\tau)\right], & \tau > 0 \\ (iii)\ \theta(s(\tau),\tau) = 0, & \tau > 0, \\ (iv)\ k\theta_\xi(s(\tau),\tau) = -\rho l \frac{ds}{d\tau}(\tau), & \tau > 0, \\ (v)\ \theta(\xi,0) = \varphi(\xi), & 0 \leqslant \xi \leqslant b \\ (vi)\ s(0) = b\ (b > 0) \end{cases} \tag{1}$$

donde $h > 0$ es el coeficiente de transferencia de calor, la temperatura inicial es $\varphi(\xi) \geq 0,\ 0 \leqslant \xi \leqslant b$, la temperatura del fluído exterior es $g = g(\tau) \geq 0,\ \tau > 0$ y se satisfacen las condiciones de compatibilidad $k\varphi'(0) = h(\varphi(0) - g(0))$ y $\varphi(b) = 0$ . El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento de la solución $\theta = \theta_h(\xi, \tau),\ s = s_h(\tau)$ del problema $(1)$ cuando $h \to 0$ realizando el análisis matemático del problema físico considerado en [6] donde se plantea el límite de la solución cuando el número de Biot (proporcional a $h$ según $(4)$) tiende a cero.
La existencia y unicidad global de la solución del problema $(1)$ está dada en [3]. En [10] fue probado que el comportamiento asintótico cuando $t \to +\infty$ del problema de frontera libre a una fase con una condición convectiva en el borde fijo es el mismo que para el caso en que la condición en el borde fijo $x = 0$ sea de temperatura. El comportamiento asintótico para el problema de Stefan a una fase con una condición de temperatura en el borde fijo fue estudiado en [1], [2] . Para el problema unidimensional de Stefan a dos fases el correspondiente comportamiento asintótico fue estudiado en [11]. En cambio, para el caso particular $g(\tau) = Const > 0$, y para un dominio multidimensional, el estudio del comportamiento asintótico fue obtenido utilizando la inecuación variacional parabólica en [8], [9].

## 2. RELACIONES INTEGRALES Y PROPIEDADES

Sobre las condiciones iniciales y los datos en el borde se asumen las siguientes hipótesis:
(i) Sea $\varphi = \varphi(\xi)$ una función positiva y con derivada seccionalmente continua y acotada.
(ii) Sea $g = g(\tau)$ una función positiva, seccionalmente continua y acotada.
(iii) Condiciones de compatibilidad: $g(0) > \varphi(\xi)$ en $(0, b)$, $k\varphi'(0) = h(\varphi(0) - g(0))$.
Si se define la siguiente transformación

$$u(x,t) = \frac{c}{l}\theta(\xi,\tau),\ x = \frac{\xi}{b}\ ,\ t = \frac{k}{\rho c b^2}\tau \tag{2}$$

entonces el problema $(1)$ es equivalente al dado en variables adimensionales

$$\begin{cases} (i)\ u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < S(t),\ t > 0, \\ (ii)\ u_x(0,t) = H\left[u(0,t) - G(t)\right], & t > 0, \\ (iii)\ u(S(t),t) = 0, & t > 0, \\ (iv)\ u_x(S(t),t) = -\ \dot{S}\ (t), & t > 0, \\ (v)\ u(x,0) = \chi(x) \geq 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ (vi)\ S(0) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

donde

$$G(t) = \frac{c}{l} g(\frac{b^2 t}{\alpha}),\ H = \beta_i = b\frac{h}{k} \text{ (número de Biot)}, \tag{4}$$

$$\chi(x) = \frac{c}{l}\varphi(b\xi),\ S(t) = \frac{1}{b}s(\frac{b^2 t}{\alpha}),\ \alpha = \frac{k}{\rho c}. \tag{5}$$

La solución $u = u_H(x,t)$ del problema de frontera libre tiene la siguiente representación integral [5], [11]

$$u_H(x,t) = \int_0^1 N(x,t;\xi,0)\chi(\xi)d\xi + \int_0^t N(x,t;S_H(\tau),\tau)V_H(\tau)d\tau \tag{6}$$

$$-H\int_0^t N(x,t;0,\tau)v_H(\tau)d\tau + H\int_0^t N(x,t;0,\tau)G(\tau)d\tau.$$

donde la nueva frontera libre $S = S_H(t)$ está dada por:

$$S_H(t) = 1 - \int_0^t V_H(\tau)d\tau, \tag{7}$$

las funciones $V_H$ y $v_H$ están definidas por

$$V_H(t) = u_x(S(t),t),\ \ v_H(t) = u_H(0,t) \tag{8}$$

y satisfacen las siguientes ecuaciones integrales de Volterra:

$$V_H\,(t) = 2\int_0^1 \chi'\,(\xi)\,G(S_H(t),t,\xi,0)d\xi - 2\int_0^t H[v_H(\tau) - G(\tau)]N_x(S_H(t),t,0,\tau)d\tau$$

$$+2\int_0^t V_H(\tau)N_x(S_H(t),t,S_H(\tau),\tau)d\tau \tag{9}$$

$$v_H\,(t) = \int_0^1 \chi\,(\xi)\,N(0,t,\xi,0)d\xi - \int_0^t H[v_H(\tau) - G(\tau)]N(0,t,0,\tau)d\tau \tag{10}$$

$$+\int_0^t V_H(\tau)N(0,t,S_H(\tau),\tau)d\tau.$$

Motivados por el problema planteado en [6], se estudia el comportamiento de la solución $u = u_H(x,t)$, $S = S_H(x,t)$ del problema de frontera libre$(3)$ cuando $H \to 0$. Se prueba que la solución del problema $(3)$ converge a la solución del problema de frontera libre parabólico $(11)$

$$\begin{cases} (i)\ u_{0t} - u_{0_{xx}} = 0, & 0 < x < S_0(t),\ t > 0, \\ (ii)\ u_{0_x}(0,t) = 0, & t > 0, \\ (iii)\ u_0(S_0(t),t) = 0, & t > 0, \\ (iv)\ u_{0_x}(S_0(t),t) = -\ \dot{S_0}\ (t), & t > 0, \\ (v)\ u_0(x,0) = \chi(x) \geq 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ (vi)\ S_0(0) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

cuando $H \to 0$.
La solución del problema $(11)$ tiene la siguiente representación integral:

$$u_0(x,t) = \int_0^1 N(x,t;\xi,0)\chi(\xi)d\xi + \int_0^t N(x,t;S_0(\tau),\tau)u_{0_x}(S_0(\tau),\tau)d\tau \tag{12}$$

y la frontera libre es [4]

$$S_0(t) = 1 + \int_0^1 \chi(x)dx - \int_0^{S_0(t)} u_0(x,\tau)dx.$$

Las soluciones $u = u_H(x,t),\ S = S_H(x,t)$ y $u_0 = u_0(x,t),\ S = S_0(x,t)$ de los problemas (3) y (11) respectivamente, satisfacen las siguientes relaciones [7]:

**Lema 1** *1.* $H\int_0^t [u_H(0,\tau) - G(\tau)]\,d\tau = 1 - S_H(t) - \int_0^{S_H(t)} u_H(x,t)dx + \int_0^1 \chi(x)dx$

*2.* $\int_0^{S_H(t)} x\ u_H(x,t)dx - \int_0^1 x\ \chi(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{S_H^2(t)}{2} + \int_0^t u_H(0,\tau)d\tau$

*3.* $\int_0^{S_H(t)} u_H^2(x,t)dx - \int_0^1 \chi^2(x)dx + 2\int_0^t \int_0^{S_H(\tau)} u_{H_x}^2(x,\tau)dxd\tau \le H\int_0^t G^2(\tau)d\tau$

*4.* $S_0(t) = 1 - \int_0^{S_0(t)} u_0(x,t)dx + \int_0^1 \chi(x)dx$

*5.* $\int_0^{S_0(t)} x\ u_0(x,t)dx - \int_0^1 x\ \chi(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{S_0^2(t)}{2} + \int_0^t u_0(0,\tau)d\tau$

*6.* $\int_0^{S_0(t)} u_0^2(x,t)dx - \int_0^1 \chi^2(x)dx + 2\int_0^t \int_0^{S_0(\tau)} u_{0_x}^2(x,\tau)dxd\tau = 0$

**Lema 2** *Se tiene* $S_0(t) < S_H(t)$ *y* $u_H(x,t) \ge u_0(x,t)$ *para todo* $0 < x < S_0(t)$, $t > 0,\ H > 0$.

**Lema 3** *Si* $\int_0^t G(\tau)d\tau$ *es acotada, se tienen los siguientes límites:*

$$\lim_{H\to 0} S_H(t) = S_0(t),\quad \lim_{H\to 0} u_H(0,t) = u_0(0,t)$$

*para cada* $t > 0$.

*Prueba.* Teniendo en cuenta las representaciones integrales (6) y (12) se tiene:

$$u_H(0,t) - u_0(0,t) = -\int_0^t H[u_H(0,\tau) - G(\tau)]N(0,t,0,\tau)d\tau$$

$$+ \int_0^t \dot{S}_H(\tau)\,[N(0,t;S_0(\tau),\tau) - N(0,t,S_H(\tau),\tau)]\,d\tau$$

$$+ \int_0^t N(0,t,S_0(\tau),\tau)\left[\dot{S}_0(\tau) - \dot{S}_H(\tau)\right]d\tau = A_1 + A_2 + A_3.$$

Se tienen las siguientes estimaciones:

$$A_1 = \int_0^t H[G(\tau) - u_H(0,\tau)]N(0,t,0,\tau)d\tau \le H\int_0^t \frac{G(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau = \frac{2H}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\int_0^t G(\tau)d\tau,$$

$$|A_2| \le \left(\frac{6}{e}\right)^{3/2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\|\dot{S}_H\right\|_{[0,t]} \|S_H - S_0\|_{[0,t]},$$

y

$$|A_3| \le \int_0^t \left[|N_\xi(0,t,S_0(\tau),\tau)|\left|\dot{S}_0(\tau)\right| + |N_\tau(0,t,S_0(\tau),\tau)|\right]|S_0(\tau) - S_H(\tau)|\,d\tau$$

$$\le \left\{\frac{1+\int_0^1 \chi(x)dx}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{6}{e}\right)^{\frac{3}{2}}\left\|\dot{S}_0\right\|_{[0,t]} + \left(\frac{10}{e}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{\|S_0\|_{[0,t]}^2}{2}t + \frac{t^2}{2}\right]\right\}\|S_0 - S_H\|_{[0,t]}.$$

$\square$

**Teorema 1** *Si* $\int_0^t G(\tau)d\tau$ *es acotada para cada* $t > 0$*, se tiene*

$$\lim_{H\to 0} u_H(x,t) = u_0(x,t),$$

*para cada* $0 < x < S_0(t)$*,* $t > 0$.

*Prueba.* Teniendo en cuenta las igualdades 2) y 5) del Lema 1 se tiene

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \int_0^{S_0(t)} x\left[u_H(x,t) - u_0(x,t)\right]\, dx + \frac{S_H^2(t)}{2} - \frac{S_0^2(t)}{2} = \int_{S_0(t)}^{S_H(t)} x\; u_H(x,t)dx \\ &+ \int_0^t \left[u_H(0,\tau) - u_0(0,\tau)\right] d\tau. \end{aligned}$$

Usando el lema anterior se obtiene

$$0 \leq \int_0^{S_0(t)} x\left[u_H(x,t) - u_0(x,t)\right]\, dx + \frac{S_H^2(t)}{2} - \frac{S_0^2(t)}{2} \leq \|u_H(.,t)\|_{[S_0(t),S_H(t)]}\left(\frac{S_H^2(t)}{2} - \frac{S_0^2(t)}{2}\right) +$$

$$+\frac{2H}{\sqrt{\pi}}t^{3/2}\int_0^t G(\tau)d\tau + \left(\frac{6}{e}\right)^{3/2}\frac{t}{2\sqrt{\pi}}\left\|\dot{S}_H\right\|_{[0,t]}\|S_H - S_0\|_{[0,t]} +$$

$$+\left\{\frac{1+\int_0^1 \chi(x)dx}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{6}{e}\right)^{\frac{3}{2}}\left\|\dot{S}_0\right\|_{[0,t]} + \left(\frac{10}{eb^{*2}}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{\|S_0\|_{[0,t]}^2}{2}t + \frac{t^2}{2}\right]\right\}\; t\; \|S_0 - S_H\|_{[0,t]}\,.$$

□

## REFERENCIAS


[1] J.R. CANNON AND C. D. HILL, *Remarks on a Stefan problem*, J. Math. Mech., 17 (1967), pp. 433-441.

[2] J.R. CANNON AND M. PRIMICERIO, *Remarks on the one-phase Stefan problem for the heat equation with the flux prescribed on the fixed boundary*, J. Math. Anal. Appl., 35 (1971), pp. 361-373.

[3] A. FASANO AND M. PRIMICERIO, *General Free-Boundary Problems for the Heat Equation*, I, J. Math. Anal. Appl., 57 (1977), pp. 694-723.

[4] A. FASANO AND M. PRIMICERIO, *New results on some classical parabolic free-boundary problems*, Quart. Appl. Math. 38 (1981), pp. 439-460.

[5] A. FRIEDMAN, *Free boundary problems for parabolic equations I. Melting of solids*, J. Math. Mech., 8 (1959), pp. 499-517.

[6] C. NAAKTGEBOREN, *The zero-phase Stefan problem*, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 50 (2007), pp. 4614-4622.

[7] A. D. SOLOMON, V.ALEXIADES AND D. G. WILSON,*The Stefan problem with a convective boundary condition*, Quart. of Appl. Math., 40 (1982), pp. 203-217.

[8] D. A. TARZIA, *Sur le problemè de Stefan à deux phases*, C. R. Acad. Sci. Paris 288 A (1979), pp. 941-944.

[9] D. A. TARZIA, *Etude de l'inequation variationelle proposée par Duvaut pour le problème de Stefan à deux phases II*, Boll. Un. Mat. Italiana, 2 B (1983), pp. 589-603.

[10] D. A. TARZIA AND C. V. TURNER, *The asymptotic behavior for the one-phase Stefan problem with a convective boundary condition*, Appl. Math. Lett., 9 No.3 (1996), pp. 21-24.

[11] D. A. TARZIA AND C. V. TURNER, *The asymptotic behavior for the two-phase Stefan problem with a convective boundary condition*, Comm. Appl. Analysis, 7 (2003), N$^o$ 3, pp. 313-334.