UN PROBLEMA DE STEFAN PARA UNA ECUACIÓN DEL CALOR NO-CLÁSICA CON UNA CONDICIÓN CONVECTIVA

Adriana C. Briozzo y Domingo A. Tarzia

Depto. Matemática - CONICET, F.C.E., Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, ARGENTINA,
E-mail: ABriozzo@austral.edu.ar , DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Se prueba la existencia y unicidad, local en el tiempo, de la solución de un problema de Stefan a una fase para la ecuación del calor no-clásica para un material semi-infinito con una condición de borde convectiva en el borde fijo $x = 0$. La fuente de calor depende de la temperatura en el borde fijo $x = 0$. Se usa un método de representación integral de Friedman-Rubinstein y el teorema de contracción de Banach para resolver un sistema de dos ecuaciones integrales de Volterra equivalente al problema de Stefan no clásico original.

Palabras clave: *problema de Stefan, ecuación del calor no clásica, problema de frontera libre, fuentes de calor no lineales, solución de similaridad, ecuación integral de Volterra.*
2000 AMS Subject Classification: 35R35, 80A22, 35C05, 35K20, 35K55, 45G15, 35C15

1. INTRODUCCIÓN

El problema de Stefan a una fase para un material semi-infinito para la ecuación del calor clásica requiere la determinación de la distribución de la temperatura u de la fase líquida (problema de fusión) o de la fase sólida (problema de solidificación), y la evolución de la frontera libre $x = s(t)$. Los problemas de cambio de fase aparecen frecuentemente en procesos industriales y en otros problemas de interés tecnológico.[1, 5, 7, 8, 12, 19]. Problemas no clásicos de conducción del calor para un material semi-infinito fueron estudiados en [2, 6, 11, 22, 23], por ejemplo, problemas del tipo

$$\begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = -F(u_x(0,t)), & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = h(x), & x > 0 \end{array} \tag{1}$$

donde $h(x), x > 0$, y $F(V), V \in \mathbb{R}$, son funciones continuas. En este caso, la fuente de calor depende del flujo de calor en el borde $x = 0$. La función F, de ahora en adelante referida como la función de control, se supone que satisface la siguiente condición

$$F(0) = 0.$$

Como se observa en [22, 23] el flujo de calor $w(x,t) = u_x(x,t)$ para el problema (1) satisface un problema de conducción del calor clásico con una condición convectiva no lineal en $x = 0$, el cual puede ser escrito de la siguiente manera

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ w_x(0,t) = F(w(0,t)), & t > 0, \\ w(x,0) = h^{'}(x) \geq 0, & x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

La literatura concerniente al clásico problema (2) ha crecido rápidamente desde la publicación de los trabajos [13, 15, 16]. En [20] se presenta un problema de Stefan a una fase para una ecuación del calor no clásica para un material semi-infinito con un término fuente que depende del flujo de calor $x = 0$. En [3, 4] se obtienen resultados de existencia y unicidad de solución, local en tiempo, para dos problemas de Stefan a una fase para la ecuación del calor no clásica.

Motivado por [21] se quiere considerar el problema de frontera libre que consiste en determinar la temperatura $u = u(x,t)$ y la frontera libre $x = s(t)$ los cuales satisfacen las condiciones siguientes:

$$\begin{cases} (i)\ u_t - u_{xx} = -F(u(0,t)), & 0<x<s(t), 0<t<T, \\ (ii)\ u_x(0,t) = g(t)\left[u(0,t)-f(t)\right],\ f(t)\geq 0, & 0<t<T, \\ (iii)\ u(s(t),t)=0, & 0<t<T, \\ (iv)\ u_x(s(t),t) = -\ \dot{s}\ (t), & 0<t<T, \\ (v)\ u(x,0)=h(x)\geq 0, & 0\leqslant x\leqslant b \\ (vi)\ s(0)=b\ (b>0) & \end{cases} \tag{3}$$

Aquí, la función de control F depende de la evolución de la temperatura en el extremo $x=0$, en el cual se impone una condición convectiva. En la condición $(3ii)$ el factor $g(t)$ es el coeficiente de transferencia térmica dependiente del tiempo y $f(t)$ es la temperatura del fluido externo la cual también depende del tiempo. El objetivo de este trabajo es probar, en la Sección 2, la existencia y unicidad, local en el tiempo de la solución del problema de Stefan a una fase (3) para una ecuación del calor no clásica para un material semi-infinito con una condición convectiva en el borde fijo $x=0$. Primero, se prueba que el problema (3) es equivalente a un sistema de dos ecuaciones integrales de Volterra (7) y (8) [10, 14] siguiendo el método de Friedman-Rubinstein dado en [9, 17, 18]. Luego, se prueba que el sistema (7)-(8) tiene única solución local usando el teorema de contracción de Banach.

2. Existencia y Unicidad de Solución .

Sean los datos $g,f\in C^0\,[0,T)$, $h\in C^1\,[0,b]$, $h(b)=0,\ h'(0)=g(0)[h(0)-f(0)]$, y sea además F una función Lipschitz sobre $C^0\,[0,T]$ con constante de Lipschitz $L>0$. Se tiene la equivalencia siguiente para la existencia de solución del problema de frontera libre no clásico (3).

Teorema 1 *La solución del problema de frontera libre (3) está dada por la expresión*

$$u(x,t) = \int_0^b N(x,t;\xi,0)h(\xi)d\xi + \int_0^t N(x,t;0,\tau)g(\tau)[W(\tau)-f(\tau)]d\tau \tag{4}$$

$$+\int_0^t N(x,t;s(\tau),\tau)w(\tau)d\tau - \iint_{D(t)} N(x,t;\xi,\tau)F(W(\tau))d\xi d\tau.$$

y

$$s(t) = b - \int_0^t w(\tau)d\tau \tag{5}$$

donde $D(t)=\{(x,\tau)/\ 0<x<s(\tau), 0<\tau<t\}$ *, y las funciones* w*,* W *definidas por*

$$w\,(t) = u_x(s(t),t)\ \ ,\ \ W\,(t) = u(0,t) \tag{6}$$

deben satisfacer el siguiente sistema de dos ecuaciones integrales de Volterra :

$$w\,(t) = 2\int_0^b h'\,(\xi)\,G(s(t),t,\xi,0)d\xi + 2\int_0^t g(\tau)[W(\tau)-f(\tau)]N_x(s(t),t,0,\tau)d\tau \tag{7}$$

$$+2\int_0^t w(\tau)N_x(s(t),t,s(\tau),\tau)d\tau + 2\int_0^t G(s(t),t,s(\tau),\tau)F(W(\tau))d\tau,$$

$$W\,(t) = \int_0^b h\,(\xi)\,N(0,t,\xi,0)d\xi + \int_0^t g(\tau)[W(\tau)-f(\tau)]N(0,t,0,\tau)d\tau \tag{8}$$

$$+\int_0^t w(\tau)N(0,t,s(\tau),\tau)d\tau - \iint_{D(t)} N(0,t,\xi,\tau)F(W(\tau))d\tau d\xi$$

donde G*,* N *son las funciones de Green y Neumann y* K *es la solución fundamental de la ecuación del calor, definidas respectivamente por*

$$G\,(x,t,\xi,\tau) = K\,(x,t,\xi,\tau) - K\,(-x,t,\xi,\tau) \tag{9}$$

$$N(x,t,\xi,\tau)=K(x,t,\xi,\tau)+K(-x,t,\xi,\tau) \tag{10}$$

$$K(x,t,\xi,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) & t>\tau\\ 0 & t\le\tau\end{cases} \tag{11}$$

donde $s(t)$ está dado por (5).

Ahora, se usa el Teorema de punto fijo de Banach para probar la existencia y unicidad de la solución $w,\ W\ \in C^0[0,\sigma]$ del sistema de dos ecuaciones integrales de Volterra (7) y (8) donde σ es un adecuado número positivo $(0<\sigma\le T)$. Se considera el espacio de Banach siguiente:

$$C_{R,\sigma}=\left\{\overrightarrow{w^*}=\begin{pmatrix}w\\W\end{pmatrix}/\ w,W:[0,\sigma]\to\mathbb{R},\ \text{continua, con }\left\|\overrightarrow{w^*}\right\|_\sigma\le R\right\}$$

con la norma definida por:

$$\left\|\overrightarrow{w^*}\right\|_\sigma:=\max_{t\in[0,\sigma]}|w(t)|+\max_{t\in[0,\sigma]}|W(t)|.$$

Se define el operador $B:C_{R,\sigma}\longrightarrow C_{R,\sigma}$, tal que

$$\overrightarrow{\widetilde{w^*}}(t)=B\left(\overrightarrow{w^*}\right)(t)=\begin{pmatrix}B_1(w,W)\\B_2(w,W)\end{pmatrix}(t)$$

donde

$$B_1(w,W)(t)=2\int_0^b h'(\xi)G(s(t),t,\xi,0)d\xi \tag{12}$$

$$+2\int_0^t g(\tau)[W(\tau)-f(\tau)]N_x(s(t),t,0,\tau)d\tau$$

$$+2\int_0^t w(\tau)N_x(s(t),t,s(\tau),\tau)d\tau+2\int_0^t G(s(t),t,s(\tau),\tau)F(W(\tau))d\tau,$$

y

$$B_2(w,W)(t)=\int_0^b h(\xi)N(0,t,\xi,0)d\xi+\int_0^t g(\tau)[W(\tau)-f(\tau)]N(0,t,0,\tau)d\tau \tag{13}$$

$$+\int_0^t w(\tau)N(0,t,s(\tau),\tau)d\tau-\iint_{D(t)}N(0,t,\xi,\tau)F(W(\tau))d\tau d\xi.$$

Teorema 2 *Sea $g,f\in C^0[0,T)$, $h\in C^1[0,b]$, $h(b)=0$, $h'(0)=g(0)[h(0)-f(0)]$, F una función Lipschitz sobre $C^0[0,T]$. El operador $B:C_{R,\sigma}\longrightarrow C_{R,\sigma}$ está bien definido y es una contracción si σ satisface las siguientes desigualdades*

$$\sigma\le 1\quad,\quad 2R\sigma\le b \tag{14}$$

$$M(R,b,\|g\|_\sigma,\|f\|_\sigma,L,\sigma)\le 1, \tag{15}$$

$$H(\|h'\|,\|g\|_\sigma,b,L,R,\sigma)<1 \tag{16}$$

donde R está dado por

$$R=1+\|h\|+2\|h'\| \tag{17}$$

y

$$M(R,b,\|g\|_\sigma,\|f\|_\sigma,L,\sigma)=2\left(\|g\|_\sigma\left(\|f\|_\sigma+R\right)\alpha_1(b)+R\alpha_2(b)\right)\sigma+$$

$$+\left(2R^2\alpha_3(b,R)+\frac{4LR}{\sqrt{\pi}}+\frac{2\|g\|_\sigma\left(\|f\|_\sigma+R\right)+R(2+3bL)}{\sqrt{\pi}}\right)\sqrt{\sigma},$$

$$H(\|h'\|,\|g\|_\sigma,\|f\|_\sigma,b,L,R,\sigma)=\left\{\frac{4\|h'\|\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+2\|g\|_\sigma(\alpha_1(b)\right.$$

$$+N_1(b)\left(\|f\|_\sigma + R)\right)\sigma + \tfrac{4L\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} + N_2(R,L)\sqrt{\sigma} + N_3(R,b)\sigma + N_4(R)\sqrt{\sigma} + N_5(b)\sigma + N_6(R,b)\sigma$$

$$\left. + \tfrac{R(1+R^2\sigma)}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\sigma} + N_7(b)\sigma + N_8(R,b)\sigma + N_9(b,L)\sqrt{\sigma} + N_{10}(R,L)\sigma^{\frac{3}{2}} + \frac{2\sqrt{\sigma}}{\pi}\|g\|_\sigma \right\}$$

donde α_i (i=1,2,3) están dadas por

$$\alpha_1(b) = \frac{3b}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{24}{eb^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \ \alpha_2(b) = \frac{3b}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{6}{eb^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\alpha_3(b,R) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \frac{3b}{4R\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{3eb^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

y N_i (i=1,...,10) son funciones continuas y derivables de sus argumentos.

Bajo las condiciones (14)- (16) para R y σ existe única solución en el espacio $C_{R,\sigma}$ del sistema de ecuaciones integrales (7) y (8), y por ende del problema de frontera libre (3).

REFERENCIAS

[1] V. ALEXIADES AND A.D. SOLOMON, *Mathematical modeling of melting and freezing processes*, Hemisphere - Taylor & Francis, Washington, 1983.

[2] L.R. BERRONE, D. A. TARZIA and L. T. VILLA, *Asymptotic behavior of a non-classical heat conduction problem for a semi-infinite material*, Math. Meth. Appl. Sci., 23 (2000), pp. 1161-1177.

[3] A. C. BRIOZZO AND D. A. TARZIA, *Existence and uniqueness for one-phase Stefan problem of a non-classical heat equation with temperature boundary condition at a fixed face*, Electron. J. Diff. Eq., 2006 (2006) pp. 21 1-16.

[4] A. C. BRIOZZO AND D. A. TARZIA, *A one-phase Stefan problem for a non-classical heat equation with a heat flux condition on the fixed face*, Applied Mathematics and Computation, 182 (2006) pp. 809-819.

[5] J.R. CANNON, *The one-dimensional heat equation*, Addison-Wesley, Menlo Park, 1984.

[6] J.R. CANNON AND H.M. YIN, *A class of non-linear non-classical parabolic equations*, J. Diff. Eq., 79 (1989), pp. 266-288.

[7] H. S. CARSLAW AND J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Oxford University Press, London, 1959.

[8] J. CRANK, *Free and moving boundary problems*, Clarendon Press Oxford, 1984.

[9] A. FRIEDMAN, *Free boundary problems for parabolic equations* I. Melting of solids, J. Math. Mech., 8 (1959), pp. 499-517.

[10] G. GRIPENBERG , S.O. Londen and O. Staffans, *Volterra integral and functional equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[11] KENMOCHI AND M. PRIMICERIO, *One-dimensional heat conduction with a class of automatic heat source controls*, IMA J. Appl. Math. 40 (1988), pp. 205-216.

[12] V. J. LUNARDINI, *Heat transfer with freezing and thawing*, Elsevier, Amsterdam, 1991.

[13] W. R. MANN AND F. WOLF, *Heat transfer between solid and gases under nonlinear boundary conditions*, Quart. Appl. Math., 9 (1951), pp.163-184.

[14] R. K. MILLER, *Nonlinear Volterra integral equations*, W. A. Benjamin, Menlo Park, 1971.

[15] W. E. OLMSTEAD AND R. A. HANDELSMAN, *Diffusion in a semi-infinite region with nonlinear surface dissipation*, SIAM Rev., 18 (1976), pp. 275-291.

[16] J. H. ROBERTS AND W. R. MANN, *A certain nonlinear integral equation of the Volterra type*, Pacific J. Math., 1:431-445 (1951).

[17] L.I. RUBINSTEIN, The Stefan problem, Trans. Math. Monographs # 27, Amer. Math. Soc., Providence, 1971.

[18] B. SHERMAN, *A free boundary problem for the heat equation with prescribed flux at both fixed face and melting interface*, Quart. Appl. Math., 25 (1967), pp. 53-63.

[19] D. A. TARZIA, *A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems*, MAT-Serie A, Rosario, # 2 (2000), (with 5869 titles on the subject, 300 pages). See www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2(2000)/

[20] D. A. TARZIA, *A Stefan problem for a non-classical heat equation*. MAT-Serie A, 3 (2001), pp. 21-26.

[21] D. A. TARZIA AND C. V. TURNER, *The Asymptotic Behavior for the One-Phase Stefan Problem with a Convective Boundary Condition*, Appl. Math. Lett. 9, No.3 (1996), pp.21-24.

[22] D. A. TARZIA AND L. T. VILLA, *Some nonlinear heat conduction problems for a semi-infinite strip with a non-uniform heat source*, Rev. Un. Mat. Argentina, 41 (2000), pp. 99-114.

[23] L. T. VILLA,*Problemas de control para una ecuación unidimensional del calor*, Rev. Un. Mat. Argentina, 32 (1986), pp. 163-169.