UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

V SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

D. A. Tarzia (Editor)

Rosario, 19 al 21 de Diciembre de 1994

26

Rosario - República Argentina
1995

Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi, 26 (1995), 59 – 72.

SOLUCION EXACTA DE UN PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE DE FLUJOS EN UN MEDIO SATURADO - NO SATURADO CON DIFUSIVIDAD VARIABLE

Adriana C. BRIOZZO - Domingo A. TARZIA

ABSTRACT

In wetted soils, zones of saturation develop naturally in the vicinity of impermeable strata, surface ponds and subterranean cavities. Hydrology must be concerned with transient flow through coexisting unsaturated and saturated zones. Models of advancing saturated zones necessarily involve a nonlinear free boundary problem.

A closed–form analytic solution is presented for a nonlinear diffusion model under conditions of ponding at the surface. The soil water diffusivity is restricted to the special functional form $D(\theta)=\frac{a}{(b-\theta)^2}$, where θ is the water content field to be determined and, a and b are positive constants. The explicit solution depends on a parameter C (determined by the data of the problem), according to two cases : $1 < C < C_1$ or $C \geq C_1$, where C_1 is a constant which is obtained as the unique solution of an equation. This result complements the study given in P. Broadbridge, "Solution of a Nonlinear Absorption Model of Mixed Saturated–Unsaturated Flow", Water Resources Research, 26 (1990), 2435–2443.

KEY WORDS : Nonlinear diffusion equation, Free boundary problem, Moving boundary problem, Mixed saturated-unsaturated flow, Explicit solution, Solution in closed form, Flows in porous media, Stefan-like problem.

AMS Subject Clasification : 35R35, 35C05, 76S05, 80A20, 80A22.

RESUMEN

En terrenos húmedos, se desarrollan naturalmente zonas de saturación en la vecindad de estratos impermeables y cavidades subterráneas. Es importante el estudio de flujos transientes a través de la coexistencia de zonas saturadas y no saturadas. Los modelos de avance de zonas saturadas necesariamente involucran un problema de frontera libre no lineal.

En cualquier tiempo $t > 0$, la zona saturada se extiende de $x=0$ a $x=s(t)$ (la frontera libre), y la zona no saturada se encuentra para $x > s(t)$. En la zona saturada se tiene

$$\psi(x,t) = \psi_o - \frac{\psi_o - \psi_s}{s(t)} x \ ; \quad 0 < x < s(t) \quad ;$$

y, para la zona no saturada se tiene el siguiente problema de frontera libre :

$$\left| \begin{array}{l} \theta(s(t)^+, t) = \theta_s \quad , \quad t > 0 \quad , \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}[D(\theta) \dfrac{\partial \theta}{\partial x}] \quad , \quad x > s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \\ -D(\theta) \dfrac{\partial \theta}{\partial x}(s(t)^+, t) = K_s \dfrac{\psi_o - \psi_s}{s(t)} \quad , \quad t > 0 \quad , \\ \theta(x,0) = \theta(+\infty, t) = \theta_n \quad , \quad x > s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \\ s(0) = 0 \quad , \end{array} \right.$$

donde θ es el contenido de agua, ψ es el potencial de agua, D es la difusividad de agua, K es la conductividad hidráulica y, ψ_o , ψ_s , K_s , θ_n y θ_s son constantes dadas.

Se presenta una solución exacta para un modelo de difusión no lineal con una difusividad de agua del terreno del tipo $D(\theta) = a\ (b-\theta)^{-2}$, donde a y b son constantes positivas. La solución explícita depende de un parámetro C (determinado por los datos del problema) de acuerdo a dos casos : si $1 < C < C_1$ ó $C \geq C_1$, donde C_1 es una constante obtenida como la única solución de una dada ecuación. Este resultado complementa el estudio dado en P. Broadbridge, *"Solution of a nonlinear*

absorption model of a mixed saturated–unsaturated flow", Water Resources Research, 26 (1990), 2435–2443.

I. INTRODUCCION

Siguiendo [Br, Ph], se considera un terreno homogéneo con contenido inicial de agua θ_n . Al tiempo $t > 0$, se suministra agua en la superficie $x=0$ bajo una presión ψ_o (pressure head), presentándose un problema de flujo mixto saturado – no saturado representado por la absorción de agua del terreno. La zona de saturación se extiende de $x=0$ a $x=s(t)$ (la frontera libre) y, la zona no saturada se extiende para $x > s(t)$. Si se omite la gravedad y se considera la ley de Darcy, el flujo de agua está dado por

$$v = -K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \tag{1}$$

donde ψ es el potencial mátrico de agua en el suelo (soil water matric potential) y K es la conductividad hidráulica (hydraulic conductivity).

En la zona saturada [Br] se tiene

$$\psi(x,t) = \psi_o - \frac{\psi_o - \psi_s}{s(t)}\, x \; ; \quad 0 < x < s(t) \quad ; \tag{2}$$

y, para la zona no saturada se tiene el problema de frontera libre (P_1)(3)-(7)[Ta]

$$\theta(s(t)^+, t) = \theta_s \quad , \quad t > 0 \quad , \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[D(\theta)\,\frac{\partial \theta}{\partial x}] \quad , \quad x > s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \tag{4}$$

$$-D(\theta)\,\frac{\partial \theta}{\partial x}(s(t)^+, t) = K_s\,\frac{\psi_o - \psi_s}{s(t)} \quad , \quad t > 0 \quad , \tag{5}$$

$$\theta(x,0) = \theta(+\infty, t) = \theta_n \quad , \quad x > s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \tag{6}$$

$$s(0) = 0 \quad . \tag{7}$$

donde

x : coordenada espacial , t : tiempo ,

θ : contenido de agua , θ_n: contenido inicial de agua ,

θ_s: contenido de agua en zona saturada ,

ψ: potencial mátrico de agua en el suelo (soil water matric potential) ,

ψ_o : potencial de agua en x=0 (pond depth) ,

ψ_s : potencial de agua del terreno en $x=s(t)$,

K : conductividad hidráulica , K_s : conductividad hidráulica en saturación ,

D: difusividad del agua en el terreno $\left(D=K\frac{d\psi}{d\theta}\right)$.

Se considera el problema de frontera libre (P_1), en el que deben determinarse el contenido de agua $\theta(x,t)$ y la frontera libre s(t), para una difusividad de agua no lineal de la forma

$$D(\theta)=\frac{a}{(b-\theta)^2} \tag{8}$$

donde a y b son constantes positivasdadas. Con esta forma de difusividad, la ecuación de difusión no lineal $(P_1)(4)$ puede linealizarse. Siguiendo [BrWh], se normaliza el contenido de agua definiendo una nueva variable

$$\Theta=\frac{\theta-\theta_n}{\theta_s-\theta_n}, \tag{9}$$

y se considera

$$\left|\begin{array}{l}
C=\dfrac{b-\theta_n}{\theta_s-\theta_n}>1 \quad \text{parámetro} \quad ; \\[2ex]
\lambda_s=\dfrac{a}{(\theta_s-\theta_n)\,C\,(C-1)\,K_s} \quad \text{escala de longitud} \quad ; \\[2ex]
t_s=\dfrac{a}{C\,(C-1)\,K_s^2} \quad \text{escala de tiempo} \quad ; \\[2ex]
x_*=\dfrac{x}{\lambda_s} \quad \text{longitud adimensional} \quad ; \quad t_*=\dfrac{t}{t_s} \quad \text{tiempo adimensional} \; ;
\end{array}\right. \tag{10}$$

$s_*(t_*)=\dfrac{s(t)}{\lambda_s}=\dfrac{s(t_s t_*)}{\lambda_s}$ posición de la frontera libre adimensional;

$y_* = x_* - s_*(t_*)$ coordenada de profundidad adimensional que se mueve con la interfase saturada – no saturada ;

$\psi_{o*}=\dfrac{\psi_o}{\lambda_s}$ potencial de agua del terreno sobre la frontera fija adimensionalizado ; (dimensionless pond depth) ; (10)

$\psi_{s*}=\dfrac{\psi_s}{\lambda_s}$ potencial de agua del terreno sobre la frontera libre saturada – no saturada adimensionalizado (dimensionless soil water potential at the moving saturated – unsaturated interfase).

Entonces, el problema (P_1) se transforma en el adimensionalizado problema de frontera libre (P_2)

$$(P_2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Theta}{\partial t_*}=\dfrac{\partial}{\partial y_*}\left(\dfrac{C(C-1)}{(C-\Theta)^2}\dfrac{\partial\Theta}{\partial y_*}\right)+\dfrac{ds_*}{dt_*}\dfrac{\partial\Theta}{\partial y_*} \quad , \quad y_*>0 \;,\; t_*>0 \;, & (11)\\ s_*(0)=0 \quad , & (12)\\ \Theta(y_*,0)=0=\Theta(+\infty,0) \quad , \quad y_*>0 \quad , & (13)\\ \Theta(0,t_*)=1 \quad , \quad t_*>0 \quad , & (14)\\ -\dfrac{C(C-1)}{(C-\Theta)^2}\dfrac{\partial\Theta}{\partial y_*}(0^+,t_*)=\dfrac{\psi_{o*}-\psi_{s*}}{s_*(t_*)} \quad , \quad t_*>0 \quad , & (15) \end{cases}$$

El objetivo de este trabajo es presentar la solución del problema de frontera libre (P_2) (11) – (15) que fue obtenida en [BrTa]. Se muestra una solución explícita que depende de un parámetro C, de acuerdo a dos casos : $1 < C < C_1$ o $C \geq C_1$, donde C_1 es una dada constante.

II. SOLUCION EXACTA DEL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE (P_2).

Para que las dos condiciones de borde $(P_1)(3)$ y$(P_1)(5)$ sean compatibles, s(t) debe ser de la forma

$$s(t) = m\sqrt{t} \tag{16}$$

con m una constante desconocida. Por (2) y $(P_1)(5)$ la incógnita m se relaciona con la incógnita S capacidad de absorción del terreno (sorptivity) a través de la siguiente expresión

$$m = \frac{2\,K_s(\psi_o - \psi_s)}{S} \quad , \tag{17}$$

y S verifica que $v(s(t),t) = S/2\sqrt{t}$, siendo v la velocidad de infiltración, la cual está relacionada con ψ a través de la ecuación de Darcy (1).

Luego, en términos de variables adimensionales se tiene que

$$s_*(t_*) = m_*\sqrt{t_*} \tag{18}$$

donde

$$m_* = \frac{2\,K_s(\psi_o - \psi_s)\,(\theta_s - \theta_n)}{S}\,\sqrt{\frac{C(C-1)}{a}} = \frac{m}{\lambda_s}\sqrt{t_s}\,. \tag{19}$$

Para linealizar la ecuación de difusión (P1)(4), se definen las variables [KnPh]

$$\mu = \frac{C(C-1)}{C-\Theta} \quad , \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{C(C-1)}}\int_0^{y_*}\Big(C - \Theta(\nu,t_*)\Big)\,d\nu \quad , \quad \tau = t_* \quad ; \tag{20}$$

y se asume una solución de semejanza del tipo

$$\mu = g(\phi) \quad , \quad \phi = \frac{\chi}{\sqrt{\tau}} \quad . \tag{21}$$

Entonces el problema (P_2) se reduce al problem (P_3)

$$
(P_3) \left|
\begin{array}{ll}
\frac{1}{2}\, g'(\phi)\,(\phi+\gamma) + g''(\phi) = 0 \quad , \quad \phi > 0 \quad , & (22) \\
g(+\infty) = C - 1 \quad , & (23) \\
-\sqrt{C(C-1)}\, g'(0^+) = \frac{CS}{2}\sqrt{\frac{C(C-1)}{a}} \quad , & (24) \\
g(0^+) = C \quad . & (25)
\end{array}
\right.
$$

donde

$$
\gamma = \frac{S}{\sqrt{a}} + \frac{2\sqrt{a}}{CS}\,(\psi_{o*} - \psi_{s*}) \tag{26}
$$

es un coeficiente desconocido.

La solución de $(P_3)(22, 23, 24)$ está dada por

$$
g(\phi) = C - 1 + \frac{SC}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \exp(\gamma^2/4)\, \mathrm{erfc}\left(\frac{\phi+\gamma}{2}\right) \quad , \quad \phi > 0 \; . \tag{27}
$$

La condición de borde extra $(P_3)(25)$ es consistente con la solución si se cumple que

$$
\frac{1}{C} = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \exp(\gamma^2/4)\, \mathrm{erfc}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tag{28}
$$

Como S y γ verifican la relación siguiente

$$
S = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \gamma_o^2(C)}\right) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_o(C)\, , \; C > 1 \tag{29}
$$

donde

$$
\left|
\begin{array}{l}
\gamma_o^2(C) = \frac{8}{C}(\psi_{o*} - \psi_{s*}) = \delta^2\,(C-1) \quad , \\
\delta = \sqrt{\frac{8\, K_s\,(\psi_o - \psi_s)\,(\theta_s - \theta_n)\, K_s}{a}}
\end{array}
\right. \tag{30}
$$

se tiene que la ecuación (28) en la variable $\gamma = \gamma(C)$ está dada por

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{\gamma_o(C)}{\gamma}\right)^2}\right) Q\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_o(C) \, , \, C > 1 \, . \tag{31}$$

donde Q es la función real definida por

$$Q(x)=\sqrt{\pi}\; x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x) \quad , \quad x > 0 \, . \tag{32}$$

A continuación se estudia la ecuación (31), considerando el signo (+) y el signo (−) en dicha ecuación.

<u>Caso 1</u>: (signo + en la expresión de S como función de γ)

La ecuación (31) puede ser escrita como

$$\frac{1}{C}=H_1(\gamma,C) \;\; Q\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_o(C) \, , \, C > 1 \, , \tag{32}$$

donde H_1 está definida por

$$H_1(\gamma,C)=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{\gamma_o(C)}{\gamma}\right)^2}\right), \qquad \gamma \geq \gamma_o(C) \, , \, C > 1 \, . \tag{33}$$

La función H_1 satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & H_1\left(\gamma_o(C),C\right)=\frac{1}{2} & , \quad C > 1 \, , \\ \text{(ii)} & H_1(+\infty,C)=1 & , \quad C > 1 \, , \\ \text{(iii)} & \frac{\partial H_1}{\partial \gamma}(\gamma,C) > 0 & , \quad \gamma > \gamma_o(C) \, , \; C > 1 \, . \end{array} \tag{34}$$

Se define ahora, la función real

$$F_1(\gamma, C) = \frac{1}{C\, H_1(\gamma, C)} \quad , \quad \gamma \geq \gamma_o(C) \quad , \quad C > 1 \tag{35}$$

la cual satisface las siguientes propiedades

$$\left| \begin{array}{lll} \text{(i)} & F_1\Big(\gamma_o(C), C\Big) = \frac{2}{C} & , \quad C > 1 \ , \\ \text{(ii)} & F_1(+\infty, C) = \frac{1}{C} & , \ C > 1 \ , \\ \text{(iii)} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma}(\gamma, C) < 0 & , \ \gamma > \gamma_o(C) \ , \ C > 1 \ . \end{array} \right. \tag{36}$$

Entonces, se tiene que la ecuación (31) es equivalente a

$$F_1(\gamma, C) = Q\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_o(C) \quad , \quad C > 1 \ . \tag{37}$$

Como Q satisface las siguientes propiedades

$$\left| \begin{array}{lll} \text{(i)} & Q(0) = 0 & , \\ \text{(ii)} & Q(+\infty) = 1 & , \\ \text{(iii)} & Q'(x) > 0 & , \ x > 0 \quad , \\ \text{(iv)} & Q''(x) < 0 & , \ x > 0 \quad , \end{array} \right. \tag{38}$$

se concluye que la ecuación (36) admite una única solución en la variable γ si y sólo si

$$F_1(\gamma_o(C), C) = \frac{2}{C} \ \geq \ Q\left(\frac{\gamma_o(C)}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad M(C) \ \leq 2$$

donde la función real M está definida por

$$M(C) = C\, Q\left(\frac{\gamma_o(C)}{2}\right) = C\, Q\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{C-1}\right) \quad , \quad C > 1 \ . \tag{39}$$

Como la función M satisface las propiedades siguientes

$$\left|\begin{array}{lll} \text{(i)} & M'(C) > 0 \quad , \quad C > 1 \quad , & \\ \text{(ii)} & M(1) = Q(0) = 0 \quad , & \\ \text{(iii)} & M(+\infty) = +\infty \quad , & \end{array}\right. \tag{40}$$

entonces, se tiene que existe una única constante C_1 tal que

$$M(C_1) = C_1 \; Q\Big(\frac{\delta}{2}\sqrt{C_1 - 1}\Big) = 2 \tag{41}$$

y

$$M(C) \;\leq\; 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 < C \leq C_1 \; .$$

<u>Caso 2</u>: (signo $-$ en la expresión de S como una función de γ)

La ecuación (30) puede ser escrita como

$$\frac{1}{C} = H_2(\gamma, C) \;\; Q\Big(\frac{\gamma}{2}\Big) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_o(C) \quad , \quad C > 1 \quad , \tag{42}$$

donde H_2 está definida por

$$H_2(\gamma, C) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \Big(\frac{\gamma_o(C)}{\gamma}\Big)^2}\,\right) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_o(C) \quad , \quad C > 1 \quad , \tag{43}$$

la cual satisface las siguientes propiedades

$$\left|\begin{array}{lll} \text{(i)} & H_2\Big(\gamma_o(C), C\Big) = \frac{1}{2} \quad , \quad C > 1 \; , & \\ \text{(ii)} & H_2(+\infty, C) = 0 \quad , \; C > 1 \; , & \\ \text{(iii)} & \frac{\partial H_2}{\partial \gamma}(\gamma, C) < 0 \quad , \; \gamma > \gamma_o(C) \; , \; C > 1 \; . & \end{array}\right. \tag{44}$$

Ahora se define la función real

$$F_2(\gamma,C) = \frac{1}{C\ H_2(\gamma,C)} \quad , \quad \gamma \geq \gamma_o(C) \quad , \quad C > 1 \tag{45}$$

la cual satisface las propiedades siguientes

$$\left|\begin{array}{ll} \text{(i)} & F_2\Big(\gamma_o(C),C\Big) = \frac{2}{C} \quad , \quad C > 1 \ , \\ \\ \text{(ii)} & F_2(+\infty,C) = +\infty \quad , \ C > 1 \ , \\ \\ \text{(iii)} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma}(\gamma,C) > 0 \quad , \ \gamma > \gamma_o(C) \ , \ C > 1 \ . \end{array}\right. \tag{46}$$

Por otra parte, se tiene que la ecuación (42) es equivalente a :

$$F_2(\gamma,C) = Q\Big(\frac{\gamma}{2}\Big) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_o(C) \quad , \quad C > 1 \ . \tag{47}$$

Si se consideran las propiedades de las funciones Q and F_2. (47) admite una única solución en la variable γ si y sólo si

$$F_2(\gamma_o(C),C) = \frac{2}{C} \leq Q\Big(\frac{\gamma_o(C)}{2}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad M(C) \geq 2 \ , \ C > 1 \quad \Leftrightarrow \quad C \geq C_1 \ .$$

<u>Nota</u> 1.– Para el caso $C = C_1$, $\gamma_o(C)$ satisface las dos ecuaciones (31) y (42) pues

$$H_1(\gamma_o(C),C) = H_2(\gamma_o(C),C) = \frac{1}{2} \quad . \quad \forall \ C > 1 \ .$$

Por lo tanto se ha demostrado el siguiente teorema :

Teorema.– Si los datos verifican la condición $C = \dfrac{b-\theta_n}{\theta_s-\theta_n} > 1$, y $C_1 = C_1(a, K_s, \psi_o - \psi_s, \theta_s - \theta_n) > 1$ es la única solución de la ecuación (41), entonces se tienen :

I) Si $\underline{1 < C \le C_1}$:

$$\exists!\ \gamma_1(C) \ge \gamma_o(C) \quad / \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{\gamma_o(C)}{\gamma_1(C)}\right)^2}\,\right) Q\left(\frac{\gamma_1(C)}{2}\right) \quad , \tag{48}$$

y, la solución del problema (P_3) (22–24) está dada por

$$g_1(\phi) = C - 1 + \frac{S_1(C)\,C}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ \exp\left(\gamma_1^2(C)/4\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{\phi+\gamma_1(C)}{2}\right) \quad , \quad \phi > 0 \tag{49}$$

donde

$$S_1(C) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\gamma_1(C) + \sqrt{\gamma_1^2(C) - \gamma_o^2(C)}\,\right). \tag{50}$$

II) If $\underline{C \ge C_1}$:

$$\exists!\ \gamma_2(C) \ge \gamma_o(C) \quad / \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{\gamma_o(C)}{\gamma_2(C)}\right)^2}\,\right) Q\left(\frac{\gamma_2(C)}{2}\right) \quad , \tag{51}$$

y, la solución del problema (P_3) (22–24) está dada por

$$g_2(\phi) = C - 1 + \frac{S_2(C)\,C}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ \exp\left(\gamma_2^2(C)/4\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{\phi+\gamma_2(C)}{2}\right) \quad , \quad \phi > 0 \tag{52}$$

donde

$$S_2(C) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\gamma_2(C) - \sqrt{\gamma_2^2(C) - \gamma_o^2(C)}\,\right). \tag{53}$$

Nota 2.– Para $C = C_1$ ambas soluciones g_1 and g_2 coinciden.

Finalmente, se invierten las relaciones (21), (20), (10) and (9) y se obtiene la solución paramétrica del problema (P_1), la cual depende de C. Si se considera i=1 para el caso $1 < C \le C_1$ e i=2 para el caso $C > C_1$, la solución paramétrica se expresa de la siguiente manera :

$$\left|\begin{array}{ll} \theta_i(\chi,\tau)=(\theta_s-\theta_n)\ C\left(1-\dfrac{(C-1)}{g_i(\chi/\sqrt{\tau})}\right)+\ \theta_n & (54) \\ x=\lambda_s\, y_{i*}(\chi,\tau)+m_i\sqrt{t_s\,\tau} & (55) \\ t=\tau\ t_s & (56) \\ s_i(\chi,\tau)=m_i\sqrt{t_s\,\tau} \qquad \text{(la frontera libre)} & (57) \end{array}\right.$$

con

$$m_i=\frac{2\,K_s\,(\psi_o-\psi_s)\,(\theta_s-\theta_n)}{S_i(C)}\ \sqrt{\frac{C\,(C-1)}{a}}\ \frac{\lambda_s}{\sqrt{t_s}}\ =\ \frac{2\,K_s\,(\psi_o-\psi_s)}{S_i(C)}\ , \qquad (58)$$

$$y_{i*}(\chi,\tau)=\frac{1}{\sqrt{C\,(C-1)}}\int_0^{\chi} g_i(\nu/\sqrt{\tau})\ d\nu=$$

$$=\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{C\,(C-1)}}\left((C-1)\ \frac{\chi}{\sqrt{\tau}}\ + \right. \qquad (59)$$

$$+\ S_i(C)\,C\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ \exp\left(\frac{\gamma_i^2(C)}{4}\right)\left[\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\tau}}+\frac{\gamma_i(C)}{2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\tau}}+\frac{\gamma_i(C)}{2}\right)\ -\right.$$

$$-\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\tau}}+\frac{\gamma_i(C)}{2}\right)^2\right)\ -\ \frac{\gamma_i(C)}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma_i(C)}{2}\right)\ +$$

$$\left. \left. +\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\gamma_i(C)^2}{4}\right)\right]\right)\quad (i=1,\ 2).$$

<u>Nota</u> 3.– Para el caso $C=C_1$, las dos soluciones paramétricas coinciden.

Referencias

[BrTa] A.C. Briozzo – D.A. Tarzia, "The explicit solution of a free boundary problem for a nonlinear absorption model of mixed saturated–unsaturated flow", to appear.

[Br] P. Broadbridge, "Solution of a nonlinear absorption model of mixed saturated–unsatured flow", *Water Resources Research,* **26** (1990), 2435–2443.

[BrWh] P. Broadbridge – I. White, "Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model, 1, Analytic solutions", *Water Resources Research,* **24** (1988), 145–154.

[KnPh] J. H. Knight – J. R. Philip, "Exact solutions in nonlinear diffusion", *J. Eng. Math.,* **8** (1974), 219–227.

[Ph] J. R. Philip, "The theory of infiltration, 6, Effect of water depth over soil", *Soil Sci.,* **85** (1958), 278–286.

[Ta] D. A. Tarzia, "A bibliography on moving–free boundary problems for the heat–diffusion equation. The Stefan problem", Progetto Nazionale M. P. I. Equazione di evoluzione e applicazioni fisico–matematiche, Firenze, (1988) (with 2528 references).

A. C. BRIOZZO – D. A. TARZIA

Depto. de Matemática, F.C.E., Universidad Austral

Paraguay 1950, (2000) Rosario, ARGENTINA.

E – mail: TARZIA@UAUFCE.EDU.AR