Solución Explícita a un problema de Stefan a una fase con conductividad térmica dependiente de la temperatura y con condición convectiva en el borde fijo $x = 0$

Adriana C. Briozzo[♭,†], María F. Natale[♭] y Domingo A. Tarzia[♭,†]

[♭]*Departamento de Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina,*
ABriozzo@austral.edu.ar,FNatale@austral.edu.ar,DTarzia@austral.edu.ar
[†]*CONICET,Argentina*

Resumen: Se considera un problema de frontera libre para un material semi-infinito con conductividad térmica dependiente de la temperatura y un término convectivo con una condición de tipo convectiva en el borde fijo $x = 0$. Se obtienen soluciones explícitas de tipo similaridad bajo ciertas restricciones sobre los datos iniciales del problema y de los coeficientes del material de cambio de fase. Las soluciones explícitas, según diferentes casos estudiados, se obtienen a través de la única solución de un problema de Cauchy en el cual la variable temporal es un parámetro. También se da un algoritmo para su cálculo.

Palabras clave: *Problema de Stefan, problema de frontera libre, solución explícita, cambio de fase, conductividad térmica no lineal, fusión, solución de similaridad.*
2000 AMS Subject Classification: 35R35, 80A22, 35C05

1. Introducción

Se considera un problema de Stefan a una fase en un proceso de fusión con una ecuación del calor no lineal para una región semi-infinita $x > 0$. Se considera la conductividad térmica dependiente de la temperatura y un término convectivo con temperatura de cambio de fase $\theta_f = 0$. En el borde fijo $x = 0$ se impone una condición de tipo convectiva. Se quiere determinar la evolución de la frontera libre $x = s(t)$ que separa a ambas fases y la distribución de la temperatura $\theta(x, t)$.

Siguiendo los trabajos [11, 13, 17] se considera el siguiente problema de frontera libre

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\theta, x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - v(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\ ,\ 0 < x < s(t)\ ,\ t > 0 \tag{1}$$

$$k(\theta(0,t),0)\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}}(\theta(0,t) - \theta_0)\ ,\ h_0 > 0\ ,\ t > 0 \tag{2}$$

$$k\left(\theta\left(s(t),t\right), s(t)\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}\left(s(t),t\right) = -\rho l \dot{s}(t)\ ,\ t > 0 \tag{3}$$

$$\theta\left(s(t),t\right) = 0\ ,\ t > 0\ ,\ s(0) = 0 \tag{4}$$

donde la conductividad térmica $k(\theta, x)$ y la velocidad $v(\theta)$ están dadas por las expresiones

$$v(\theta) = \rho c \frac{d}{2\left(a + b\theta\right)^2} \quad , \quad k(\theta, x) = \rho c \frac{1 + dx}{\left(a + b\theta\right)^2} \tag{5}$$

donde c, ρ y l son el calor específico, la densidad y el calor latente de fusión del medio respectivamente, todos ellos se suponen constantes con parámetros a, d positivos, b real tal que $(a + b\theta_0) > 0$. Si se toma $d = 0$ y $b = 0$ en el problema de frontera libre $(1) - (5)$ se obtiene el clásico problema a una fase de Lamé-Clapeyron-Stefan [8]. Problemas de cambio de fase aparecen frecuentemente en los procesos industriales y en otros problemas de interés tecnológico [5, 6, 9]. Una extensa bibliografía sobre el tema fue dada en [20].

La clase (5) de coeficiente de conductividad térmica o de difusión fue considerado en numerosos trabajos [1, 2, 3, 4, 7, 14, 18]; soluciones explícitas para similares problemas de frontera libre de tipo Stefan fueron dadas en [10, 15, 16, 19]. El objetivo del trabajo es determinar que condiciones deben cumplir los parámetros del problema para obtener un proceso de cambio de fase instantáneo. Se completan los resultados dados en [11, 13, 17] considerando una nueva condición en la frontera fija $x = 0$, la cual está dada por la expresión (2) (ver [21, 22]) siguiendo un método desarrollado en [13].

Teorema 1 *Sean $a, c, d \in \mathbb{R}^+$. Si $b > 0$ y $a > bl/c$, ó $b < 0$ y $a > -\frac{bl}{c}$ entonces el problema de frontera libre $(1) - (4)$ tiene una única solución explícita de tipo similaridad dada por*

$$\theta(\xi) = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{Aerf\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\xi^*\right)+B} - a\right]$$
$$\xi = \frac{y}{\sqrt{2\gamma t}} = \frac{\frac{2}{d}\left[(1+dx)^{\frac{1}{2}}-1\right]}{\sqrt{2\gamma t}} \tag{6}$$
$$s(t) = \frac{1}{d}\left[\left(1 + \frac{d}{2}\sqrt{2\gamma t}\right)^2 - 1\right]$$

con

$$\xi = (-\alpha b + a)\int_{\xi_1^*}^{\xi^*}[A\,erf(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\sigma) + B]d\sigma \tag{7}$$
$$\gamma = \frac{\gamma^*}{(-\alpha b + a)^2}$$

los coeficientes A y B están dados por

$$A = \sqrt{\pi}\alpha^* P(w) \tag{8}$$
$$B = \frac{1}{a} - \sqrt{\pi}\alpha^* P(w) erf(w) \tag{9}$$
$$\alpha^* = \frac{\alpha b}{a(a - \alpha b)}\ , \alpha = \frac{l}{c} \tag{10}$$

con γ^*, ξ_1^* y w determinados de la siguiente manera:

$$\gamma^* = 2w^2\ ,\ \xi_1^* = \frac{\widetilde{z}_1}{w}\ ,\ w = w(\widetilde{z}_1) = P^{-1}(R_1(\widetilde{z}_1)) \tag{11}$$

donde $\widetilde{z}_1$ es la única solución de la ecuación

$$erf(z) - erf(w(z)) = \frac{b\theta_0 h_0^* + z}{a h_0^* \sqrt{\pi} P(z)}\ , z_0 < z < 0 \tag{12}$$

siendo

$$P(z) = z \exp z^2\ ,\ w(z) = P^{-1}(R_1(z)) \tag{13}$$

$$R_1(z) = \frac{-P(z)h_0^*}{\alpha^*\left[(a + b\theta_0)\, h_0^* + z\right]}\ ,\ h_0^* = \frac{h_0}{\rho c}\ ,\ z_0 = -(a + b\theta_0)h_0^*. \tag{14}$$

Además los coeficientes γ^*, ξ_1^* dados por (11) son las únicas soluciones del sistema de ecuaciones

$$erf\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right) - erf(\xi_1^*\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}) = \frac{1}{\alpha^*\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha^*\exp(-\xi_1^{*2}\frac{\gamma^*}{2})}{\xi_1^* w} + \frac{\exp(-\frac{\gamma^*}{2})}{a\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}}\right) \tag{15}$$

$$erf(\xi_1^*\sqrt{\tfrac{\gamma^*}{2}}) - erf\left(\sqrt{\tfrac{\gamma^*}{2}}\right) = \left(\frac{h_0^*}{(a+b\theta_0)\,h_0^* + \xi_1^*\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}} - \frac{1}{a}\right)\frac{\exp(-\frac{\gamma^*}{2})}{\alpha^*\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}} \tag{16}$$

Para obtener la solución explícita para el caso $b > 0$ y $a > \frac{bl}{c}$, o para el caso $b < 0$ y $a > -\frac{bl}{c}$, en una forma más conveniente a la dada en el Teorema 1, se puede seguir el proceso dado por el teorema siguiente:

Teorema 2 *(algoritmo para el cálculo de la solución explícita)*
(i) *Se calculan los parámetros h_0^*, z_0, α y α^* definidos en* (10) *y* (14)*;*
(ii) *Se calcula la única solución $\widetilde{z}_1 \in (z_0, 0)$ de la ecuación* (12)*;*
(iii) *Se calculan los coeficientes A, B y w, definidos en* (8), (9) *y* (13)*;*
(iv) *Se calcula la frontera libre auxiliar $\overline{S}(t)$ por la expresión*

$$\overline{S}(t) = \frac{2w}{a - b\alpha}\sqrt{t}; \tag{17}$$

(v) *Se fija $t_0 > 0$ un tiempo arbitrario y se calcula la única solución $Y = Y(y,t)$ del problema de Cauchy siguiente ($t \geq t_0 > 0$ es un parámetro)*

$$\tfrac{\partial Y}{\partial y}(y,t) = \tfrac{1}{2\sqrt{t}}\left(\tfrac{1}{B + A erf(Y(y,t))}\right), \quad 0 < y < \overline{S}(t), \quad t \geq t_0 \tag{18}$$

$$Y(0,t) = \frac{\widetilde{z}_1}{w^2} \ ; \tag{19}$$

(vi) *Se calcula la temperatura auxiliar $\overline{\theta} = \overline{\theta}(y,t)$ por la expresión*

$$\overline{\theta}\,(y,t) = \frac{1}{b}\left[\tfrac{1}{B + A erf(Y(y,t))} - a\right] \ , \ 0 < y < \overline{S}(t) \ , \quad t \geq t_0; \tag{20}$$

(vii) *Se calcula la frontera libre explícita por la expresión*

$$s(t) = \tfrac{w}{a - \frac{lb}{c}}\left[2\sqrt{t} + \tfrac{dw}{a - \frac{lb}{c}}t\right] \ , \quad t \geq t_0; \tag{21}$$

$(viii)$ *Se calcula la temperatura explícita por la expresión*

$$\theta(x,t) = \frac{1}{b}\left[\tfrac{1}{B + A erf(Y(\frac{2}{d}(\sqrt{1+dx} - 1), t))} - a\right], 0 < x < s(t) \ , \ t \geq t_0; \tag{22}$$

(ix) *Además, la temperatura en el borde fijo es constante en el tiempo y viene dada por:*

$$0 < \theta(0,t) = \overline{\theta}_0 = \theta_0 + \frac{z}{bh_0^*} < \theta_0 \ , \ \forall t > t_0. \tag{23}$$

Nota 1 *El caso particular $d = 0$ no puede resolverse a través de un método similar pues una de las transformaciones auxiliares que se utilizan resulta ser la identidad cuando $d \to 0$. El problema de frontera libre $(1), (3) - (5)$ para el caso particular $d = 0$ con una condición de temperatura o de flujo de calor en el borde fijo $x = 0$ fue resuelto en [12]; el problema de frontera libre $(1) - (5)$ para el caso $d = 0$ (con la condición convectiva (2) en el borde fijo $x = 0$) es un problema abierto.*

Agradecimientos El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por PIP No. 0460 de CONICET-UA y por el ”Fondo de Ayuda a la Investigación”de la UA, Rosario (Argentina).

REFERENCIAS

[1] A. C. BRIOZZO, M. F. NATALE AND D. A. TARZIA, *Determination of unknown thermal coefficients for Storm's-type materials through a phase-change process,* Int. J. Non-Linear Mech. 34 (1999), pp. 324-340 .

[2] A. C. BRIOZZO AND D. A. TARZIA, "*An explicit solution for an instantaneous two-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients* ", IMA J. of Applied Mathematics, 67 (2002), pp. 249-261 .

[3] P. BROADBRIDGE, *Non-integrability of non-linear diffusion-convection equations in two spatial dimensions,* J. Phys. A: Math. Gen 19 (1986), pp. 1245-1257 .

[4] P. BROADBRIDGE, *Integrable forms of the one-dimensional flow equation for unsaturated heterogeneous porous media,* J. Math. Phys. 29 (1988), pp. 622-627 .

[5] J. R. CANNON, *The one-dimensional heat equation,* Addison - Wesley, Menlo Park, 1984.

[6] J. CRANK J, *Free and moving boundary problems,* Clarendon Press, Oxford, 1984.

[7] J. H. KNIGHT, J. R. PHILIP, *Exact solutions in nonlinear diffusion,* J. Engrg. Math., 8 (1974), pp. 219-227.

[8] G. LAMÉ AND B. P. CLAPEYRON, *Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide,* Annales Chimie Physique 47 (1831), pp. 250-256 .

[9] V. J. LUNARDINI, *Heat transfer with freezing and thawing,* Elsevier, Amsterdam , 1991.

[10] M. F. NATALE AND D. A. TARZIA, *Explicit solutions to the two-phase Stefan problem for Storm-type materials,* J. Phys. A: Math. Gen 33 (2000), pp. 395-404.

[11] M. F. NATALE AND D. A. TARZIA, *Explicit solutions to the one-phase Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity and a convective term,* Int. J. Engng. Sci., 41 (2003), pp. 1685-1698.

[12] M. F. NATALE AND D. A. TARZIA, *Explicit solutions for a one-phase Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity,* Bolletino Un. Mat. Italiana (8) 9-B (2006), pp. 79-99.

[13] M. F. NATALE AND D. A. TARZIA, *The classical one-phase Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity and a convective term,* MAT-SerieA, 15 (2008), pp. 1-16.

[14] R. PHILIP, *General method of exact solution of the concentration-dependent diffusion equation,* Australian J. Physics, 13 (1960), pp. 1-12 .

[15] C. ROGERS, *Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem,* J. Phys. A: Math. Gen 18 (1985), pp. 105-109

[16] C. ROGERS , *On a class of moving boundary problems in non-linear heat condition: Application of a Bäcklund transformation,* Int. J. Non-Linear Mech. 21 (1986), pp. 249-256 .

[17] C. ROGERS AND P. BROADBRIDGE, *On a nonlinear moving boundary problem with heterogeneity: application of reciprocal transformation,* Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) 39(1988), pp. 122-129 .

[18] G. C. SANDER, I. F. CUNNING, W. L. HOGARTH AND J. Y. PARLANGE, *Exact solution for nonlinear nonhysteretic redistribution in vertical soli of finite depth,* Water Resources Research 27 (1991), pp. 1529-1536 .

[19] D. A. TARZIA, *An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*, Quart. Appl. Math 39 (1981), pp. 491-497.

[20] D. A. TARZIA, *A bibliography on moving - free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems,* MAT-Serie A 2 (2000) (with 5869 titles on the subject, 300 pages). See www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2(2000)/ or http://www.austral.edu.ar/fce/archivos/mat/Tarzia-MAT-SerieA-2(2000).pdf

[21] D. A. TARZIA, *An explicit solution for a two-phase unidimensional Stefan problem with a convective boundary condition at the fixed face*, MAT-SerieA, 8(2004), pp. 21-27.

[22] S. M. ZUBAIR AND M. A. CHAUDHRY, *Exact solutions of solid-liquid phase-change heat transfer when subjected to convective boundary conditions,* Wärme-und Stoffübertragung (now Heat and Mass Transfer), 30 (1994), pp. 77-81.