MACI 2019

Vol. 7

VII CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA, COMPUTACIONAL E INDUSTRIAL

Luis R. Ceballos, Claudia M. Gariboldi y Bruno A. Roccia (Eds.)

UNRC

Río Cuarto, Córdoba, Argentina
8 al 10 de Mayo de 2019

SOBRE UN PROBLEMA DE CONDUCCIÓN DEL CALOR NO-CLÁSICO CON UNA FUENTE NO LINEAL DEPENDIENDO DEL PROMEDIO EN EL TIEMPO DEL FLUJO DE CALOR EN LA FRONTERA

Mahdi Boukrouche * Domingo A. Tarzia †‡
* Lyon University, Institut Camile Jordan CNRS UMR 5208,
23 rue Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne Cedex 2, France.
† Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Univ. Austral,
Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.
‡ CONICET, Argentina.
E-mail: DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Sea *D* un semi-espacio n-dimensional con frontera *S*. Se considera la ecuación del calor no-clásica en el dominio *D* para la cual la fuente de energía interna depende del promedio en el tiempo del flujo de calor sobre la frontera *S*. El problema está motivado por la modelización de la regulación de la temperatura en el medio. Utilizando la función de Green para el dominio *D* se encuentra para la solución una representación integral en función del flujo de calor *V* sobre *S* que es una incógnita suplementaria del problema. Se obtiene que *V* debe satisfacer una ecuación integral de Volterra de segunda especie en el tiempo *t* y con un parámetro en $\mathbb{R}^{n-1}$. Bajo ciertas condiciones sobre los datos del problema se demuestra que existe una única solución local que puede extenderse globalmente en el tiempo. Además, para el caso unidimensional se obtiene la solución explícita utilizando el método de Adomian y a través de un doble principio de inducción.

Palabras clave: *Ecuación del calor no-clásica n-dimensional, Ecuación integral de Volterra de segunda especie, Existencia y unicidad de solución, Representación integral de la solución, Solución explícita, Método de Adomian, Doble principio de inducción.*
2000 AMS Subjects Classification: 35C15, 35K05, 35K20, 35K60, 45D05, 45E10, 80A20.

1. INTRODUCCIÓN

En los trabajos [2, 21, 22] se han considerado el siguiente problema no lineal para la ecuación del calor no-clásica para un material semi-infinito:

$$\begin{cases} i)\; u_t - u_{xx} = -F\left(u_x\left(0,t\right)\right), \quad x>0, \quad t>0 \\ ii)\; u\left(0,t\right) = g(t), \quad t>0 \\ iii)\; u\left(x,0\right) = h\left(x\right), \quad x>0 \end{cases} \qquad . \tag{1}$$

Tales problemas están motivados por la modelización de la regulación de la temperatura en un medio isótropo, con una fuente no uniforme la cual provee un enfriamiento o calentamiento del sistema dependiendo de las propiedades de *F* con relación al desarrollo del flujo del calor en el borde $x=0$ [8, 10], por ejemplo, si se supone:

$$V\,F(V,t)>0, \quad \forall V\neq 0, \quad F(0)=0, \tag{2}$$

entonces la fuente enfría cuando $u_x(0,t)>0$ y calienta cuando $u_x(0,t)<0$. Algunas otras referencias en el tema son [9, 13-16].

En el presente trabajo se considera un caso n-dimensional en el cual la fuente de calor depende del promedio en el tiempo del flujo de calor en la frontera. A los efectos de facilitar la notación se denota un punto de $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (x,y), \quad \text{con} \quad x = x_1 \in \mathbb{R}, \quad y = (x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Sea *D* un semi-espacio n-dimensional con frontera *S*, definidos por:

$$D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^n \,/\, x = x_1 > 0,\, y = (x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\right\} \quad , \tag{3}$$

$$S = \partial D = \left\{0\right\}\times\mathbb{R}^{n-1} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^n \,/\, x=0,\, y\in\mathbb{R}^{n-1}\right\} \quad . \tag{4}$$

El objetivo del presente trabajo es el de estudiar el siguiente problema para la ecuación del calor no-clásica en el dominio *D* para la cual la fuente de energía interna depende del flujo de calor total en el tiempo sobre la frontera *S* : Hallar la temperatura $u = u\left(x,t\right)$ de manera que satisfaga las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} i)\, u_t - \Delta u = -F\left(\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t u_x(0,y,s)\,ds\right), \quad x>0, \quad y\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad t>0 \\ ii)\, u(0,y,t)=0, \quad y\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad t>0; \quad iii)\, u(x,y,0)=h(x,y), \quad x>0, \quad y\in\mathbb{R}^{n-1} \end{cases}. \tag{5}$$

En Sección 2 se demuestra que, bajo ciertas condiciones sobre los datos F y h del problema (5), existe una única solución local que puede extenderse globalmente en el tiempo. En la Sección 3 se estudia el caso unidimensional y se obtiene la solución explícita utilizando el método de Adomian y a través de un doble principio de inducción. Se complementan resultados obtenidos en [3, 4] para el caso n-dimensional y en [2, 21] para el caso unidimensional.

2. Existencia y unicidad de solución del problema (5)

Teorema 1 *La representación integral de la solución del problema (5) está dada por la siguiente expresión:*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_D G_1(x,y,t;\xi,\eta,0)\,h(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ &\quad -\int_0^t \frac{erf\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{n-1}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp\left(-\frac{\|y-\eta\|^2}{4(t-\tau)}\right) F\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau V(\eta,s)\,ds\right)d\eta\right]d\tau \end{aligned} \tag{6}$$

donde la función $V=V(y,t)$, *definida por* $V(y,t)=u_x(0,y,t),\ y\in\mathbb{R}^{n-1}, t>0$ *(flujo de calor en la superficie* $x=0$*), satisface la ecuación integral de Volterra de segunda especie siguiente:*

$$\begin{aligned} V(y,t) &= \int_D G_{1x}(0,y,t;\xi,\eta,0)\,h(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ &\quad -2\int_0^t \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{n}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp\left(-\frac{\|y-\eta\|^2}{4(t-\tau)}\right) F\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau V(\eta,s)\,ds\right)d\eta\right]d\tau, \quad t>0 \end{aligned} \tag{7}$$

en la variable $t>0$ *siendo* $y\in\mathbb{R}^{n-1}$ *un parámetro. Por otro lado,* G_1 *es la función de Green para la ecuación del calor n-dimensional con condición de frontera de tipo Dirichlet nula, dada por la siguiente expresión* [12, 17]*:*

$$G_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = K(x,y,t;\xi,\eta,\tau) - K(-x,y,t;\xi,\eta,\tau) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{n-1}}\exp\left(-\frac{\|y-\eta\|^2}{4(t-\tau)}\right)G(x,t;\xi,\tau) \tag{8}$$

donde K es la solución fundamental de la ecuación del calor n-dimensional definida por:

$$K(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{n}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+\|y-\eta\|^2}{4(t-\tau)}\right), (x,y)\in\mathbb{R}^n, (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^n, t>\tau, \tag{9}$$

con

$$\begin{cases} (\xi_1,\xi_2,......,\xi_n) = (\xi,\eta), \quad \text{con} \quad \xi=\xi_1\in\mathbb{R}, \quad \eta=(\xi_2,......,\xi_n)\in\mathbb{R}^{n-1} \\ \|y-\eta\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=2}^n (x_i-\xi_i)^2} : \quad \text{norma en } \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}. \tag{10}$$

siendo G la función de Green para el caso unidimensional.

Teorema 2 *Bajo las hipótesis*

$$h\in C^0(D), \quad F\in C^0(\mathbb{R}) \text{ y localmente Lipschitz en } \mathbb{R} \tag{11}$$

existe una única solución local que se puede extender globalmente en el tiempo.

Prueba. Con los datos (11) se verifican las hipótesis (H1)-(H3) y (H5)-(H8) para poder aplicar los Teoremas 1.2 [18, pp. 91] y 1.3 [18, pp. 97] a la ecuación integral (7) con lo cual se pueden obtener los resultados de la tesis. □

3. ESTUDIO DEL CASO UNIDIMENSIONAL Y SU SOLUCIÓN EXPLÍCITA

Se considera el siguiente problema no-clásico de conducción del calor unidimensional: Hallar la temperatura $u = u(x,t)$ de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} i)\; u_t - u_{xx} = -F\left(\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t u_x(0,s)\,ds\right), \quad x>0, \quad t>0 \\ ii)\; u(0,t)=0, \quad t>0; \qquad iii)\; u(x,0)=h_0, \quad x>0 \end{cases} . \tag{12}$$

La solución del problema (12) está dada por:

$$u(x,t) = h_0\, erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) F\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau V(s)\,ds\right) d\tau \tag{13}$$

donde la función $V = V(t)$, definida por $V(t) = u_x(0,t),\, t>0$ (flujo de calor en el borde $x=0$), satisface la ecuación integral de Volterra de segunda especie siguiente:

$$V(t) = \frac{h_0}{\sqrt{\pi t}} - \int_0^t \frac{F\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau V(s)\,ds\right)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\, d\tau, \quad t>0. \tag{14}$$

Teorema 3 *Bajo las hipótesis que $F(V) = \lambda V$ para $\lambda \in \mathbb{R}$, la solución del problema (12) está dada por:*

$$u(x,t) = h_0\, erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) W(\tau)\,d\tau \tag{15}$$

donde la función $W = W(t)$ satisface la ecuación integral de Volterra de segunda especie siguiente:

$$W(t) = \frac{2h_0}{\sqrt{\pi t}} - \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{t}\int_0^t W(\tau)\sqrt{t-\tau}\; d\tau\,. \tag{16}$$

Prueba. Si se define $W(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t V(\tau)\,d\tau$, se obtiene la expresión (15) para la solución del problema (12) y además la ecuación integral de Volterra de segunda especie (16) para $W(t)$.

Teorema 4 *La solución de la ecuación integral de Volterra de segunda especie* (16) *está dada por la siguiente expresión:*

$$W(t) = \frac{2h_0}{\sqrt{\pi t}} I(t) - 2h_0\lambda\, J(t), \quad t>0, \tag{17}$$

con

$$I(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(4\lambda^2 t\right)^n}{(2n+1)\,n![(2n-1)!!]^2}, \quad J(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(2\lambda^2 t\right)^n}{(n+1)(n!)^2\,(2n+1)!!}, \quad t>0\,. \tag{18}$$

Prueba. Se utiliza el método de Adomian [1, 23] y un doble principio de inducción.

Observación 1 *Se complementan los resultados obtenidos en* [2, 11, 21, 22] *para el caso unidimensional cuando la fuente depende del flujo de calor o del flujo total*.

Observación 2 *Recientemente se han obtenido resultados para el problema de Stefan para la ecuación del calor no- clásica unidimensional para un material semi-infinito en* [5-7, 20]. *También se ha estudiado la ecuación del calor no- clásica unidimensional para un material finito en* [19].

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos ANPCyT PICTO Austral 2016 No. 090 y PIP Nº 0534 de CONICET-Univ. Austral, Rosario.

REFERENCIAS

[1] G. ADOMIAN, *Solving frontier problems of physics decomposition method*, Springer, Berlin. 1994.

[2] A.C. BERRONE, D.A. TARZIA, AND L.T. VILLA, *Asymptotic behavior of a non-classical heat conduction problem for a semi-infinite material*, Math. Meth. Appl. Sci., 23 (2000), pp. 1161-1177.

[3] M. BOUKROUCHE, D.A. TARZIA, *Global solution to a non-classical heat problem in the space* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}$, Quart. Appl. Math., 72 (2014), pp. 347-361.

[4] M. BOUKROUCHE, D.A. TARZIA, *Non-classical heat conduction problem with nonlocal source*, Bound. Value Probl., 2017 No. 51 (2017), pp. 1-14.

[5] A.C. BRIOZZO, AND D.A. TARZIA, *Existence and uniqueness for one-phase Stefan problem of a non-classical heat equation with temperature boundary condition at a fixed face*, Electron. J. Diff. Eq., 2006 No. 21 (2006), pp. 1-16.

[6] A.C. BRIOZZO, AND D.A. TARZIA, *Exact solutions for nonclassical Stefan problems*, Int. J. Diff. Eq., Vol. 2010, Article ID 868059 (2010), pp. 1-19.

[7] A.C. BRIOZZO, AND D.A. TARZIA, *A Stefan problem for a non-classical heat equation with a convective condition*, Appl. Math. Comput., 217 (2010), pp. 4051-4060.

[8] J.R. CANNON, *The one-dimensional heat equation*, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1984.

[9] J.R. CANNON, AND H.M. YIN, *A class of non-linear non-classical parabolic equations*, J. Diff. Eq., 79 (1989), pp. 266-288.

[10] H.S. CARSLAW, AND C.J. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1959.

[11] A.N. CERETANI – D.A. TARZIA – L.T. VILLA, *Explicit solutions for a non-classical heat conduction problem for a semi-infinite strip with a non-uniform heat source*, Bound. Value Probl., 2015 No. 156 (2015), pp. 1-26.

[12] A. FRIEDMAN, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall (1964).

[13] K. GLASHOFF, AND J. SPREKELS, *An application of Glicksberg's theorem to set-valued integral equations arising in the theory of thermostats*, SIAM J. Math. Anal., 12 (1981), pp. 477-486.

[14] K. GLASHOFF, AND J. SPREKELS, *The regulation of temperature by thermostats and set-valued integral equations*, J. Integral Eq., 4 (1982), pp. 95-112.

[15] N. KENMOCHI, *Heat conduction with a class of automatic heat source controls*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 186 (1990), pp. 471-474.

[16] N. KENMOCHI, AND M. PRIMICERIO, *One-dimensional heat conduction with a class of automatic heat source controls*, IMA J. Appl. Math., 40 (1988), pp. 205-216.

[17] O.A. LADYZENSKAJA, V.A. SOLONNIKOV, AND N.N. URAL'CEVA, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, American Math. Society, Providence (1968).

[18] R.K. MILLER, *Nonlinear Volterra integral equations*, W.A. Benjamin (1971).

[19] N.N. SALVA, D.A. TARZIA, AND L.T. VILLA, *An initial-boundary value problem for the one-dimensional non-classical heat equation in a slab*, Bound. Value Probl., 2011 No. 4 (2011), pp. 1-17.

[20] D.A. TARZIA, *A Stefan problem for a non-classical heat equation*. MAT - Serie A, 3 (2001), pp. 21-26.

[21] D.A. TARZIA, AND L.T. VILLA, *Some nonlinear heat conduction problems for a semi-infinite strip with a non-uniform heat source*, Rev. Unión Mat. Argentina, 41 (1998), pp. 99-114.

[22] L.T. VILLA, *Problemas de control para una ecuación unidimensional no homogenea del calor*, Rev. Unión Mat. Argentina, 32 (1986), pp. 163-169.

[23] A.M. WAZWAZ, *Linear and nonlinear integral equations, methods and applications*, Springer, Heidelberg, 2011.