EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN GLOBAL PARA LA ECUACIÓN DEL CALOR NO-CLÁSICA PARA UN SEMI-ESPACIO N-DIMENSIONAL

Mahdi Boukrouche * , Domingo A. Tarzia †‡
* PRES Lyon University, University of Saint-Etienne, Laboratory of Mathematics, LaMUSE EA-3989, 23 rue Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne, France.
E-mail: Mahdi.Boukrouche@univ-st-etienne.fr
† Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.
‡ CONICET, Argentina.
E-mail: DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Sea *D* un semi-espacio n-dimensional con frontera *S*. Se considera la ecuación del calor no-clásica en el dominio *D* para la cual la fuente de energía interna depende del flujo de calor sobre la frontera *S*. El problema está motivado por la modelización de la regulación de la temperatura en el medio. Utilizando la función de Green para el dominio *D* se encuentra para la solución una representación integral en función del flujo de calor *V* sobre *S* que es una incógnita suplementaria del problema. Se obtiene que *V* debe satisfacer una ecuación integral de Volterra de segunda especie en el tiempo *t* y con un parámetro en $\mathbb{R}^{n-1}$. Bajo ciertas condiciones sobre los datos del problema se demuestra que existe una única solución local que puede extenderse globalmente en el tiempo. Se generalizan resultados obtenidos en Berrone-Tarzia-Villa, Math. Meth. Appl. Sci., 23 (2000), pp. 1161-1177 y Tarzia-Villa, Rev. Unión Mat. Argentina, 41 (1998), pp. 99-114 para el caso unidimensional.

Palabras clave: *Ecuación del calor no-clásica n-dimensional, Ecuación integral de Volterra, Existencia y unicidad de solución, Representación integral de la solución..*
2000 AMS Subjects Classification: 35C15, 35K05, 35K20, 35K60, 80A20.

1. INTRODUCCIÓN

En los trabajos [1, 17, 18] se han considerado el siguiente problema no lineal para la ecuación del calor no-clásica para un material semi-infinito:

$$\begin{cases} i)\ u_t - u_{xx} = -F\left(u_x\left(0,t\right)\right), \quad x>0, \quad t>0 \\ ii)\ u\left(0,t\right) = g(t), \quad t>0 \\ iii)\ u\left(x,0\right) = h\left(x\right), \quad x>0 \end{cases} \quad . \tag{1}$$

Tales problemas están motivados por la modelización de la regulación de la temperatura en un medio isótropo, con una fuente no uniforme la cual provee un enfriamiento o calentamiento del sistema dependiendo de las propiedades de *F* con relación al desarrollo del flujo del calor en el borde $x=0$ [5, 7], por ejemplo, si se supone:

$$V\ F(V,t)>0, \quad \forall V \neq 0, \quad F(0)=0, \tag{2}$$

entonces la fuente enfría cuando $u_x(0,t)>0$ y calienta cuando $u_x(0,t)<0$. Algunas otras referencias en el tema son [6, 9-12].

En el presente trabajo se considera un caso n-dimensional. A los efectos de facilitar la notación se denota un punto de $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = (x,y), \quad \text{con} \quad x = x_1 \in \mathbb{R}, \quad y = (x_2, \ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Sea *D* un semi-espacio n-dimensional con frontera *S*, definidos por:

$$D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \,/\, x = x_1 > 0,\ y = (x_2, \ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\right\} \quad , \tag{3}$$

$$S = \partial D = \left\{0\right\} \times \mathbb{R}^{n-1} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \,/\, x=0,\ y \in \mathbb{R}^{n-1}\right\} \quad . \tag{4}$$

El objetivo del presente trabajo es el de estudiar el siguiente problema para la ecuación del calor no-clásica en el dominio *D* para la cual la fuente de energía interna depende del flujo de calor sobre la frontera *S* : Hallar la temperatura u=u(x,y,t) de manera que satisfaga las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} i)\, u_t - \Delta u = -F\left(u_x\left(0,y,t\right)\right), \quad x>0, \quad y\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad t>0 \\ ii)\, u\left(0,y,t\right)=0, \quad y\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad t>0; \quad iii)\, u\left(x,y,0\right)=h\left(x,y\right), \quad x>0, \quad y\in\mathbb{R}^{n-1} \end{cases} . \tag{5}$$

En la Sección II se dan las soluciones básicas para la ecuación del calor n-dimensional que serán utilizadas en la Sección III para demostrar que, bajo ciertas condiciones sobre los datos F y h del problema (5), existe una única solución local que puede extenderse globalmente en el tiempo. Se generalizan resultados obtenidos en [1, 17] para el caso unidimensional.

2. SOLUCIONES BÁSICAS PARA LA ECUACIÓN DEL CALOR N-DIMENSIONAL

La solución del siguiente problema de Cauchy para la ecuación del calor n-dimensional:

$$\begin{cases} i)\, u_t - \Delta u = 0, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^n, \quad t>0 \\ ii)\, u\left(x,y,0\right)=h\left(x,y\right), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^n \end{cases} \tag{6}$$

es conocida como la fórmula de Poisson dada por la expresión [8,13]:

$$u\left(x,y,t\right)=\int_{\mathbb{R}^n} K\left(x,y,t;\xi,\eta,0\right)h\left(\xi,\eta\right)d\xi\, d\eta \tag{7}$$

donde K es la solución fundamental de la ecuación del calor n-dimensional definida por:

$$K\left(x,y,t;\xi,\eta,\tau\right)=\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}\right)^n}\exp\left(-\frac{\left(x-\xi\right)^2+\left\|y-\eta\right\|^2}{4\left(t-\tau\right)}\right), (x,y)\in\mathbb{R}^n, (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^n, t>\tau , \tag{8}$$

con

$$\begin{cases} (\xi_1,\xi_2,......,\xi_n)=(\xi,\eta), \quad \text{con} \quad \xi=\xi_1\in\mathbb{R}, \quad \eta=(\xi_2,......,\xi_n)\in\mathbb{R}^{n-1} \\ \left\|y-\eta\right\|=\sqrt{\sum_{i=2}^{n}\left(x_i-\xi_i\right)^2} : \quad \text{norma en } \mathbb{R}^{n-1} \end{cases} . \tag{9}$$

Lema 1 *La solución del problema:*

$$\begin{cases} i)\, u_t - \Delta u = 0, \quad x>0, \quad y\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad t>0 \\ ii)\, u\left(0,y,t\right)=0, \quad y\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad t>0 \\ iii)\, u\left(x,y,0\right)=h\left(x,y\right), \quad x>0, \quad y\in\mathbb{R}^{n-1} \end{cases} , \tag{10}$$

está dada por la siguiente expresión:

$$u\left(x,y,t\right)=\int_D G_1\left(x,y,t;\xi,\eta,0\right)h\left(\xi,\eta\right)d\xi\, d\eta \tag{11}$$

donde G_1 es la función de Green para la ecuación del calor n-dimensional con condición de frontera de tipo Dirichlet nula, dada por la siguiente expresión:

$$G_1\left(x,y,t;\xi,\eta,\tau\right)=K\left(x,y,t;\xi,\eta,\tau\right)-K\left(-x,y,t;\xi,\eta,\tau\right)=\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}\right)^{n-1}}\exp\left(-\frac{\left\|y-\eta\right\|^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)G\left(x,t;\xi,\tau\right) \tag{12}$$

siendo G la función de Green para el caso unidimensional.

Lema 2 *La solución del problema:*

$$\begin{cases} i)\, u_t - \Delta u = 0, \quad x>0, \quad y\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad t>0 \\ ii)\, u_x\left(0,y,t\right)=0, \quad y\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad t>0 \\ iii)\, u\left(x,y,0\right)=h\left(x,y\right), \quad x>0, \quad y\in\mathbb{R}^{n-1} \end{cases} , \tag{13}$$

está dada por la siguiente expresión:

$$u(x,y,t) = \int_D N_1(x,y,t;\xi,\eta,0)\,h(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{14}$$

donde N_1 es la función de Green para la ecuación del calor n-dimensional con condición de frontera de tipo Neumann nula, dada por la siguiente expresión:

$$N_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = K(x,y,t;\xi,\eta,\tau) + K(-x,y,t;\xi,\eta,\tau) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{n-1}}\exp\left(-\frac{\|y-\eta\|^2}{4(t-\tau)}\right)N(x,t;\xi,\tau) \tag{15}$$

siendo N la función de Neumann para el caso unidimensional.

Lema 3 *Las funciones G_1 y N_1 tienen las siguientes propiedades fundamentales:*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp\left(-\frac{\|y-\eta\|^2}{4(t-\tau)}\right)d\eta = \left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{n-1}, \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|y-\eta\|^2 \exp\left(-\frac{\|y-\eta\|^2}{4(t-\tau)}\right)d\eta = \frac{(n-1)(t-\tau)}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{n-1} \tag{16}$$

$$G_1(0,y,t;\xi,\eta,\tau) = 0, \quad N_{1x}(0,y,t;\xi,\eta,\tau) = 0 \tag{17}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)\,d\eta = G(x,t;\xi,\tau), \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} N_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)\,d\eta = N(x,t;\xi,\tau) \tag{18}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_{1x}(0,y,t;\xi,\eta,\tau)\,d\eta = G_x(0,t;\xi,\tau) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) \tag{19}$$

$$\int_0^{+\infty} N_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)\,d\xi = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{n-1}}\exp\left(-\frac{\|y-\eta\|^2}{4(t-\tau)}\right) \tag{20}$$

$$\int_0^{+\infty} G_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)\,d\xi = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{n-1}}\exp\left(-\frac{\|y-\eta\|^2}{4(t-\tau)}\right)erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \tag{21}$$

$$\int_0^{+\infty} G_{1x}(0,y,t;\xi,\eta,\tau)\,d\xi = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{n}}\exp\left(-\frac{\|y-\eta\|^2}{4(t-\tau)}\right) \;. \tag{22}$$

3. Existencia y unicidad de solución del problema (5)

Teorema 4 *La representación integral de la solución del problema (5) está dada por la siguiente expresión:*

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \int_D G_1(x,y,t;\xi,\eta,0)\,h(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ & - \int_0^t \frac{erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{n-1}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp\left(-\frac{\|y-\eta\|^2}{4(t-\tau)}\right)F(V(\eta,\tau))\,d\eta\right]d\tau \end{aligned} \tag{23}$$

donde la función $V = V(y,t)$, definida por $V(y,t) = u_x(0,y,t)$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}, t > 0$ (flujo de calor en la superficie $x = 0$), satisface la ecuación integral de Volterra siguiente:

$$\begin{aligned} V(y,t) = {} & \int_D G_{1x}(0,y,t;\xi,\eta,0)\,h(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ & - 2\int_0^t \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{n}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp\left(-\frac{\|y-\eta\|^2}{4(t-\tau)}\right)F(V(\eta,\tau))\,d\eta\right]d\tau \end{aligned} \tag{24}$$

en la variable $t > 0$ siendo $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ un parámetro.

Teorema 5 *Bajo las hipótesis*

$$h \in C^0(D), \quad F \in C^0(\mathbb{R}) \text{ y localmente Lipschitz en } \mathbb{R} \tag{25}$$

existe una única solución local que se puede extender globalmente en el tiempo.

Prueba. Con los datos (25) se verifican las hipótesis (H1)-(H3) y (H5)-(H8) para poder aplicar los Teoremas 1.2 [14, pp. 91] y 1.3 [14, pp. 97] a la ecuación integral (24) con lo cual se pueden obtener los resultados de la tesis. □

Observación 1 *Para los casos particulares*:

$$h(x,y) = h(x), \quad F\big(V(y,t)\big) = F\big(V(t)\big), \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n-1} \tag{26}$$

se reencuentran resultados obtenidos en [1, 17, 18] para el caso unidimensional.

Observación 2 *Recientemente se han obtenido resultados para el problema de Stefan para la ecuación del calor no- clásica unidimensional para un material semi-infinito en [2-4, 16]. También se ha estudiado la ecuación del calor no- clásica unidimensional para un material finito en [15].*

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos PIP Nº 0460 de CONICET-UA y ANPCyT PICTO Austral No. 73, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

[1] A.C. BERRONE, D.A. TARZIA, AND L.T. VILLA, *Asymptotic behavior of a non-classical heat conduction problem for a semi-infinite material*, Math. Meth. Appl. Sci., 23 (2000), pp. 1161-1177.

[2] A.C. BRIOZZO, AND D.A. TARZIA, *Existence and uniqueness for one-phase Stefan problem of a non-classical heat equation with temperature boundary condition at a fixed face*, Electron. J. Diff. Eq., 2006 No. 21 (2006), pp. 1-16.

[3] A.C. BRIOZZO, AND D.A. TARZIA, *Exact solutions for nonclassical Stefan problems*, Int. J. Diff. Eq., Vol. 2010, Article ID 868059, pp. 1-19.

[4] A.C. BRIOZZO, AND D.A. TARZIA, *A Stefan problem for a non-classical heat equation with a convective condition*, Appl. Math. Comput., 217 (2010), pp. 4051-4060.

[5] J.R. CANNON, *The one-dimensional heat equation*, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1984.

[6] J.R. CANNON, AND H.M. YIN, *A class of non-linear non-classical parabolic equations*, J. Diff. Eq., 79 (1989), pp. 266-288.

[7] H.S. CARSLAW, AND C.J. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1959.

[8] A. FRIEDMAN, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall (1964).

[9] K. GLASHOFF, AND J. SPREKELS, *An application of Glicksberg's theorem to set-valued integral equations arising in the theory of thermostats*, SIAM J. Math. Anal., 12 (1981), pp. 477-486.

[10] K. GLASHOFF, AND J. SPREKELS, *The regulation of temperature by thermostats and set-valued integral equations*, J. Integral Eq., 4 (1982), pp. 95-112.

[11] N. KENMOCHI, *Heat conduction with a class of automatic heat source controls*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 186 (1990), pp. 471-474.

[12] N. KENMOCHI, AND M. PRIMICERIO, *One-dimensional heat conduction with a class of automatic heat source controls*, IMA J. Appl. Math., 40 (1988), pp. 205-216.

[13] O.A. LADYZENSKAJA, V.A. SOLONNIKOV, AND N.N. URAL'CEVA, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, American Math. Society, Providence (1968).

[14] R.K. MILLER, *Nonlinear Volterra integral equations*, W.A. Benjamin (1971).

[15] N.N. SALVA, D.A. TARZIA, AND L.T. VILLA, *An initial-boundary value problem for the one-dimensional non-classical heat equation in a slab,* en Congreso III MACI 2011, Bahía Blanca, 9-11 Mayo 2011.

[16] D.A. TARZIA, *A Stefan problem for a non-classical heat equation*. MAT - Serie A, 3 (2001), pp. 21-26.

[17] D.A. TARZIA, AND L.T. VILLA, *Some nonlinear heat conduction problems for a semi-infinite strip with a non-uniform heat source*, Rev. Unión Mat. Argentina, 41 (1998), pp. 99-114.

[18] L.T. VILLA, *Problemas de control para una ecuación unidimensional no homogenea del calor*, Rev. Unión Mat. Argentina, 32 (1986), pp. 163-169.