# CONVERGENCIA DE CONTROLES ÓPTIMOS FRONTERA PARA INECUACIONES VARIACIONALES ELÍPTICAS

Mahdi Boukrouche[a], Claudia M. Gariboldi[b] y Domingo A. Tarzia[c]

[a] *PRES Lyon University, University of Saint-Etienne, Laboratory of Mathematics, LaMUSE EA-3989, 23 rue Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne, France. E-mail: Mahdi.Boukrouche@univ-st-etienne.fr*
[b] *Departamento de Matemática, FCEFQyN, Uni. Nac. de Río Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Río Cuarto, Argentina. E-mail:cgariboldi@exa.unrc.edu.ar*
[c] *Departamento de Matemática-CONICET, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina. E-mail: DTarzia@austral.edu.ar*

Resumen: Se considera un sistema complementario $S$ en un dominio acotado n-dimensional con condiciones de frontera mixtas y para cada $\alpha > 0$ se tiene otro sistema complementario $S_\alpha$ con diferente condición (tipo Robin) sobre una porción de la frontera del dominio. Se establece una estimación de la distancia entre la combinación convexa de las soluciones del sistema $S$, $u_3(t) = tu_{q_1} + (1-t)u_{q_2}$ para cada $q_1$, $q_2$ y la solución de la combinación convexa de los datos $u_4(t) = u_{tq_1+(1-t)q_2}$. Similarmente se prueba una análoga estimación vinculada al sistema $S_\alpha$, para cada $\alpha > 0$. Para un funcional de costo cuadrático, se considera un problema de control óptimo frontera gobernado por una inecuación variacional elíptica en relación al sistema $S$ y usando la propiedad de monotonía $u_4(t) \leq u_3(t)\ \forall t \in [0,1]$ se obtiene la unicidad del control óptimo. La misma propiedad es probada para la familia de problemas de control óptimo frontera vinculados al sistema $S_\alpha$, para cada $\alpha > 0$. Se demuestra además la convergencia, cuando $\alpha \to +\infty$, de los controles óptimos y de los estados asociados a esta familia de problemas de control frontera. Este resultado se obtiene sin el uso del estado adjunto del sistema lo cual es una ventaja respecto a la prueba dada en Gariboldi-Tarzia, Adv. in Diff. Eq. and Control Processes, 1 (2008), pp. 113-132, para sistemas gobernados por ecuaciones variacionales elípticas.

Palabras clave: *inecuaciones variacionales elípticas, control óptimo frontera, combinaciones convexas, convergencia de controles óptimos, problema de complementariedad.*
2000 AMS Subject Classification: 35R35, 35B37, 35J85, 49J20

## 1. INTRODUCCIÓN

Sea $\Omega$ un dominio abierto en $\mathbb{R}^n$ cuya frontera regular $\Gamma$ consiste de la unión de dos porciones disjuntas $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$. con $med(\Gamma_i) > 0$ para $i = 1, 2$. Se considera el siguiente problema de complementariedad:

$$u \geq 0, \quad u(-\Delta u - g) = 0, \quad -\Delta u - g \geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{1}$$

$$u = b \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1, \qquad\qquad -\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{sobre} \quad \Gamma_2 \tag{2}$$

y para el parámetro $\alpha > 0$, se considera el problema de complementariedad (1) con condiciones mixtas:

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u - b) \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \qquad\qquad -\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{sobre} \quad \Gamma_2 \tag{3}$$

donde $\alpha$ es el coeficiente de transferencia de calor sobre $\Gamma_1$, $g$ es la energía interna, $b$ es la temperatura sobre $\Gamma_1$ y $q$ es el flujo de calor sobre $\Gamma_2$. Se definen los espacios y los conjuntos convexos siguientes:

$$V = H^1(\Omega), \qquad V_0 = \{v \in V : v_{|_{\Gamma_1}} = 0\}$$

$$K = \{v \in V : v|_{\Gamma_1} = b,\, v \geq 0 \text{ en } \Omega\}, \qquad K_+ = \{v \in V : v \geq 0 \text{ en } \Omega\}.$$

Es conocido que, para una temperatura positiva $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $q \in Q = L^2(\Gamma_2)$ y $g \in H = L^2(\Omega)$, los problemas de frontera libre (1)-(2) y (1)-(3) son respectivamente equivalentes a los siguientes problemas variacionales elípticos:

$$\text{Hallar } u \in K \text{ tal que} \qquad a(u, v-u) \geq (g, v-u) - \int_{\Gamma_2} q(v-u)ds, \qquad \forall v \in K \tag{4}$$

$$\text{Hallar } u \in K_+ \text{ tal que} \qquad a_\alpha(u\,,\,v-u) \geq (g\,,\,v-u) - \int_{\Gamma_2} q(v-u)ds + \alpha \int_{\Gamma_1} b(v-u)ds \quad \forall v \in K_+ \quad (5)$$

donde

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \qquad (g,v) = \int_\Omega gv dx, \qquad a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv ds.$$

Se conoce que $a$ y $a_\alpha$ son formas bilineales, continuas, simétricas y coercivas sobre $V_0$ y $V$ [16, 17].

Sean $u_1$ y $u_2$ dos soluciones de la inecuación variacional (4) con flujo $q_1$ y $q_2$ respectivamente, se define $\forall t \in [0,1]$

$$u_3(t) = (1-t)u_1 + tu_2 \quad ; \quad u_4(t) = u_{(1-t)q_1 + tq_2}$$

.

En [4], se estableció la condición necesaria y suficiente para obtener que la combinación convexa $u_3(t)$ sea la única solución de la inecuación variacional elíptica (4) con flujo $q_3(t) = tq_1 + (1-t)q_2$, esto es:

$$u_3(t) = u_4(t) \quad \forall t \in [0,1] \quad \text{si y sólo si} \quad A = B = 0$$

con

$$A = a(u_1, u_2 - u_1) - (g, u_2 - u_1) + \int_{\Gamma_2} q_1(u_2 - u_1)\, d\gamma \geq 0,$$

$$B = a(u_2, u_1 - u_2) - (g, u_1 - u_2) + \int_{\Gamma_2} q_2(u_1 - u_2)\, d\gamma \geq 0.$$

En la Seccion 2 se establece una estimación de la distancia entre $u_3(t)$ y $u_4(t)$ en el caso en que $A$ y $B$ no sean iguales a cero y se da una propiedad de monotonía, de la cual se desprende la unicidad de los controles óptimos. De manera análoga se definen $u_{\alpha 3}(t)$ y $u_{\alpha 4}(t)$ (para cada $\alpha > 0$) y se obtienen resultados similares vinculados a la inecuación variacional elíptica (5). En [5] se consideraron problemas de control óptimo distribuido, donde la variable de control era la fuente de energía $g$.

En este trabajo se definen los funcionales de costo $J : Q \to \mathbb{R}$ y $J_\alpha : Q \to \mathbb{R}$, $\forall \alpha > 0$ [10, 12]:

$$J(q) = \frac{1}{2}\|u_q\|_H^2 + \frac{M}{2}\|q\|_Q^2, \tag{6}$$

$$J_\alpha(q) = \frac{1}{2}\|u_{\alpha q}\|_H^2 + \frac{M}{2}\|q\|_Q^2, \tag{7}$$

y se consideran los problemas de control óptimo frontera siguientes:

$$\text{Hallar} \quad q_{op} \in Q \quad \text{tal que} \quad J(q_{op}) = \min_{q \in U_{ad}} J(q), \tag{8}$$

$$\text{Hallar} \quad q_{op_\alpha} \in Q \quad \text{tal que} \quad J(q_{op_\alpha}) = \min_{q \in U_{ad}} J_\alpha(q), \tag{9}$$

donde

$$U_{ad} = \{q \in Q : q \geq 0 \ \text{ en } \Gamma_2\},$$

.

En la Sección 3 se demuestra la existencia y unicidad de los controles óptimos de los problemas (8) y (9) con una prueba diferente a la dada en [14].

En la Sección 4 se demuestra que el control óptimo $q_{op_\alpha}$ y su correspondiente estado $u_{\alpha q_{op_\alpha}}$ convergen fuertemente hacia $q_{op}$ y $u_{q_{op}}$ respectivamente, cuando $\alpha \to +\infty$, en adecuados espacios funcionales. Se resalta que no se necesita considerar el estado adjunto para los problemas (4) y (5) como en [6, 7, 13] para probar la convergencia cuando $\alpha \to +\infty$. Esta es una muy importante ventaja del presente resultado con respecto a la demostración previa dada para sistemas gobernados por ecuaciones variacionales elípticas en [7].

En los libros [2, 12] se pueden encontrar diferentes problemas de control óptimo gobernados por ecuaciones diferenciales a derivadas parciales. Algunos trabajos sobre control óptimo de sistemas gobernados por inecuaciones variacionales elípticas son [1, 3, 8, 9, 15].

## 2. ESTIMACIONES

**Lema 1** *Las funciones $u_3(t)$ y $u_4(t)$ satisfacen la siguiente estimación:*

$$m\|u_4(t)-u_3(t)\|_V^2 + tI_{14}(t) + (1-t)I_{24}(t) \leq t(1-t)(A+B)$$

*donde*

$$I_{14}(t) = a(u_1, u_4(t)-u_1) - (g, u_4(t)-u_1) + \int_{\Gamma_2} q_1(u_4(t)-u_1)\, d\gamma \geq 0$$

$$I_{24}(t) = a(u_2, u_4(t)-u_2) - (g, u_4(t)-u_2) + \int_{\Gamma_2} q_2(u_4(t)-u_2)\, d\gamma \geq 0.$$

*Más aún, se tiene la siguiente propiedad de monotonía [14]*

$$u_4(t) \leq u_3(t), \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall q_1, q_2 \in Q.$$

De manera similar, para cada $\alpha > 0$, se consideran las únicas soluciones $u_{\alpha 1}$ y $u_{\alpha 2}$ de la inecuación variacional elíptica (5) para flujos $q_1$ y $q_2$ respectivamente y se definen $\forall t \in [0,1]$:

$$u_{\alpha 3}(t) = (1-t)u_{\alpha 1} + tu_{\alpha 2} \quad ; \quad u_{\alpha 4}(t) = u_{\alpha[(1-t)q_1+tq_2]}$$

De forma análoga al Lema 1 se definen $A_\alpha$, $B_\alpha$, $I_{\alpha 14}(t)$, $I_{\alpha 24}(t)$ y se prueba el siguiente resultado:

**Lema 2** *Las funciones $u_{\alpha 3}(t)$ and $u_{\alpha 4}(t)$ satisfacen la estimación:*

$$m_\alpha\|u_{\alpha 4}(t)-u_{\alpha 3}(t)\|_V^2 + tI_{\alpha 14}(t) + (1-t)I_{\alpha 24}(t) \leq t(1-t)(A_\alpha+B_\alpha)$$

*y la propiedad de monotonía*

$$u_{\alpha 4}(t) \leq u_{\alpha 3}(t), \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall q_1, q_2 \in Q.$$

## 3. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LOS CONTROLES ÓPTIMOS

**Teorema 1** *Los funcionales de costo $J$ y $J_\alpha(\forall \alpha > 0)$ satisfacen las siguientes propiedades:*

*a) son semicontinuos inferiormente en Q débil,*

*b)* $\displaystyle\lim_{\|q\|_Q \to +\infty} J(q) = +\infty \quad ; \quad \lim_{\|q\|_Q \to +\infty} J_\alpha(q) = +\infty,$

*c) son estrictamente convexos sobre Q,*

*y por lo tanto, existen únicas soluciones $q_{op}$ y $q_{op_\alpha}$ en $Q$ de los problemas de optimización* (8) *y* (9) *respectivamente.*

*Prueba.* a) y b) Resultan usando [11],[12].

c) Sean $u = u_{q_i}$ y $u_{\alpha q_i}$ las soluciones de las inecuacionales variacionales (4) y (5) respectivamente con $q = q_i$ para $i = 1, 2$. Se deducen las siguientes igualdades:

$$\|u_3(t)\|_H^2 = t\|u_{q_1}\|_H^2 + (1-t)\|u_{q_2}\|_H^2 - t(1-t)\|u_{q_2} - u_{q_1}\|_H^2, \tag{10}$$

$$\|u_{\alpha 3}(t)\|_H^2 = t\|u_{\alpha q_1}\|_H^2 + (1-t)\|u_{\alpha q_2}\|_H^2 - t(1-t)\|u_{\alpha q_2} - u_{\alpha q_1}\|_H^2. \tag{11}$$

Luego, de la propiedad de monotonía

$$u_4(t) \leq u_3(t) \quad en \quad \Omega, \quad \forall t \in [0,1], \tag{12}$$

se deduce que

$$tJ(q_1) + (1-t)J(q_2) - J(q_3) \geq \frac{t(1-t)}{2}\left\{\|u_{q_1} - u_{q_2}\|_V^2 + M\|q_1 - q_2\|_Q^2\right\} > 0 \tag{13}$$

para todo $t \in ]0,1[$ y para todo $q_1, q_2$ en $Q$. Por lo tanto $J$ es un funcional estrictamente convexo con lo cual se tiene la unicidad del problema de control óptimo (8). La unicidad del problema de control óptimo (9) se deduce de una manera similar para cualquier $\alpha > 0$. □

## 4. CONVERGENCIA DE PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO CUANDO $\alpha \to +\infty$

En esta sección se estudia la convergencia del estado $u_{\alpha q_{op_\alpha}}$, y del control óptimo $q_{op_\alpha}$, cuando el coeficiente de transferencia de calor $\alpha$ sobre $\Gamma_1$, tiende a infinito. Para un dado $q \in Q$ fijo, se tiene primero la siguiente propiedad que generaliza la obtenida para ecuaciones variacionales en [16, 17].

**Lema 3** *Sean $u_{\alpha q}$ la única solución de la inecuación variacional* (5) *y $u_q$ la única solución de la inecuación variacional* (4)*, entonces se tiene que*

$$u_{\alpha q} \to u_q \quad en \quad V \text{ fuertemente cuando } \alpha \to +\infty \quad \forall q \in Q.$$

Ahora se da el resultado más importante del trabajo que generaliza el resultado de convergencia obtenido en [7], para inecuaciones variacionales elípticas, y sin necesidad de utilizar los estados adjuntos. Se resalta la doble dependencia del parámetro $\alpha$ en la expresión del estado del sistema $u_{\alpha q_{op_\alpha}}$ correspondiente al control óptimo $q_{op_\alpha}$.

**Teorema 2** *Sean $u_{\alpha q_{op_\alpha}}$, $g_{op_\alpha}$ y $u_{q_{op}}$, $q_{op}$ los estados y los controles óptimos definidos en los problemas* (9) *y* (8) *respectivamente. Entonces, se obtienen los comportamientos asintóticos siguientes:*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \|u_{\alpha q_{op_\alpha}} - u_{q_{op}}\|_V = 0, \quad \lim_{\alpha \to +\infty} \|q_{op_\alpha} - q_{op}\|_Q = 0. \tag{14}$$

## AGRADECIMIENTOS

Trabajo subsidiado por PIP No. 0460 de CONICET-UA y Grant FA9550-10-1-0023, Rosario, Argentina.

## REFERENCIAS

[1] K. AIT HADI, *Optimal control of the obstacle problem: optimality conditions*, IMA J. Math. Control Inform., 23 (2006), pp. 325-334.

[2] V. BARBU, *Optimal control of variational inequalities*. Research Notes in Mathematics, 100. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, 1984.

[3] M. BERGOUNIOUX, *Optimal Control of problems governed by abstract elliptic variational inequalities with state constraints*, SIAM J. Control and Optimization, 36 (1998), pp. 273-289.

[4] M. BOUKROUCHE AND D. A. TARZIA, *On a convex combination of solutions to elliptic variational inequalities*, Electro. J. Dif. Eq., 2007, No. 31 (2007), pp. 1-10.

[5] M. BOUKROUCHE AND D. A. TARZIA, *Convergencia de controles óptimos distribuidos para inecuaciones variacionales elípticas*, in Congreso II MACI 2009, MACI, 2 (2009), pp. 459-462.

[6] C.M. GARIBOLDI AND D.A. TARZIA, *Convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity*, Appl. Math. Optim., 47 (2003), pp. 213-230. Ver también, *A new proof of the convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems*, MAT - Serie A, 7 (2004), pp. 31-42.

[7] C.M. GARIBOLDI AND D.A. TARZIA, *Convergence of boundary optimal control problems with restrictions in mixed elliptic Stefan-like problems*, Adv. in Diff. Eq. and Control Processes, 1 (2008), pp. 113-132.

[8] J. HASLINGER AND T. ROUBICEK, *Optimal control of variational inequalities. Approximation Theory and Numerical Realization*, Appl. Math. Optim., 14 (1987), pp. 187-201.

[9] K. ITO AND K. KUNISCH, *Optimal control of elliptic variational inequalities*, Appl. Math. Optim., 41 (2000), pp. 343-364.

[10] S. KESAVAN AND T. MUTHUKUMAR, *Low-cost control problems on perforated and non-perforated domains*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 118 (2008), pp. 133-157.

[11] D. KINDERLEHRER AND G. STAMPACCHIA, *An introduction to variational inequalities and their applications*. Academic Press, New York, 1980.

[12] J.L. LIONS, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

[13] J.L. MENALDI AND D. A. TARZIA, *A distributed parabolic control with mixed boundary conditions.* Asymptotic Analysis, 52 (2007), pp. 227-241.

[14] F. MIGNOT, *Contrôle dans les inéquations variationelles elliptiques*, J. Functional Analysis, 22 (1976), pp. 130–185.

[15] F. MIGNOT AND J.P. PUEL, *Optimal control in some variational inequalities*, SIAM J. Control Optim., 22 (1984), pp. 466-476.

[16] E.D. TABACMAN AND D. A. TARZIA, *Sufficient and/or necessary condition for the heat transfer coefficient on $\Gamma_1$ and the heat flux on $\Gamma_2$ to obtain a steady-state two-phase Stefan problem*, J. Dif. Eq., 77 (1989), pp. 16-37.

[17] D. A. TARZIA, *Una familia de problemas que converge hacia el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*, Math. Notae, 27 (1979), pp. 157-165.