CONVERGENCIA DE CONTROLES ÓPTIMOS DISTRIBUIDOS PARA INECUACIONES VARIACIONALES ELÍPTICAS

Mahdi Bouckrouche^b y Domingo A. Tarzia[†]

^bPRES Lyon University, University of Saint-Etienne, Laboratory of Mathematics, LaMUSE EA-3989, 23 rue Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne, France. E-mail: Mahdi.Bouckrouche@univ-st-etienne.fr

[†]Departamento de Matemática-CONICET, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina. E-mail: DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Sea u_{g_i} la única solución de una inecuación variacional elíptica con fuente g_i ($i = 1, 2$). Se establece una estimación de la distancia entre $u_3(\mu) = \mu u_{g_1} + (1 - \mu)u_{g_2}$ y $u_4(\mu) = u_{\mu g_1 + (1-\mu)g_2}$ para $\mu \in [0, 1]$. Para un dado funcional de costo y usando propiedades de monotonía entre $u_3(\mu)$ y $u_4(\mu)$, se demuestra la existencia y unicidad de la solución para una familia de problemas de control distribuido, sobre la energía interna g , para cada coeficiente de transferencia de calor h .

Se demuestra también la convergencia de los controles óptimos y de los estados asociados a esta familia de problemas de control gobernados por inecuaciones variacionales elípticas, sin el uso del estado adjunto del problema lo cual es una ventaja respecto a la prueba dada en Gariboldi-Tarzia, Appl. Math. Optim., 47 (2003), 213-230 para ecuaciones variacionales elípticas.

Palabras clave: *inecuaciones variacionales elípticas, control óptimo distribuido, problema del obstáculo, problemas de frontera libre, combinaciones convexas de soluciones, convergencia de controles óptimos*

2000 AMS Subject Classification: 35R35, 35B37, 35J85, 49J20

1. INTRODUCCIÓN

Sea V un espacio de Hilbert, V' su dual topológico, K un conjunto cerrado, convexo y no vacío en V , g en V' y una forma bilineal $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es simétrica, continua y coerciva, es decir que existe una constante $m > 0$ tal que $m\|v\|^2 \leq a(v, v)$ para todo v en V . Es bien conocido [11] que para cada $g \in V'$ existe una única solución $u \in K$, de manera que

$$a(u, v - u) \geq \langle g, v - u \rangle \quad \forall v \in K, \quad (1)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la dualidad entre V' y V . Por lo tanto se puede considerar $g \mapsto u = u_g$ como una función de V' a K . Sea $u_i = u_{g_i}$ la correspondiente solución de (1) con $g = g_i$ para $i = 1, 2$. Se define para $\mu \in [0, 1]$

$$u_3(\mu) = \mu u_1 + (1 - \mu)u_2, \quad g_3(\mu) = \mu g_1 + (1 - \mu)g_2, \quad \text{y} \quad u_4(\mu) = u_{g_3(\mu)}. \quad (2)$$

En [5], se estableció la condición necesaria y suficiente para obtener que la combinación convexa $u_3(\mu)$ es la única solución de la inecuación variacional elíptica (1) con fuente $g_3(\mu)$, a saber:

$$u_4(\mu) = u_3(\mu) \quad \forall \mu \in [0, 1] \text{ si y sólo si } \alpha = \beta = 0, \quad (3)$$

con

$$\alpha := a(u_1, u_2 - u_1) - \langle g_1, u_2 - u_1 \rangle, \quad (4)$$

$$\beta := a(u_2, u_1 - u_2) - \langle g_2, u_1 - u_2 \rangle. \quad (5)$$

En la Sección 2 se establece una estimación de la distancia entre $u_3(\mu)$ y $u_4(\mu)$ en el caso en que α y β definidos por (4) y (5) no sean iguales a cero. Se obtiene la propiedad de monotonía $u_4(\mu) \leq u_3(\mu)$ $\forall \mu \in [0, 1]$ [15] para los problemas de frontera libre complementarios dados en la Sección 3.

En la Sección 3 se considera una familia de problemas de frontera libre con condiciones de contorno mixtas asociadas a casos particulares de la inecuación variacional elíptica (1). Se estudian propiedades de

dependencia de las soluciones de esta familia de inecuaciones variacionales elípticas, sobre la energía interna g , y también sobre el coeficiente de transferencia de calor h que caracteriza la ley de Newton o la condición de frontera de tipo Robin (8). Entonces para una dada constante $M > 0$ se puede considerar g como una variable de control para el funcional de costo (11), y por ende se formula el problema de control óptimo distribuido asociado a la inecuación variacional (9). Con las propiedades de dependencia, la desigualdad obtenida en la Sección 2 y usando la propiedad de monotonía entre $u_3(\mu)$ y $u_4(\mu)$, se prueba la convexidad estricta del funcional de costo y se deduce la existencia y unicidad del control óptimo g_{op} . Se formulan también la familia de problemas de control óptimo distribuido asociada a la inecuación variacional (10) la cual depende de un parámetro positivo h . Se obtienen resultados similares para el control óptimo g_{op_h} .

En la última Sección 4 se demuestra que el control óptimo g_{op_h} y su correspondiente estado $u_{g_{op_h}}$ convergen fuertemente hacia g_{op} y $u_{g_{op}}$ respectivamente, cuando $h \rightarrow +\infty$, en adecuados espacios funcionales. Se resalta que no se necesita considerar el estado adjunto para los problemas (9) y (10) como en [6, 14] para probar la convergencia cuando $h \rightarrow +\infty$. Esta es una muy importante ventaja del presente resultado con respecto a la demostración previa dada para ecuaciones variacionales elípticas en [6].

En los libros [3, 13] se pueden encontrar diferentes problemas de control óptimo distribuido gobernados por ecuaciones diferenciales a derivadas parciales. Algunos trabajos sobre control óptimo de sistemas gobernados por inecuaciones variacionales elípticas son [1, 4, 8, 9, 16].

2. ALGUNOS RESULTADOS GENERALES

En [5] se demostró la equivalencia (3). Con el objetivo de estudiar problemas de control óptimo en la Sección 3 es de gran utilidad obtener una estimación de la distancia entre $u_3(\mu)$ y $u_4(\mu)$, cuando la equivalencia (3) no se satisface.

Teorema 1 Sean u_1 y u_2 dos soluciones de la inecuación variacional (1) con fuentes g_1 y g_2 respectivamente, entonces se tiene la siguiente estimación

$$m\|u_4(\mu) - u_3(\mu)\|_V^2 + \mu I_{14}(\mu) + (1 - \mu)I_{24}(\mu) \leq \mu(1 - \mu)(\alpha + \beta), \quad \forall \mu \in [0, 1]$$

donde α y β están definidos por (4) y (5) respectivamente y

$$I_{14}(\mu) = a(u_1, u_4(\mu) - u_1) - \langle g_1, u_4(\mu) - u_1 \rangle \geq 0$$

$$I_{24}(\mu) = a(u_2, u_4(\mu) - u_2) - \langle g_2, u_4(\mu) - u_2 \rangle \geq 0.$$

3. UN PROBLEMA DEL OBSTÁCULO Y PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO

Sea Ω un dominio abierto en $\mathbb{R}^n$ con su frontera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Se supone que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, y $med(\Gamma_1) > 0$. Se considera el siguiente problema de complementariedad:

$$u \geq 0, \quad u(-\Delta u - g) = 0, \quad -\Delta u - g \geq 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

$$u = b \quad \text{on } \Gamma_1, \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (7)$$

y para el parámetro $h > 0$, se considera el problema de complementariedad (6) con condiciones de frontera mixtas:

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = h(u - b) \quad \text{on } \Gamma_1, \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (8)$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor sobre Γ_1 , g es la energía interna, b es la temperatura sobre Γ_1 , q es el flujo de calor sobre Γ_2 . Es bien conocido que la regularidad del problema mixto es problemático en el entorno de algunas partes de la frontera [7]. Recientemente, se han encontrado hipótesis suficientes sobre los datos para que la solución de problemas elípticos mixtos tengan la regularidad H^2 [2, 12].

Se definen los espacios $V = H^1(\Omega)$, $V_0 = \{v \in V : v|_{\Gamma_1} = 0\}$ y los conjuntos convexos

$$K = \{v \in V : v|_{\Gamma_1} = b, v \geq 0 \text{ in } \Omega\}, \quad K_+ = \{v \in V : v \geq 0 \text{ in } \Omega\}.$$

Es clásico que, para una temperatura positiva $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $q \in L^2(\Gamma_2)$ y $g \in H = L^2(\Omega)$, los dos problemas de frontera libre (6)-(7) y (6), (8) son respectivamente equivalentes a los siguientes problemas variacionales elípticos: Encontrar $u \in K$ de manera que

$$a(u, v - u) \geq (g, v - u) - \int_{\Gamma_2} q(v - u)ds, \quad \forall v \in K \quad (9)$$

y encontrar $u \in K_+$ de manera que

$$a_h(u, v - u) \geq (g, v - u) - \int_{\Gamma_2} q(v - u)ds + h \int_{\Gamma_1} b(v - u)ds \quad \forall v \in K_+ \quad (10)$$

donde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, \quad (g, v) = \int_{\Omega} g v dx, \quad a_h(u, v) = a(u, v) + h \int_{\Gamma_1} u v ds.$$

Es evidente que

$$\exists \lambda > 0 \quad \text{tal que } \lambda \|v\|_V^2 \leq a(v, v) \quad \forall v \in V_0.$$

Más aún [17, 18]

$$\exists \lambda_1 > 0 \quad \text{tal que } \lambda_h \|v\|_V^2 \leq a_h(v, v) \quad \forall v \in V, \text{ con } \lambda_h = \lambda_1 \min\{1, h\}$$

es decir a_h es una forma bilineal, continua, simétrica y coerciva sobre V , como lo es a .

La existencia y unicidad de solución de las dos inecuaciones variacionales (9) y (10) permiten considerar $g \mapsto u_g$ y $g \mapsto u_{gh}$ como funcionales de H a V , para cualquier $h > 0$. Sea la constante $M > 0$. Se definen los dos funcionales de costo $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ y $J_h : H \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que [10, 13]:

$$J(g) = \frac{1}{2} \|u_g\|_H^2 + \frac{M}{2} \|g\|_H^2, \quad (11)$$

$$J_h(g) = \frac{1}{2} \|u_{gh}\|_H^2 + \frac{M}{2} \|g\|_H^2, \quad (12)$$

y se considera la familia de problemas de control óptimo distribuido siguiente:

$$\text{Encontrar } g_{op} \in H \quad \text{tal que} \quad J(g_{op}) = \min_{g \in H} J(g), \quad (13)$$

$$\text{Encontrar } g_{op_h} \in H \quad \text{tal que} \quad J(g_{op_h}) = \min_{g \in H} J_h(g). \quad (14)$$

Teorema 2 *Los funcionales de costo J y J_h son funciones estrictamente convexas sobre H , y por lo tanto existen únicas soluciones g_{op} y g_{op_h} en H de los problemas (13) y (14) respectivamente.*

Prueba. Sean $u = u_{g_i}$ y $u_{g_i h}$ las soluciones de las inecuaciones variacionales (9) y (10) respectivamente con $g = g_i$ para $i = 1, 2$. Se deducen las siguientes igualdades:

$$\|u_3(\mu)\|_H^2 = \mu \|u_{g_1}\|_H^2 + (1 - \mu) \|u_{g_2}\|_H^2 - \mu(1 - \mu) \|u_{g_2} - u_{g_1}\|_H^2, \quad (15)$$

$$\|u_{3h}(\mu)\|_H^2 = \mu \|u_{g_1 h}\|_H^2 + (1 - \mu) \|u_{g_2 h}\|_H^2 - \mu(1 - \mu) \|u_{g_2 h} - u_{g_1 h}\|_H^2. \quad (16)$$

Utilizando [15] se obtiene la propiedad de monotonía

$$u_4(\mu) \leq u_3(\mu) \quad \text{en } \Omega, \quad \forall \mu \in [0, 1], \quad (17)$$

y entonces se deduce que

$$\mu J(g_1) + (1 - \mu) J(g_2) - J(g_3) \geq \frac{\mu(1 - \mu)}{2} \{ \|u_{g_1} - u_{g_2}\|_V^2 + M \|g_1 - g_2\|_H^2 \} > 0 \quad (18)$$

para todo $\mu \in]0, 1[$ y para todo g_1, g_2 en H . Por lo tanto J es un funcional estrictamente convexo con lo cual se tiene la unicidad del problema de control óptimo (13). La unicidad del problema de control óptimo (14) se deduce de una manera similar para cualquier $h > 0$. $\square$

4. CONVERGENCIA DE PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO CUANDO $h \rightarrow +\infty$

En esta última sección se estudia la convergencia del estado $u_{g_{op_h}h}$, y del control óptimo g_{op_h} , cuando el coeficiente de transferencia de calor h sobre Γ_1 , tiende a infinito. Para un dado $g \in H$ fijado, se tiene primero la siguiente propiedad que generaliza la obtenida para ecuaciones variacionales en [17, 18].

Lema 1 Sean u_{g_h} la única solución de la inecuación variacional (10) y u_g la única solución de la inecuación variacional (9), entonces se tiene que

$$u_{g_h} \rightarrow u_g \quad \text{en } V \text{ fuertemente cuando } h \rightarrow +\infty \quad \forall g \in H.$$

Ahora se da el resultado más importante del trabajo que generaliza el resultado de convergencia obtenido en [6], para inecuaciones variacionales elípticas, y sin necesidad de utilizar los estados adjuntos. Se resalta la doble dependencia del parámetro h en la expresión del estado del sistema $u_{g_{op_h}h}$ correspondiente al control óptimo g_{op_h} .

Teorema 3 Sean $u_{g_{op_h}h}$, g_{op_h} y $u_{g_{op}}$, g_{op} los estados y los controles óptimos definidos en los problemas (14) y (13) respectivamente. Entonces, se obtienen los comportamientos asintóticos siguientes:

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \|u_{g_{op_h}h} - u_{g_{op}}\|_V = 0, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \|g_{op_h} - g_{op}\|_H = 0. \quad (19)$$

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue realizado mientras el segundo autor fue visitante de la Univ. de Saint Etienne (Francia) y parcialmente subsidiado por el proyecto PIP No. 0460 de CONICET-UA, Rosario (Argentina).

REFERENCIAS

- [1] K. AIT HADI, *Optimal control of the obstacle problem: optimality conditions*, IMA J. Math. Control Inform., 23 (2006), pp. 325-334.
- [2] A. AZZAM AND E. KREYSZIG, *On solutions of elliptic equations satisfying mixed boundary conditions*, SIAM J. Math. Anal., 13(1982), pp. 254-262.
- [3] V. BARBU, *Optimal control of variational inequalities*. Research Notes in Mathematics, 100. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, 1984.
- [4] M. BERGOUNIOUX, *Optimal Control of problems governed by abstract elliptic variational inequalities with state constraints*, SIAM J. Control and Optimization, 36, No.1 (1998), pp. 273-289.
- [5] M. BOUKROUCHE AND D. A. TARZIA, *On a convex combination of solutions to elliptic variational inequalities*, Electro. J. Dif. Eq., 2007, No. 31 (2007), pp. 1-10
- [6] C.M. GARIBOLDI AND D.A. TARZIA, *Convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity*, Appl. Math. Optim. 47 (3) (2003), pp. 213-230.
- [7] P. GRISVARD, *Elliptic problems in non-smooth domains*, Pitman, London, 1985.
- [8] J. HASLINGER AND T. ROUBICEK, *Optimal control of variational inequalities. Approximation Theory and Numerical Realization*, Appl. Math. Optim., 14 (1987), pp. 187-201.
- [9] K. ITO AND K. KUNISCH, *Optimal control of elliptic variational inequalities*, Appl. Math. Optim., 41 (2000), pp. 343-364.
- [10] S. KESAVAN AND T. MUTHUKUMAR, *Low-cost control problems on perforated and non-perforated domains*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 118 (1) (2008), pp. 133-157.
- [11] D. KINDERLEHRER AND G. STAMPACCHIA, *An introduction to variational inequalities and their applications*. Academic Press, New York, 1980.
- [12] L. LANZANI, L. CAPOGNA AND R.M. BROWN, *The mixed problem in L^p for some two-dimensional Lipschitz domains*, Math. Annalen, 342 (2008), pp. 91-124.
- [13] J.L. LIONS, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.
- [14] J.L. MENALDI AND D. A. TARZIA, *A distributed parabolic control with mixed boundary conditions*. Asymptotic Analysis, 52 (2007), pp. 227-241.
- [15] F. MIGNOT, *Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques*, J. Functional Analysis, 22 (2) (1976), pp. 130-185.
- [16] F. MIGNOT AND J.P. PUEL, *Optimal control in some variational inequalities*, SIAM J. Control Optim., 22 (3) (1984), pp. 466-476.
- [17] E.D. TABACMAN AND D. A. TARZIA, *Sufficient and/or necessary condition for the heat transfer coefficient on Γ_1 and the heat flux on Γ_2 to obtain a steady-state two-phase Stefan problem*, J. Dif. Eq., 77 (1) (1989), pp. 16-37.
- [18] D. A. TARZIA, *Una familia de problemas que converge hacia el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*, Math. Notae, 27 (1979), pp. 157-165.