CONTROL ÓPTIMO SIMULTÁNEO PARA UNA CLASE DE INECUACIONES HEMIVARIACIONALES ELÍPTICAS

Carolina M. Bollo[(1)], Claudia M. Gariboldi[(1)] y Domingo A. Tarzia[(2)(3)]

[(1)] *Depto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Río Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Río Cuarto, Argentina.*
cbollo@exa.unrc.edu.ar; cgariboldi@exa.unrc.edu.ar
[(2)] *Depto. Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.*
[(3)] *CONICET, Argentina. DTarzia@austral.edu.ar*

Resumen: En este trabajo, se estudian problemas de control óptimo simultáneo distribuido-frontera sobre la energía interna y el flujo de calor para un sistema gobernado por una clase de inecuaciones hemivariacionales frontera elíptica dependientes de un parámetro. El sistema ha sido originado por un problema estacionario de conducción de calor con una condición de frontera subdiferencial multivaluada no monótona en una porción de la frontera del dominio descripto por el gradiente generalizado de Clarke de una función localmente Lipschitz. Se prueba un resultado de existencia para los problemas de control óptimo simultáneo distribuido-frontera. Se muestra un resultado de comportamiento asintótico para los controles óptimos y los estados del sistema para ambos problemas de control óptimo, cuando el parámetro, coeficiente de transferencia de calor, tiende a infinito en una parte de la frontera.

Palabras clave: *Inecuación hemivariacional elíptica; problemas de control óptimo simultáneo; comportamiento asintótico; gradiente generalizado de Clarke; problemas elípticos mixtos.*
2020 AMS Subject Classification: 35A15, 35J20, 35Q79, 49J20.

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^d$ cuya frontera regular Γ consiste en la unión de tres porciones disjuntas Γ_i, $i = 1, 2, 3$ con $|\Gamma_i| > 0$, donde $|\Gamma_i|$ denota la medida de Hausdorff $(d-1)$-dimensional de la porción Γ_i en Γ. Se formula el siguiente problema clásico estacionario de conducción de calor con condiciones de frontera mixtas:

$$-\Delta u = g \text{ en } \Omega, \qquad u\big|_{\Gamma_1} = 0, \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q, \qquad u\big|_{\Gamma_3} = b, \tag{1}$$

donde u es la temperatura en Ω, g es la energía interna en Ω, b es la temperatura sobre Γ_3 y q es el flujo de calor sobre Γ_2, que satisfacen las hipótesis: $g \in H = L^2(\Omega)$, $q \in Q = L^2(\Gamma_2)$ y $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$.

De manera estándar, se obtiene la siguiente formulación variacional de (1), [11]:

$$\text{hallar } u_\infty \in K \text{ tal que } a(u_\infty, v) = L(v) \text{ para todo } v \in K_0 \tag{2}$$

donde

$$V = H^1(\Omega), \qquad V_0 = \{v \in V \mid v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\},$$

$$K = \{v \in V \mid v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1,\ v = b \text{ sobre } \Gamma_3\}, \qquad K_0 = \{v \in V \mid v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_3\},$$

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \, \nabla v \, dx, \quad L(v) = \int_\Omega g v \, dx - \int_{\Gamma_2} q v \, d\Gamma.$$

Ahora, se considera el problema mixto con valores no lineales en la frontera para una ecuación elíptica, recientemente estudiado en [2, 4], de la siguiente manera:

$$-\Delta u = g \text{ en } \Omega, \qquad u\big|_{\Gamma_1} = 0, \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q, \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_3} \in \alpha \, \partial j(u). \tag{3}$$

Aquí, α es una constante positiva que se puede considerar como el coeficiente de transferencia de calor, mientras que la función $j\colon \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamada superpotencial (potencial no convexo), es tal que $j(x, \cdot)$ es localmente Lipschitz en c.t.p $x \in \Gamma_3$ y no necesariamente diferenciable. Dado que en general $j(x, \cdot)$ no es convexa, es que la condición multivaluada en Γ_3 en el problema (3) se describe mediante una relación no

monótona expresada por el gradiente generalizado de Clarke [1]. Tal relación multivaluada en el problema (3) se cumple en ciertos tipos de problemas estacionarios de conducción de calor (el comportamiento de una membrana semipermeable de espesor finito, problemas de control de temperatura, etc.). Además, el problema (3) puede ser considerado como un prototipo de varios modelos de frontera semipermeable, los cuales están motivados por problemas que surgen en hidráulica, problemas de flujo de fluidos a través de medios porosos y electrostática, donde la solución representa la presión y los potenciales eléctricos.

Bajo la notación anterior, la formulación débil del problema elíptico (3) se convierte en la siguiente inecuación hemivariacional frontera elíptica [2]:

$$\text{hallar } \ u \in V_0 \ \text{ tal que } \ a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_3} j^0(u;v)\, d\Gamma \geq L(v) \ \text{ para todo } \ v \in V_0. \tag{4}$$

Aquí y en lo que sigue se omitirá la variable x y simplemente se escribirá $j(r)$ en lugar de $j(x,r)$.

Se destaca que la teoría de las inecuaciones hemivariacionales y variacionales ha sido propuesta en 1980s por Panagiotopoulos, ver [8, 9], como formulaciones variacionales de clases importantes de problemas en mecánica. En los últimos años se han investigado nuevos tipos de inecuaciones variacionales, hemivariacionales y variacionales-hemivariacionales, ver monografías recientes [6, 10], y la teoría ha surgido hoy como una nueva e interesante rama de la matemática aplicada.

Se formulan los siguientes problemas de control óptimo:

- Un problema de control óptimo simultáneo distribuido-frontera Neumann, dado por [2, 3, 12]:

$$\text{hallar} \quad (\overline{g},\overline{q}) \in H \times Q \quad \text{tal que} \quad J(\overline{g},\overline{q}) = \min_{(g,q)\in H\times Q} J(g,q) \tag{5}$$

  con

$$J(g,q) = \frac{1}{2}||u_{gq} - z_d||_H^2 + \frac{M_1}{2}||g||_H^2 + \frac{M_2}{2}||q||_Q^2 \tag{6}$$

  donde u_{gq} es la única solución de la ecuación variacional (2), $z_d \in H$ dado y M_1 y M_2 son constantes positivas dadas.

- Para cada $\alpha > 0$, el siguiente problema de control óptimo simultáneo distribuido-frontera Neumann

$$\text{hallar} \quad (\overline{g}_\alpha,\overline{q}_\alpha) \in H \times Q \quad \text{tal que} \quad J_\alpha(\overline{g}_\alpha,\overline{q}_\alpha) = \min_{(g,q)\in H\times Q} J_\alpha(g,q) \tag{7}$$

  con

$$J_\alpha(g,q) = \frac{1}{2}||u_{\alpha gq} - z_d||_H^2 + \frac{M_1}{2}||g||_H^2 + \frac{M_2}{2}||q||_Q^2 \tag{8}$$

  donde $u_{\alpha gq}$ es una solución a la inecuación hemivariacional (4), $z_d \in H$ es dado y M_1 y M_2 son constantes positivas.

Este paper está estructurado de la siguiente manera. En la Sección 2, se establecen conceptos preliminares de la teoría de las inecuaciones hemivariacionales. En la Sección 3, para cada $\alpha > 0$, se obtiene un resultado de existencia de la solución del problema de control óptimo simultáneo distribuido-frontera (7). En la Sección 4, se obtiene la convergencia fuerte de una sucesión de controles óptimos y estados del sistema de los problemas (7) al único control óptimo y estado del sistema del problema (5), cuando el parámetro α tiende a infinito.

2. Preliminares

Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach reflexivo, X^* su dual, y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la dualidad entre X^* y X. Para una función de valores reales definida en X, se tienen las siguientes definiciones [1, Sección 2.1] y [6].

Una función $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ se dice que es localmente Lipschitz, si para cada $x \in X$ existe U_x un entorno de x y una constante $L_x > 0$ tal que $|\varphi(y) - \varphi(z)| \leq L_x\|y - z\|_X$ para todo $y, z \in U_x$.

Para tal función, la derivada direccional generalizada (Clarke) de φ en el punto $x \in X$ en la dirección $v \in X$ está definida por

$$\varphi^0(x;v) = \limsup_{y \to x,\, \lambda \to 0^+} \frac{\varphi(y+\lambda v) - \varphi(y)}{\lambda}.$$

El gradiente generalizado (subdiferencial) de φ en x es un subconjunto del espacio dual X^* dado por

$$\partial\varphi(x) = \{\zeta \in X^* \mid \varphi^0(x;v) \geq \langle \zeta, v\rangle \text{ para todo } v \in X\}.$$

Se consideran las siguientes hipótesis.

$\underline{H(j)}$: $j\colon \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que

(a) $j(\cdot, r)$ es medible para todo $r \in \mathbb{R}$,

(b) $j(x, \cdot)$ es localmente Lipschitz en c.t.p $x \in \Gamma_3$,

(c) existe c_0, $c_1 \geq 0$ tal que $|\partial j(x,r)| \leq c_0 + c_1|r|$ para todo $r \in \mathbb{R}$, c.t.p $x \in \Gamma_3$,

(d) $j^0(x, r; b - r) \leq 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$, c.t.p $x \in \Gamma_3$ con una constante $b \in \mathbb{R}$.

Notar que, resultados de existencia de inecuaciones hemivariacionales elípticas se pueden encontrar en varias contribuciones, ver [5, 6, 7]. En [2, Teorema 4], la hipótesis $H(j)$(d) se considera para obtener la existencia de una solución al problema (4). Además, bajo esta condición los autores han estudiado el comportamiento asintótico cuando $\alpha \to \infty$ (ver [2, Teorema 7]).

3. Existencia de controles óptimos simultáneos

Es conocido, por [3], que existe un único par óptimo $(\overline{g}, \overline{q}) \in H \times Q$ del problema de control óptimo simultáneo (5). Aquí, de manera similar a [4], se obtiene un resultado de existencia de solución al problema de control óptimo simultáneo (7) cuyo sistema está gobernado por la inecuación hemivariacional (4).

Teorema 1 *Para cada $\alpha > 0$, si $H(j)(a) - (d)$ se verifican, entonces el problema de control óptimo simultáneo distribuido-frontera (7) gobernado por la inecuación hemivariacional (4) tiene solución.*

Prueba. Se presenta un esquema de la prueba. Por definición, para cada $\alpha > 0$, el funcional J_α está acotado inferiormente. Luego, para cada $\alpha > 0$ y cada $(g, q) \in H \times Q$, si se denota por $T_\alpha(g, q)$ al conjunto de soluciones de (4), se tiene que

$$m = \inf\{J_\alpha(g,q), (g,q) \in H \times Q, u_{\alpha g q} \in T_\alpha(g,q)\} \geq 0. \tag{9}$$

Para cada $\alpha > 0$, sea $(g_n^\alpha, q_n^\alpha) \in H \times Q$ con $n \in \mathbb{N}$ una sucesión minimizante para (9). Se prueba que existen $f_\alpha \in H$, $\xi_\alpha \in Q$ y $\eta_\alpha \in V_0$ tales que, cuando $n \to \infty$

$$u_{\alpha g_n^\alpha q_n^\alpha} \rightharpoonup \eta_\alpha \quad \text{en} \quad V_0, \qquad g_n^\alpha \rightharpoonup f_\alpha \quad \text{en} \quad H \qquad \text{y} \qquad q_n^\alpha \rightharpoonup \xi_\alpha \quad \text{en} \quad Q.$$

Ahora, para cada $\alpha > 0$ y para todo $(g_n^\alpha, q_n^\alpha) \in H \times Q$, se obtiene que $\eta_\alpha \in V_0$ es una solución de la inecuación hemivariacional (4). Luego, se tiene $\eta_\alpha = u_{\alpha f_\alpha \xi_\alpha}$, donde $u_{\alpha f_\alpha \xi_\alpha}$ es una solución de la inecuación hemivariacional (4) para los datos $f_\alpha \in H$ y $\xi_\alpha \in Q$, para cada $\alpha > 0$. Finalmente, por la semicontinuidad inferior débil de J_α, se tiene que $m \geq J_\alpha(f_\alpha, \xi_\alpha)$ y (f_α, ξ_α) es un par óptimo para el problema de control óptimo simultáneo distribuido-frontera (7). □

4. Comportamiento asintótico de los controles óptimos simultáneos

En esta sección se prueba el siguiente resultado de convergencia cuando el parámetro $\alpha \to \infty$.

Teorema 2 *Se asume $H(j)$ y (H_1). Si $(\overline{g}_\alpha, \overline{q}_\alpha)$ es una solución óptima del problema de control óptimo simultáneo distribuido- frontera Neumann (7) y $(\overline{g}, \overline{q})$ es la única solución del problema de control óptimo simultáneo (5), entonces $(\overline{g}_\alpha, \overline{q}_\alpha) \to (\overline{g}, \overline{q})$ en $H \times Q$ fuertemente y $u_{\alpha \overline{g}_\alpha \overline{q}_\alpha} \to u_{\infty \overline{g}\,\overline{q}}$ en V fuertemente, cuando $\alpha \to \infty$.*

Prueba. Se presenta un esquema de la prueba. Para cada $\alpha > 0$, usando que $(\overline{g}_\alpha, \overline{q}_\alpha)$ es una solución óptima del problema (7), se prueba que existen $\eta \in V$, $h \in H$ y $p \in Q$ tales que, cuando $\alpha \to \infty$

$$u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha} \rightharpoonup \eta \text{ en } V, \quad \overline{g}_\alpha \rightharpoonup h \text{ en } H, \quad \overline{q}_\alpha \rightharpoonup p \text{ en } Q. \tag{10}$$

Luego, teniendo en cuenta que $\eta \in V_0$, porque $\{u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha}\} \subset V_0$ y V_0 es secuencialmente débilmente cerrado en V, por (4), $H(j)$(d) y la semicontinuidad inferior débil de $V \ni v \mapsto a(v,v) \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$\eta \in K \text{ satisface } a(\eta, v) = L(v) \text{ para todo } v \in K_0,$$

es decir, $\eta \in K$ es una solución del problema (2). Por la unicidad de solución del problema (2), se tiene que $\eta = u_{\infty hp}$ y por lo tanto $u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha} \rightharpoonup u_{\infty hp}$ en V, cuando $\alpha \to \infty$. Ahora, por la definición de J, J_α y la semicontinuidad inferior débil de estos funcionales, se prueba que

$$J(h,p) \leq J(g,q), \quad \forall (g,q) \in H \times Q$$

y de la unicidad del problema de control óptimo (5), se obtiene que $h = \overline{g}$ y $p = \overline{q}$, por lo tanto $u_{\infty hp} = u_{\infty\overline{g}\,\overline{q}}$. Luego, se tiene que, cuando $\alpha \to \infty$

$$\overline{g}_\alpha \rightharpoonup \overline{g} \text{ en } H, \qquad \overline{q}_\alpha \rightharpoonup \overline{q} \text{ en } Q \quad \text{y} \quad u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha} \rightharpoonup u_{\infty\overline{g}\,\overline{q}} \text{ en } V.$$

Ahora, por (4), se obtiene

$$m_a \left\| u_{\infty\overline{g}\,\overline{q}} - u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha} \right\|_V^2 \leq a(u_{\infty\overline{g}\,\overline{q}}, u_{\infty\overline{g}\,\overline{q}} - u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha}) + L(u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha} - u_{\infty\overline{g}\,\overline{q}})$$

y utilizando la continuidad débil de $a(u_{\infty\overline{g}\,\overline{q}}, \cdot)$, la compacidad del operador traza y teniendo en cuenta que $u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha} \to u_{\infty\overline{g}\,\overline{q}}$ en H, se concluye que $u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha} \to u_{\infty\overline{g}\,\overline{q}}$ en V, cuando $\alpha \to \infty$. Finalmente, de $u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha} \to u_{\infty\overline{g}\,\overline{q}}$ en H, se deduce que

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{2} ||u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha} - z_d||_H^2 = \frac{1}{2} ||u_{\infty\overline{g}\,\overline{q}} - z_d||_H^2. \tag{11}$$

Luego, cuando $\alpha \to \infty$, se obtiene que $||\overline{g}_\alpha||_H^2 \to ||\overline{g}||_H^2$ y $||\overline{q}_\alpha||_Q^2 \to ||\overline{q}||_Q^2$ y como $\overline{g}_\alpha \rightharpoonup \overline{g}$ en H y $\overline{q}_\alpha \rightharpoonup \overline{q}$ en Q, se deduce que $\overline{g}_\alpha \to \overline{g}$ en H y $\overline{q}_\alpha \to \overline{q}$ en Q. Esto completa la prueba. □

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos European Union's Horizon 2020 Research and Innovation Programme under the Marie Sklodowska-Curie grant agreement 823731 CONMECH y PIP No. 0275 de CONICET-Universidad Austral, Rosario, Argentina para el tercer autor, y por el Proyecto PPI No. 18/C555 de SECyT-UNRC, Río Cuarto, Argentina para la primera y segunda autoras.

REFERENCIAS

[1] F. H. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley, Interscience, New York (1983).

[2] C. M. Gariboldi, S. Migórski, A. Ochal, D. A. Tarzia, Existence, comparison, and convergence results for a class of elliptic hemivariational inequalities, Applied Mathematics and Optimization, 84 (Suppl 2) (2021), S1453-S1475.

[3] C. M Gariboldi, D. A. Tarzia, Existence, uniqueness and convergence of simultaneous distributed-boundary optimal control problems, Control and Cybernetics, 44 (2015), 5-17.

[4] C. M Gariboldi, D. A. Tarzia, Distributed optimal control problems for a class of elliptic hemivariational inequalities with a parameter and its asymptotic behavior, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 104 No.106027 (2022), 1-9.

[5] S. Migórski, A. Ochal, A unified approach to dynamic contact problems in viscoelasticity, J. Elasticity, 83 (2006), 247-275.

[6] S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems, Springer, New York (2013).

[7] S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, A class of variational-hemivariational inequalities in reflexive Banach spaces, J. Elasticity, 127 (2017), 151-178.

[8] P.D. Panagiotopoulos, Inequality Problems in Mechanics and Applications, Birkhäuser, Boston (1985).

[9] P. D. Panagiotopoulos, Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering, Springer, Berlin (1993).

[10] M. Sofonea, S. Migórski, Variational-Hemivariational Inequalities with Applications, CRC Press, Boca Raton (2018).

[11] D.A. Tarzia, Sur le problème de Stefan à deux phases, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 288 (1979), 941-944.

[12] F. Trölstzsch, Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications, American Math. Soc., Providence, 2010.