ANÁLISIS NUMÉRICO DE UNA FAMILIA DE PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO SIMULTÁNEO DISTRIBUIDO-FRONTERA

Carolina M. Bollo[1], Claudia M. Gariboldi[1] y Domingo A. Tarzia[2,3]

[1]*Depto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Río Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Río Cuarto, Argentina.*
cbollo@exa.unrc.edu.ar; cgariboldi@exa.unrc.edu.ar
[2]*Depto. Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.*
[3]*CONICET, Argentina. DTarzia@austral.edu.ar*

Resumen: En este trabajo, se considera una familia de problemas de control óptimo simultáneo (P_α) sobre la energía interna y el flujo de calor para un sistema gobernado por una ecuación variacional elíptica dependiente de un parámetro $\alpha > 0$ definido sobre una porción de la frontera y un problema de control óptimo simultáneo (P) gobernado también por una ecuación variacional elíptica con una condición de frontera Dirichlet en la misma porción de la frontera. Se formulan aproximaciones discretas $(P_{h\alpha})$ y (P_h) de los problemas de control óptimo (P_α) y (P) respectivamente, para cada $\alpha > 0$ y para cada $h > 0$ por el método de los elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1 con parámetro h. El objetivo de este trabajo es estudiar la convergencia de esta familia de problemas de control óptimo simultáneo discretos $(P_{h\alpha})$ cuando el parámetro α tiende a infinito y el parámetro h tiende a cero simultáneamente.

Palabras clave: *Control óptimo simultáneo, problemas elípticos, análisis numérico, método de elementos finitos.*
2020 AMS Subject Classification: 35J88, 35R35, 49J40, 49J45, 65K15, 65N30.

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^d$ cuya frontera regular Γ consiste en la unión de dos porciones disjuntas Γ_i, $i = 1, 2$, con $|\Gamma_i| > 0$, donde $|\Gamma_i|$ denota la medida de Hausdorff $(d-1)$-dimensional sobre la porción Γ_i en Γ. Se formulan los siguientes problemas estacionarios de conducción de calor:

$$-\Delta u = g \text{ en } \Omega, \qquad u\big|_{\Gamma_1} = b, \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q, \tag{1}$$

$$-\Delta u = g \text{ en } \Omega, \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha(u-b), \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q, \tag{2}$$

donde u es la temperatura en Ω, g es la energía interna en Ω, $b = const. > 0$ es la temperatura sobre Γ_1 para el sistema (1) y la temperatura del entorno externo de Γ_1 para el sistema (2), q es el flujo de calor sobre Γ_2 y $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia de calor en Γ_1, que satisfacen: $g \in H = L^2(\Omega)$ y $q \in Q = L^2(\Gamma_2)$.

De manera estándar, se obtienen las siguientes formulaciones variacionales de (1) y (2), [4]:

$$\text{hallar } u \in K \text{ tal que } a(u,v) = L(v) \text{ para todo } v \in V_0, \tag{3}$$

$$\text{hallar } u_\alpha \in V \text{ tal que } a_\alpha(u_\alpha,v) = L_\alpha(v) \text{ para todo } v \in V. \tag{4}$$

donde

$$V = H^1(\Omega), \quad V_0 = \{v \in V / v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\}, \quad K = \{v \in V / v = b \text{ sobre } \Gamma_1\} = b + V_0,$$
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \, \nabla v \, dx, \quad L(v) = \int_\Omega gv\,dx - \int_{\Gamma_2} qv\,d\Gamma,$$
$$a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv\,d\Gamma, \quad L_\alpha(v) = L(v) + \alpha \int_{\Gamma_1} bv\,d\Gamma,$$

Se consideran los siguientes problemas de control óptimo continuo [3, 8]:

(P) Un problema de control óptimo simultáneo distribuido-frontera Neumann, dado por:

$$\text{hallar } (\overline{g},\overline{q}) \in H \times Q \text{ tal que } J((\overline{g},\overline{q})) = \min_{(g,q)\in H\times Q} J(g,q) \text{ con} \tag{5}$$

$$J(g,q) = \frac{1}{2}||u_{gq} - z_d||_H^2 + \frac{M_1}{2}||g||_H^2 + \frac{M_2}{2}||q||_Q^2 \tag{6}$$

donde u_{gq} es la única solución de la ecuación variacional (3) para $g \in H$ y $q \in Q$, $z_d \in H$ y M_1 y M_2 constantes positivas dadas.

(P_α) Para cada $\alpha > 0$, el problema de control óptimo simultáneo distribuido-frontera Neumann:

$$\text{hallar} \quad (\overline{g}_\alpha, \overline{q}_\alpha) \in H \times Q \quad \text{tal que} \quad J_\alpha(\overline{g}_\alpha, \overline{q}_\alpha) = \min_{(g,q)\in H\times Q} J_\alpha(g,q) \quad \text{con} \tag{7}$$

$$J_\alpha(g,q) = \frac{1}{2}||u_{\alpha gq} - z_d||_H^2 + \frac{M_1}{2}||g||_H^2 + \frac{M_2}{2}||q||_Q^2 \tag{8}$$

donde $u_{\alpha gq}$ es una solución a la ecuación variacional (4) para $g \in H$, $q \in Q$ y $\alpha > 0$, $z_d \in H$ y M_1 y M_2 constantes positivas dadas.

En relación con los problemas de control óptimo simultáneo (5) y (7), se definen los estados adjuntos, como las únicas soluciones de las ecuaciones variacionales [3]:

$$\text{hallar } \ p_{gq} \in V_0 \ \text{ tal que } \ a(p_{gq}, v) = (u_{gq} - z_d, v)_H \ \text{ para todo } \ v \in V_0, \tag{9}$$

$$\text{hallar } \ p_{\alpha gq} \in V \ \text{ tal que } \ a_\alpha(p_{\alpha gq}, v) = (u_{\alpha gq} - z_d, v)_H \ \text{ para todo } \ v \in V. \tag{10}$$

El límite de los problemas de control óptimo (7) cuando $\alpha \to +\infty$ fue estudiado en [3] y se probó que:

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \left\| u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha} - u_{\overline{g}\,\overline{q}} \right\|_V = 0, \quad \lim_{\alpha\to+\infty} \left\| p_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha} - p_{\overline{g}\,\overline{q}} \right\|_V = 0, \quad \lim_{\alpha\to+\infty} \|(\overline{g}_\alpha, \overline{q}_\alpha) - (\overline{g}, \overline{q})\|_{H\times Q} = 0$$

donde la norma en $H \times Q$ es definida por:

$$||(g,q)||_{H\times Q} = (||g||_H^2 + ||q||_Q^2)^{1/2}, \quad \forall (g.q) \in H \times Q.$$

Se considera el método de elementos finitos y un dominio poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con una triangulación regular con triángulos de Lagrange de tipo 1, constituido por elementos finitos afines equivalentes de clase C^0, siendo h el parámetro de aproximación que tiende a cero [1, 2]. Luego, se discretizan las ecuaciones variacionales elípticas para los estados del sistema (3) y (4), para los estados adjuntos (9) y (10), y los funcionales costo (6) y (8). En general, la solución de un problema elíptico mixto de frontera pertenece a $H^r(\Omega)$ con $1 < r \leq 3/2 - \epsilon$ ($\epsilon > 0$), pero existen ejemplos cuyas soluciones pertenecen $H^r(\Omega)$ con $2 \leq r$.

El objetivo de este trabajo es estudiar el análisis numérico de los resultados de convergencia correspondientes a los problemas continuos de control óptimo (5) y (7) cuando $\alpha \to +\infty$. Además, el siguiente diagrama conmutativo, que relaciona los problemas mixtos continuos de control óptimo (P_α) y (P) con los problemas discretos de control óptimo $(P_{h\alpha})$ y (P_h), se obtiene tomando los límites $h \to 0^+$, $\alpha \to +\infty$ y $(h,\alpha) \to (0^+, +\infty)$ como sigue:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{array}{c}\textbf{Problem } (\boldsymbol{P_\alpha}) \\ (\overline{g}_\alpha,\overline{q}_\alpha),\ u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha},\ p_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha}\end{array} \arrow[r, "\alpha\to+\infty"] & \begin{array}{c}\textbf{Problem } (\boldsymbol{P}) \\ (\overline{g},\overline{q}),\ u_{\overline{g}\,\overline{q}},\ p_{\overline{g}\,\overline{q}}\end{array} \\
\begin{array}{c}(\overline{g}_{h\alpha},\overline{q}_{h\alpha}),\ u_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}},\ p_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}} \\ \textbf{Problem } (\boldsymbol{P_{h\alpha}})\end{array} \arrow[u, "h\to0^+"'] \arrow[ur, "(h,\alpha)\to(0^+,+\infty)"'] \arrow[r, "\alpha\to+\infty"] & \begin{array}{c}(\overline{g}_h,\overline{q}_h),\ u_{h\overline{g}_h\overline{q}_h},\ p_{h\overline{g}_h\overline{q}_h}\\ \textbf{Problem } (\boldsymbol{P_h})\end{array} \arrow[u, "h\to0^+"']
\end{tikzcd}$$

donde $(\overline{g}_h, \overline{q}_h)$, $u_{h\overline{g}_h\overline{q}_h}$ y $p_{h\overline{g}_h\overline{q}_h}$ son el control óptimo, estado del sistema y estado adjunto del problema discreto de control óptimo (P_h) para cada $h > 0$, y $(\overline{g}_{h\alpha}, \overline{q}_{h\alpha})$, $u_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}}$ y $p_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}}$ son el control óptimo, estado del sistema y estado adjunto del problema discreto de control óptimo $(P_{h\alpha})$ para cada $h > 0$ y $\alpha > 0$, respectivamente.

2. Discretización por el método de elementos finitos

En esta sección se considera el método de elementos finitos, siendo h el parámetro de aproximación que se puede tomar igual al lado más largo de los triángulos $T \in \tau_h$ y se aproximan V, V_0 y K por:

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega})/v_h|_T \in P_1(T), \forall T \in \tau_h \right\}, \quad V_{0h} = \{ v_h \in V_h / v_h = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \}, \quad K_h = b + V_{0h}$$

donde P_1 es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 1. Sea $\pi_h : C^0(\bar{\Omega}) \to V_h$ el operador de interpolación lineal correspondiente. Entonces existe una constante $c_0 > 0$ (independiente de h) tal que $\forall v \in H^r(\Omega)$, $1 < r \leq 2$, [1]:

$$\|v - \pi_h(v)\|_H \leq c_0 h^r \|v\|_r \quad \|v - \pi_h(v)\|_V \leq c_0 h^{r-1} \|v\|_r.$$

Los funcionales de costo discretos $J_h, J_{h\alpha} : H \times Q \to \mathbb{R}_0^+$ se definen por:

$$J_h(g,q) = \frac{1}{2} \|u_{hgq} - z_d\|_H^2 + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2$$

$$J_{h\alpha}(g,q) = \frac{1}{2} \|u_{h\alpha gq} - z_d\|_H^2 + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2.$$

donde u_{hgq} y $u_{h\alpha gq}$ son las soluciones de las siguientes ecuaciones variacionales elípticas discretas [5, 6, 7]:

$$u_{hgq} \in K_h : \quad a(u_{hgq}, v_h) = (g, v_h)_H - (q, v_h)_Q, \quad \forall v_h \in V_{0h}, \tag{11}$$

$$u_{h\alpha gq} \in V_h : \quad a_\alpha(u_{h\alpha gq}, v_h) = (g, v_h)_H - (q, v_h)_Q + \alpha \int_{\Gamma_1} b v_h d\gamma, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{12}$$

Los problemas de control óptimo discretos consisten en encontrar $(\overline{g}_h, \overline{q}_h), (\overline{g}_{h\alpha}, \overline{q}_{h\alpha}) \in H \times Q$ tal que:

$$\text{Problema } (P_h): \quad J_h(\overline{g}_h, \overline{q}_h) = \min_{(g,q) \in H \times Q} J_h(g,q), \tag{13}$$

$$\text{Problema } (P_{h\alpha}): \quad J_{h\alpha}(\overline{g}_{h\alpha}, \overline{q}_{h\alpha}) = \min_{(g,q) \in H \times Q} J_{h\alpha}(g,q) \tag{14}$$

y sus correspondientes estados adjuntos discretos p_{hgq} y $p_{h\alpha gq}$ se definen como:

$$p_{hgq} \in V_{0h} : \quad a(p_{hgq}, v_h) = (u_{hgq} - z_d, v_h)_H, \quad \forall v_h \in V_{0h} \tag{15}$$

$$p_{h\alpha gq} \in V_h : \quad a_\alpha(p_{h\alpha gq}, v_h) = (u_{h\alpha gq} - z_d, v_h)_H, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{16}$$

Lema 1 *(i) Para todo $(g,q) \in H \times Q$, $b > 0$ sobre Γ_1, existen únicas soluciones $u_{hgq} \in K_h$ y $p_{hgq} \in V_{0h}$ de las ecuaciones variacionales elípticas (11) y (15) respectivamente, y $u_{h\alpha gq} \in V_h$ y $p_{h\alpha gq} \in V_h$ de las ecuaciones variacionales elípticas (12) y (16), respectivamente.*

(ii) Existe un único control óptimo $(\overline{g}_h, \overline{q}_h) \in H \times Q$ y $(\overline{g}_{h\alpha}, \overline{q}_{h\alpha}) \in H \times Q$ que satisfacen los problemas de optimización (13) y (14), respectivamente.

Teorema 1 *(i) Para cada $\alpha > 0$, se considera que los estados del sistema y los estados adjuntos continuos tienen las regularidades $u_{\overline{g}\,\overline{q}}, u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha}, p_{\overline{g}\,\overline{q}}, p_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha} \in H^r(\Omega)$ $(1 < r \leq 2)$. Se tienen los siguientes límites, $\forall \alpha > 1$:*

$$\lim_{h \to 0^+} \|(\overline{g}_h, \overline{q}_h) - (\overline{g}, \overline{q})\|_{H \times Q} = 0 \tag{17}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \left\|u_{h\overline{g}_h\overline{q}_h} - u_{\overline{g}\,\overline{q}}\right\|_V = 0, \quad \lim_{h \to 0^+} \left\|p_{h\overline{g}_h\overline{q}_h} - p_{\overline{g}\,\overline{q}}\right\|_V = 0 \tag{18}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \|(\overline{g}_{h\alpha}, \overline{q}_{h\alpha}) - (\overline{g}_\alpha, \overline{q}_\alpha)\|_{H \times Q} = 0$$

$$\lim_{h \to 0^+} \left\|u_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}} - u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha}\right\|_V = 0, \quad \lim_{h \to 0^+} \left\|p_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}} - p_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha}\right\|_V = 0.$$

(i) Para cada $h > 0$, se tienen los siguientes límites:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} ||(\overline{g}_{h\alpha}, \overline{q}_{h\alpha}) - (\overline{g}_h, \overline{q}_h)||_{H \times Q} = 0.$$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} ||u_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}} - u_{h\overline{g}_h\overline{q}_h}||_V = 0, \quad \lim_{\alpha \to +\infty} ||p_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}} - p_{h\overline{g}_h\overline{q}_h}||_V = 0.$$

3. Doble convergencia de los problemas discretos de control óptimo $(P_{h\alpha})$ a (P) cuando $(h,\alpha)\to(0^+,+\infty)$

Teorema 2 *Se tienen los siguientes límites:*

$$\lim_{(h,\alpha)\to(0^+,+\infty)} ||(\overline{g}_{h\alpha},\overline{q}_{h\alpha})-(\overline{g},\overline{q})||_{H\times Q}=0. \tag{19}$$

$$\lim_{(h,\alpha)\to(0^+,+\infty)} ||u_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}}-u_{\overline{g}\,\overline{q}}||_V=0, \qquad \lim_{(h,\alpha)\to(0^+,+\infty)} ||p_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}}-p_{\overline{g}\,\overline{q}}||_V=0, \tag{20}$$

con estimaciones de error del tipo h^{r-1}.

Prueba. Se presenta un esquema de la prueba. Se obtiene que las sucesiones $(\overline{g}_{h\alpha},\overline{q}_{h\alpha})$, $u_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}}$ y $p_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}}$ están acotadas independientemente de h y α. Por lo tanto, cuando $(h,\alpha)\to(0^+,+\infty)$

$$\exists f\in H\ :\ \overline{g}_{h\alpha}\rightharpoonup f \text{ en } H,\quad \exists\rho\in Q\ :\ \overline{q}_{h\alpha}\rightharpoonup\rho \text{ en } Q,$$

$$\exists\eta\in V\ :\ u_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}}\rightharpoonup\eta \text{ en } V(\text{en } H \text{ fuerte}),\quad \exists\xi\in V\ :\ p_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}}\rightharpoonup\xi \text{ en } V(\text{en } H \text{ fuerte}),$$

cuando $\alpha\to+\infty$

$$\exists f_h\in H\ :\ \overline{g}_{h\alpha}\rightharpoonup f_h \text{ en } H,\quad \exists\rho_h\in Q\ :\ \overline{q}_{h\alpha}\rightharpoonup\rho_h \text{ en } Q,$$

$$\exists\eta_h\in V\ :\ u_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}}\rightharpoonup\eta_h \text{ en } V(\text{en } H \text{ fuerte}),\quad \exists\xi_h\in V\ :\ p_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}}\rightharpoonup\xi_h \text{ en } V(\text{en } H \text{ fuerte})$$

cuando $h\to 0^+$

$$\exists f_\alpha\in H\ :\ \overline{g}_{h\alpha}\rightharpoonup f_\alpha \text{ en } H,\quad \exists\rho_\alpha\in Q\ :\ \overline{q}_{h\alpha}\rightharpoonup\rho_\alpha \text{ en } Q,$$

$$\exists\eta_\alpha\in V\ :\ u_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}}\rightharpoonup\eta_\alpha \text{ en } V(\text{en } H \text{ fuerte}),\quad \exists\xi_\alpha\in V\ :\ p_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}\overline{q}_{h\alpha}}\rightharpoonup\xi_\alpha \text{ en } V(\text{en } H \text{ fuerte}),$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\eta=\eta_h=b$ sobre Γ_1, $\xi=\xi_h=0$ sobre Γ_1, por unicidad de solución de los problemas $(P_{h\alpha})$, (P_h), (P_α) y (P) y unicidad de solución de las ecuaciones variacionales elípticas correspondientes, se obtiene que

$$\eta_h=u_{hf_h\rho_h}=u_{h\overline{g}_h\overline{q}_h},\quad \xi_h=p_{hf_h\rho_h}=p_{h\overline{g}_h\overline{q}_h},\quad f_h=\overline{g}_h,\quad \rho_h=\overline{q}_h$$

$$\eta_\alpha=u_{\alpha f_\alpha\rho_\alpha}=u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha},\quad \xi_\alpha=p_{\alpha f_\alpha\rho_\alpha}=p_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha},\quad f_\alpha=\overline{g}_\alpha,\quad \rho_\alpha=\overline{q}_\alpha$$

y los límites (17) y (18). A continuación, siguiendo [3], se tiene que

$$\lim_{\alpha\to+\infty}||f_\alpha-\overline{g}||_H=0,\quad \lim_{\alpha\to+\infty}||\rho_\alpha-\overline{q}||_Q=0\quad \lim_{\alpha\to+\infty}||\eta_\alpha-u_{\overline{g}\,\overline{q}}||_V=0,\quad \lim_{\alpha\to+\infty}||\xi_\alpha-p_{\overline{g}\,\overline{q}}||_V=0$$

y por lo tanto, los límites dobles (19) y (20) se tienen, cuando $(h,\alpha)\to(0^+,+\infty)$. □

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido parcialmente subsidiado por el Proyecto European Union's Horizon 2020 Research and Innovation Programme under the Marie Sklodowska-Curie grant agreement 823731 CONMECH para el tercer autor y por el Proyecto PPI No. 18/C555 de SECyT-UNRC, Río Cuarto, Argentina para la primera y segunda autoras.

Referencias

[1] Brenner S. - Scott L.R., *The mathematical theory of finite element methods*, Springer, New York, (2008).

[2] Ciarlet P.G., *The finite element method for elliptic problems*, SIAM, Philadelphia, (2002).

[3] Gariboldi C.M. - Tarzia D.A., *Existence, uniqueness and convergence of simultaneous distributed-boundary optimal control problems*, Control and Cybernetics, 44 (2015), 5-17.

[4] Tarzia D.A., *Sur le problème de Stefan à deux phases*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 288 (1979), 941-944.

[5] Tarzia D.A., *Numerical analysis of a mixed elliptic problem with flux and convective boundary conditions to obtain a discrete solution of non-constant sign*, Numer. Meth. PDE, 15 (1999), 355-369.

[6] Tarzia D.A., *A commutative diagram among discrete and continuous boundary optimal control problems*, Adv. Diff. Eq. Control Processes, 14 (2014), 23-54.

[7] Tarzia D.A., *Double convergence of a family of discrete distributed mixed elliptic optimal control problems with a parameter*, in Proceedings of the 27th IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization, CSMO 2015, IFIP AICT 494, L. Bociu and J.-A. Desideri and A. Habbal (Eds.), Springer, Berlin (2016), 493-504.

[8] Trölstzsch F., *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications*, American Math. Soc., Providence, (2010).