Matemática Aplicada, Computacional e Industrial

MACI

Vol. 8

2021

Trabajos presentados al VIII MACI 2021

Proceedings of VIII MACI 2021

La Plata, 3 al 7 de mayo de 2021

asa maci

ASOCIACION ARGENTINA DE MATEMATICA APLICADA COMPUTACIONAL E INDUSTRIAL

Control Óptimo Frontera Neumann para ecuaciones Variacionales Parabólicas y Elípticas

Carolina M. Bollo†, Claudia M. Gariboldi† y Domingo A. Tarzia(1)(2)

†Depto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Río Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Río Cuarto, Argentina.
cbollo@exa.unrc.edu.ar; cgariboldi@exa.unrc.edu.ar
(1)Depto. Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.
(2)CONICET, Argentina. DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Se considera un problema de conducción del calor S con condiciones de frontera mixtas en un dominio n-dimensional Ω con frontera regular y una familia de problemas S_α, donde $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia del calor sobre una porción de la frontera Γ_1. Se formulan problemas de control óptimo *frontera Neumann* sobre el flujo del calor q. Se obtiene existencia y unicidad de los controles óptimos, se dan las condiciones de optimalidad de primer orden en términos del estado adjunto y se prueba convergencia fuerte de los controles óptimos, los estados del sistema y estados adjuntos cuando α tiende a infinito. Además, en relación a los problemas S y S_α y a problemas elípticos mixtos P y P_α se formulan problemas particulares de control óptimo *frontera* para un parámetro real λ. Se encuentra una forma explícita para los controles óptimos, se prueban propiedades de monotonía y se obtienen resultados de convergencia cuando el parámetro tiempo tiende a infinito.

Palabras clave: *Ecuaciones variacionales, Control óptimo, Condición de optimalidad, Convergencia.*
2020 AMS Subject Classification: 35A15, 35J20, 35Q79, 49J20.

1. Introducción

Siguiendo [3, 6, 7], se estudian algunos problemas de control óptimo frontera Neumann parabólicos y elípticos. Se considera un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^n$, cuya frontera regular Γ consiste en la unión de dos porciones disjuntas Γ_1 y Γ_2 con $|\Gamma_1| > 0$ y $|\Gamma_2| > 0$. Se denota con $|\Gamma_i| = med(\Gamma_i)$ (para $i = 1, 2$), la medida Hausdorff $(n-1)$-dimensional de Γ. Sea un intervalo de tiempo $[0, T]$, para algún $T > 0$. Se presentan los siguientes problemas de conducción del calor S y S_α (para cada parámetro $\alpha > 0$) respectivamente, con condiciones de frontera mixtas [6, 7]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \ \text{ en } \Omega \qquad u\big|_{\Gamma_1} = b \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} = q \qquad u(0) = v_b \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \ \text{ en } \Omega \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_1} = \alpha(u-b) \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} = q \qquad u(0) = v_b \tag{2}$$

donde u es la temperatura en $\Omega \times (0, T)$, g es la energía interna en Ω, b es la temperatura sobre Γ_1 para (1) y la temperatura del entorno externo de Γ_1 para (2), $v_b = b$ sobre Γ_1, q es el flujo de calor sobre Γ_2 y $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia del calor sobre Γ_1, que satisfacen las hipótesis: $g \in \mathcal{H} = L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $q \in \mathcal{Q} = L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$, $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ y $v_b \in H^1(\Omega)$.

Sean u y u_α las únicas soluciones de los problemas (1) y (2), cuyas formulaciones variacionales son ([6]):

$$\begin{cases} u - v_b \in L^2(0, T; V_0), \qquad u(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V_0') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{u}(t), v\rangle + a(u(t), v) = L(t, v), \quad \forall v \in V_0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u_\alpha \in L^2(0, T; V), \qquad u_\alpha(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{u}_\alpha \in L^2(0, T; V') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{u}_\alpha(t), v\rangle + a_\alpha(u_\alpha(t), v) = L_\alpha(t, v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{4}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la paridad entre un espacio funcional (V ó V_0) y su espacio dual (V' ó V_0') y

$$V = H^1(\Omega)\,; \qquad V_0 = \{v \in V : v\big|_{\Gamma_1} = 0\}\,; \qquad Q = L^2(\Gamma_2); \quad H = L^2(\Omega)$$

$$(g, h)_H = \int_\Omega gh\,dx; \quad (q, \eta)_Q = \int_{\Gamma_2} q\eta\,d\gamma; \quad a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx; \quad a_\alpha(u, v) = a(u, v) + \alpha\int_{\Gamma_1} uv d\gamma$$

$$L(t, v) = (g(t), v)_H - (q(t), v)_Q; \quad L_\alpha(t, v) = L(t, v) + \alpha\int_{\Gamma_1} bv d\gamma.$$

Sea $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$, con norma $||.||_{\mathcal{H}}$ y producto interno $(g,h)_{\mathcal{H}} = \int_0^T (g(t),h(t))_H dt$, y el espacio $\mathcal{Q} = L^2(0,T;Q)$, con norma $||.||_{\mathcal{Q}}$ y producto interno $(q,\eta)_{\mathcal{Q}} = \int_0^T (q(t),\eta(t))_Q dt$.

Si se denota por u_q y $u_{\alpha q}$ las únicas soluciones de los problemas (3) y (4) respectivamente, se formulan los siguientes problemas de control óptimo *frontera* sobre el flujo de calor q, [3, 5, 8]:

$$\text{hallar} \quad \overline{q} \in \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J(\overline{q}) = \min_{q\in\mathcal{Q}} J(q), \tag{5}$$

$$\text{hallar} \quad \overline{q}_\alpha \in \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J_\alpha(\overline{q}_\alpha) = \min_{q\in\mathcal{Q}} J_\alpha(q), \tag{6}$$

donde los funcionales costo J y J_α están dados por:

$$\text{i)}\ J(q) = \frac{1}{2}\|u_q - z_d\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{M}{2}\|q\|^2_{\mathcal{Q}}, \qquad \text{ii)}\ J_\alpha(q) = \frac{1}{2}\|u_{\alpha q} - z_d\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{M}{2}\|q\|^2_{\mathcal{Q}} \tag{7}$$

con $z_d \in \mathcal{H}$ dado y M una constante positiva.

Ahora, para $q_0 \in \mathcal{Q}$ fijo, se define $\mathcal{Q}_0 = \{\lambda q_0 : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{Q}$, y se formulan los siguientes problemas de control óptimo *parabólico frontera Neumann real*, para cada $T > 0$ y $\alpha > 0$:

$$\text{hallar} \quad \overline{\lambda}(T) \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad H_T(\overline{\lambda}(T)) = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} H_T(\lambda), \tag{8}$$

$$\text{hallar} \quad \overline{\lambda}_\alpha(T) \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad H_{\alpha T}(\overline{\lambda}_\alpha(T)) = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} H_{\alpha T}(\lambda), \tag{9}$$

donde $H_T(\lambda) = J(\lambda q_0)$ y $H_{\alpha T}(\lambda) = J_\alpha(\lambda q_0)$.

También, se consideran los problemas elípticos mixtos P y P_α, para cada $\alpha > 0$, estudiados en [3, 4], cuyas ecuaciones variacionales están dadas por

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V_0,\ u \in K \tag{10}$$

$$a_\alpha(u_\alpha, v) = L_\alpha(v), \quad \forall v \in V,\ u_\alpha \in V \tag{11}$$

con $K = v_0 + V_0$ para $v_0 = b$ en Γ_1 dado. Para $q_0^* \in Q$ fijo, se define $Q_0 = \{\lambda q_0^* : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset Q$, y se formulan los siguientes problemas de control óptimo *elíptico frontera Neumann real*, para cada $\alpha > 0$:

$$\text{hallar} \quad \overline{\lambda} \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad H(\overline{\lambda}) = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} H(\lambda), \tag{12}$$

$$\text{hallar} \quad \overline{\lambda}_\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad H_\alpha(\overline{\lambda}_\alpha) = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} H_\alpha(\lambda), \tag{13}$$

donde $H(\lambda) = J^*(\lambda q_0^*)$ y $H_\alpha(\lambda) = J_\alpha^*(\lambda q_0^*)$, con $J^* : Q \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_\alpha^* : Q \to \mathbb{R}_0^+$ dados en [3]:

$$\text{i)}\ J^*(q) = \frac{1}{2}\|u_{\infty q} - z_d\|^2_H + \frac{M}{2}\|q\|^2_Q, \qquad \text{ii)}\ J_\alpha^*(q) = \frac{1}{2}\|u_{\infty\alpha q} - z_d\|^2_H + \frac{M}{2}\|q\|^2_Q$$

con $u_{\infty q}$ y $u_{\infty\alpha q}$ son las únicas soluciones de la ecuaciones variacionales (10) y (11) respectivamente, $z_d \in H$ es dado y M es una constante positiva.

En [3], los autores estudiaron problemas de control óptimo frontera sobre el flujo de calor q en problemas elípticos y se probaron resultados de existencia, unicidad y comportamiento asintótico de las soluciones óptimas, cuando α tiende a infinito. En [6], resultados de convergencia fueron probados para problemas parabólicos de conducción del calor en relación a problemas de control óptimo sobre la energía interna g. Problemas de control óptimo parabólico con condiciones de frontera Robin han sido considerados en [1, 2, 3, 4, 6]. En el presente trabajo, en la Sección 2, se considera un problema de control óptimo frontera Neumann sobre el flujo del calor q para (1),(5) y (7i) y problemas de control óptimo frontera Neumann sobre el flujo del calor q para (2), (6) y (7ii), para cada $\alpha > 0$. Se obtienen resultados de existencia y unicidad de los controles óptimos y se dan las condiciones de optimalidad de primer orden. Además, para q fijo, se obtienen resultados de convergencia para los estados del sistema, estados adjuntos y controles óptimos, cuando α tiende a infinito. En la Sección 3, para los problemas de control óptimo frontera Neumann real (8), (9), (12) y (13) se encuentran soluciones explícitas para los controles óptimos $\overline{\lambda}(t)$, $\overline{\lambda_\alpha}(t)$, $\overline{\lambda}$ y $\overline{\lambda_\alpha}$, respectivamente y se prueban propiedades de monotonía. Finalmente, en la Sección 4, resultados de convergencia de las soluciones de los problemas (3) a la solución del problema (10) son obtenidos, cuando t tiende a infinito.

2. Problemas de Control Óptimo Frontera para los Sistemas S y S_α

En esta sección se obtiene existencia y unicidad de los controles óptimos frontera $\overline{q}$ y $\overline{q}_\alpha$, se dan las condiciones de optimalidad en términos de los estados adjuntos, para los problemas de control óptimo (5) y (6), respectivamente y se enuncian resultados de convergencia.

Se definen el estado adjunto p_q correspondiente al sistema (1) para cada $q \in \mathcal{Q}$, como la única solución del siguiente sistema parabólico mixto:

$$-\frac{\partial p_q}{\partial t} - \Delta p_q = u_q - z_d \text{ en } \Omega, \qquad p_q\Big|_{\Gamma_1} = 0, \qquad \frac{\partial p_q}{\partial n}\Bigg|_{\Gamma_2} = 0, \qquad p_q(T) = 0,$$

y el estado adjunto $p_{\alpha q}$ correspondiente a (2) para cada $q \in \mathcal{Q}$, como la única solución de

$$-\frac{\partial p_{\alpha q}}{\partial t} - \Delta p_{\alpha q} = u_{\alpha q} - z_d \text{ en } \Omega, \ -\frac{\partial p_{\alpha q}}{\partial n}\Bigg|_{\Gamma_1} = \alpha p_{\alpha q}, \ \frac{\partial p_{\alpha q}}{\partial n}\Bigg|_{\Gamma_2} = 0, \ p_{\alpha q}(T) = 0 \qquad \text{para cada } \alpha > 0.$$

Siguiendo [5, 6, 8], se da el siguiente resultado cuya prueba es omitida.

Lema 1 *a) Existe un único control óptimo $\overline{q} \in \mathcal{Q}$ tal que $J(\overline{q}) = \min_{q\in\mathcal{Q}} J(q)$. Además, la condición de optimalidad para el problema (5) es: $M\overline{q} - p_{\overline{q}} = 0$ en $\mathcal{Q}$.*

b) Existe un único control óptimo $\overline{q}_\alpha \in \mathcal{Q}$ tal que $J_\alpha(\overline{q}_\alpha) = \min_{q\in\mathcal{Q}} J_\alpha(q)$, y la condición de optimalidad para el problema de control óptimo (6) es: $M\overline{q}_\alpha - p_{\alpha\overline{q}_\alpha} = 0$ en $\mathcal{Q}$.

A continuación se enuncian resultados de convergencia cuando α tiende a infinito.

Proposición 1 *Para cada $q \in Q$ fijo, cuando $\alpha \to \infty$,*

i) $u_{\alpha q} \to u_q$ fuerte en $L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ y $\dot{u}_{\alpha q} \to \dot{u}_q$ fuerte en $L^2(0,T;V_0')$.

ii) $p_{\alpha q} \to p_q$ fuerte en $L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ y $\dot{p}_{\alpha q} \to \dot{p}_q$ fuerte en $L^2(0,T;V_0')$.

Teorema 2 *Sean $\overline{q}$ y $\overline{q}_\alpha$ las únicas soluciones de los problemas de control óptimo (5) y (6), respectivamente. Entonces, se tiene $\overline{q}_\alpha \to \overline{q}$ fuerte en $\mathcal{Q}$, cuando $\alpha \to \infty$. Además, los estados del sistema y los estados adjuntos satisfacen $(u_{\alpha\overline{q}_\alpha}, \dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}) \to (u_{\overline{q}}, \dot{u}_{\overline{q}})$ y $(p_{\alpha\overline{q}_\alpha}, \dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha}) \to (p_{\overline{q}}, \dot{p}_{\overline{q}})$ fuerte en $L^2(0,T;V) \times L^2(0,T;V_0')$.*

3. Problemas de Control Óptimo Frontera Neumann Real

En esta sección, se dan soluciones explícitas para los problemas de control óptimo (8), (9), (12) y (13) y se enuncian propiedades de monotonía.

Teorema 3 *a) Para cada $T > 0$, si se toma $q = \lambda q_0$ para $q_0 \in \mathcal{Q}$ fijo $(q_0 \neq 0)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:*

i) Existe una única solución $\overline{\lambda}(T) \in \mathbb{R}$ al problema (8), la cual viene dada por:

$$\overline{\lambda}(T) = -\frac{\int_0^T \int_\Omega u_{q_0}(t)(u_b(t)+u_g(t)-z_d(t))dxdt}{M\int_0^T \int_{\Gamma_2} q_0^2(t)d\gamma dt + \int_0^T \int_\Omega u_{q_0}^2(t)dxdt}.$$

donde u_{q_0} es la única solución de (3) para $q = q_0$ y $b = g = 0$, u_b y u_g son las únicas soluciones de (3) para $q = g = 0$ y $b = q = 0$, respectivamente.

ii) Para cada $\alpha > 0$, existe una única solución $\overline{\lambda}_\alpha(T) \in \mathbb{R}$ al problema (9), que viene dada por:

$$\overline{\lambda}_\alpha(T) = -\frac{\int_0^T \int_\Omega u_{\alpha q_0}(t)(u_{\alpha b}(t)+u_{\alpha g}(t)-z_d(t))dxdt}{M\int_0^T \int_{\Gamma_2} q_0^2(t)d\gamma dt + \int_0^T \int_\Omega u_{\alpha q_0}^2(t)dxdt}.$$

donde $u_{\alpha q_0}$ es la única solución de (4) para $q = q_0$ y $b = g = 0$, $u_{\alpha b}$ y $u_{\alpha g}$ son las únicas soluciones de (4) para $q = g = 0$ y $b = q = 0$, respectivamente.

b) Si se considera $q = \lambda q_0^*$ para $q_0^* \in Q$ fijo $(q_0^* \neq 0)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

i) Existe una única solución $\overline{\lambda}_\infty \in \mathbb{R}$ al problema (12), que es

$$\overline{\lambda}_\infty = -\frac{\int_\Omega u_{\infty q_0^*}(u_{\infty b}+u_{\infty g}-z_d)dx}{M\int_{\Gamma_2}(q_0^*)^2 d\gamma + \int_\Omega u_{\infty q_0^*}^2 dx}$$

donde $u_{\infty q_0^*}$ es la única solución de (10) para $q = q_0^*$ y $b = g = 0$, $u_{\infty b}$ y $u_{\infty g}$ son las únicas soluciones de (10) para $q = g = 0$ y $b = q = 0$, respectivamente.

ii) Para cada $\alpha > 0$, existe una única solución $\overline{\lambda}_\alpha \in \mathbb{R}$ al problema (13), esta es

$$\overline{\lambda}_{\infty\alpha} = -\frac{\int\limits_\Omega u_{\infty\alpha q_0^*}(u_{\infty\alpha b}+u_{\infty\alpha g}-z_d)dx}{M\int\limits_{\Gamma_2}(q_0^*)^2 d\gamma + \int\limits_\Omega u^2_{\infty\alpha q_0^*}dx}.$$

donde $u_{\infty\alpha q_0^*}$ es la única solución de (11) para $q = q_0^*$ y $b = g = 0$, $u_{\infty\alpha b}$ y $u_{\infty\alpha g}$ son las únicas soluciones de (11) para $q = g = 0$ y $b = q = 0$, respectivamente.

Proposición 4 *a) Sean $q_1 = \lambda_1 q_0$ y $q_2 = \lambda_2 q_0$ ($q_0 > 0$), con $\lambda_2 \le \lambda_1$ y $g_1 \le g_2$ entonces $u_{b\lambda_1 g_1} \le u_{b\lambda_2 g_2}$.*

b) Para cada $\alpha > 0$, si $q_1 = \lambda_1 q_0$ y $q_2 = \lambda_2 q_0$ ($q_0 > 0$), con $\lambda_2 \le \lambda_1$, $g_1 \le g_2$, $b_1 \le b_2$ en Γ_1 y condición inicial $v_{b_1} \le v_{b_2}$ entonces $u_{\alpha b_1\lambda_1 g_1} \le u_{\alpha b_2\lambda_2 g_2}$.

c) Sean $q_1 = \lambda_1 q_0^*$ y $q_2 = \lambda_2 q_0^*$ ($q_0^* > 0$), con $\lambda_2 \le \lambda_1$ y $g_1 \le g_2$ entonces $u_{\infty b\lambda_1 g_1} \le u_{\infty b\lambda_2 g_2}$.

d) Para cada $\alpha > 0$, si $q_1 = \lambda_1 q_0^*$ y $q_2 = \lambda_2 q_0^*$ ($q_0^* > 0$), con $\lambda_2 \le \lambda_1$, $g_1 \le g_2$, $b_1 \le b_2$ sobre Γ_1 entonces $u_{\alpha b_1\lambda_1 g_1} \le u_{\alpha b_2\lambda_2 g_2}$.

4. Comportamiento Asintótico de las Soluciones cuando $\mathbf{t} \to +\infty$

En esta sección, se estudia la convergencia de las soluciones de los problemas (3) para los datos fijos $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $q \in \mathcal{Q}$ y $g \in \mathcal{H}$ a la solución del problema (10) para igual dato $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, con $q \in Q$ y $g \in H$ fijos, cuando $t \to +\infty$. Aquí, por simplicidad, se denota por u_∞ a la única solución de la ecuación variacional (10) para los datos $q_\infty \in Q$ y $g_\infty \in H$.
Si se define $F_1(t) = e^{\lambda_0 t}||g(t) - g_\infty||^2_H$, $F_2(t) = e^{\lambda_0 t}||\gamma_0||^2||q(t) - q_\infty||^2_Q$ con $g \in \mathcal{H}$ y $q \in \mathcal{Q}$, se prueba el siguiente teorema.

Teorema 5 *Si $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $q \in \mathcal{Q}$, $g \in \mathcal{H}$, $F_1 \in L^1(0,\infty)$ y $F_2 \in L^1(0,\infty)$, entonces*

$$||u_{bqg}(t) - u_\infty||^2_H \le ||u_{bqg}(0) - u_\infty||^2_H e^{-\lambda_0 t} + \frac{2e^{-\lambda_0 t}}{\lambda_0}\left(||F_1||_{L^1(0,\infty)} + ||F_2||_{L^1(0,\infty)}\right)$$

y por lo tanto $\lim\limits_{t\to+\infty} u_{bqg}(t) = u_\infty$ en H fuerte (exponencialmente).

Prueba. Se dará sólo una idea de la prueba. Si se toma $v = w(t) = u_{bqg}(t) - u_\infty$, en las ecuaciones variacionales (3) y (10) respectivamente, se obtiene $\langle \dot{w}(t), w(t)\rangle + a(w(t), w(t)) = \langle L(t) - L_\infty, w(t)\rangle$. Entonces, $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||^2_H + \frac{\lambda_0}{2}||w(t)||^2_H \le \frac{1}{\lambda_0}\left(||g(t) - g_\infty||^2_H + ||\gamma_0||^2||q(t) - q_\infty||^2_Q\right)$. Si se llama $F(t) = ||g(t) - g_\infty||^2_H + ||\gamma_0||^2||q(t) - q_\infty||^2_Q$, se tiene $\frac{d}{dt}\left(||w(t)||^2_H e^{\lambda_0 t}\right) \le \frac{2}{\lambda_0}F(t)e^{\lambda_0 t}$. Luego, integrando entre 0 y t, se deduce $||w(t)||^2_H \le ||w(0)||^2_H e^{-\lambda_0 t} + \frac{2e^{-\lambda_0 t}}{\lambda_0}\int_0^t F(\tau)e^{\lambda_0\tau}d\tau$, y la tesis se sigue. □

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos PIP No. 0275 de CONICET–UA, Rosario, Argentina y por European Union's Horizon 2020 Research and Innovation Programme under the Marie Sklodowska-Curie grant agreement 823731 CONMECH, para la segunda y tercer autores; por el Proyecto ANPCyT PICTO Austral 2016 No. 0090 para el tercer autor y por el Proyecto PPI No. 18/C555 de SECyT-UNRC, Río Cuarto, Argentina para la primera y segunda autoras.

Referencias

[1] Ben Belgacem F. - El Fekih H. - Raymond J. P., *A penalized Robin approach for solving a parabolic equation with nonsmooth Dirichlet boundary conditions*, Asymptotic Anal. 34, 121–136 (2003).

[2] Boukrouche M. - Tarzia D. A., *Convergence of optimal control problems governed by second kind parabolic variational inequalities*, J. Control Theory Appl. 11, 422-427 (2013).

[3] Gariboldi C. M. - Tarzia D. A., *Convergence of boundary optimal control problems with restrictions in mixed elliptic Stefan-like problems*, Adv. in Diff. Eq. and Control Processes, 1(2), 113-132 (2008).

[4] Gariboldi C. M. - Tarzia D. A., *Existence, uniqueness and convergence of simultaneous distributed-boundary optimal control problems*, Control and Cybernetics, 44, 5-17 (2015).

[5] Lions J.L., *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris (1968).

[6] Menaldi J. - Tarzia D. A., *A distributed parabolic control with mixed boundary conditions*, Asymptotic Analisys 52, 227-241 (2007).

[7] Tarzia D. A. - Bollo C. M. - Gariboldi C. M., *Convergence of simultaneous distributed-boundary parabolic optimal control problems*, Evolution Equations and Control Theory, 9(4), 1187-1201 (2020).

[8] Trölstzsch F., *Optimal control of partial differetnial equations. Theory, methods and applications*, American Math. Soc., Providence (2010).