MACI 2019

Vol. 7

VII CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA, COMPUTACIONAL E INDUSTRIAL

Luis R. Ceballos, Claudia M. Gariboldi y Bruno A. Roccia (Eds.)

Río Cuarto, Córdoba, Argentina
8 al 10 de Mayo de 2019

CONVERGENCIA DE CONTROLES ÓPTIMOS SIMULTÁNEOS DISTRIBUIDO-FRONTERA EN PROBLEMAS PARABÓLICOS

Carolina M. Bollo[†], Claudia M. Gariboldi[†] y Domingo A. Tarzia[‡]

[†] *Dpto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Río Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Río Cuarto, Argentina.*
cbollo@exa.unrc.edu.ar, cgariboldi@exa.unrc.edu.ar
[‡]*Dpto. Matemática - CONICET, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.*
DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Se considera un problema evolutivo de conducción del calor P con condiciones de frontera mixtas en un dominio n-dimensional Ω con frontera regular y una familia de problemas P_α, donde $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia del calor sobre una porción de la frontera Γ_1. En relación a los estados del sistema, se formulan problemas de control óptimo simultáneos *distribuido-frontera* sobre la energía interna g y el flujo del calor q. Se obtiene existencia y unicidad de los controles óptimos, se dan las condiciones de optimalidad de primer orden en términos del estado adjunto y se prueba convergencia fuerte de los controles óptimos, los estados adjuntos y estados del sistema, cuando el coeficiente de transferencia del calor α tiende a infinito.

Palabras clave: *Ecuaciones variacionales parabólicas, Control óptimo simultáneo, Existencia y unicidad, Condiciones de optimalidad. Comportamiento asintótico.*
2000 AMS Subject Classification: 35K15, 35K20, 35R35, 49J20, 49K20.

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^n$, cuya frontera regular Γ consiste de la unión de dos porciones disjuntas Γ_1 y Γ_2 con $med(\Gamma_1) > 0$ y $med(\Gamma_2) > 0$. Se denota con $med(\Gamma_i)$ (para $i = 1, 2$), la medida Hausdorff $(n-1)$-dimensional de Γ. Sea un intervalo de tiempo $[0, T]$, para algún $T > 0$. Se presentan los siguientes problemas evolutivos de conducción del calor P y P_α (para cada parámetro $\alpha > 0$) respectivamente, con condiciones de frontera mixtas (se indica con $u(t)$ a $u(\cdot, t)$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \ \text{ en } \Omega \qquad u\big|_{\Gamma_1} = b \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = q \qquad u(0) = v_b \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \ \text{ en } \Omega \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_1} = \alpha(u - b) \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = q \qquad u(0) = v_b \tag{2}$$

donde u es la temperatura en $\Omega \times (0, T)$, g es la energía interna en Ω, b es la temperatura sobre Γ_1 para (1) y la temperatura del entorno externo de Γ_1 para (2), $v_b = b$ sobre Γ_1, q es el flujo de calor sobre Γ_2 y $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia de calor sobre Γ_1, que satisfacen las hipótesis: $g \in \mathcal{H} = L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $q \in \mathcal{Q} = L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$ y $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Sean u_{gq} y $u_{\alpha gq}$ la únicas soluciones de los problemas parabólicos (1) y (2), cuyas formulaciones variacionales están dadas por

$$\begin{cases} u_{gq} - v_b \in L^2(0, T; V_0), \qquad u_{gq}(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{u}_{gq} \in L^2(0, T; V_0') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{u}_{gq}(t), v\rangle + a(u_{gq}(t), v) = L_{gq}(t, v), \quad \forall v \in V_0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u_{\alpha gq} \in L^2(0, T; V), \qquad u_{\alpha gq}(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{u}_{\alpha gq} \in L^2(0, T; V') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{u}_{\alpha gq}(t), v\rangle + a_\alpha(u_{\alpha gq}(t), v) = L_{\alpha gq}(t, v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{4}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la paridad entre un espacio funcional (V ó V_0) y su espacio dual (V' ó V_0') y

$$V = H^1(\Omega); \qquad V_0 = \{v \in V : v\big|_{\Gamma_1} = 0\}; \qquad Q = L^2(\Gamma_2); \quad H = L^2(\Omega)$$

$$(g, h)_H = \int_\Omega gh\, dx; \quad (q, \eta)_Q = \int_{\Gamma_2} q\eta\, d\gamma; \quad a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx; \quad a_\alpha(u, v) = a(u, v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv d\gamma$$

$$L_{gq}(t, v) = (g(t), v)_H - (q(t), v)_Q; \quad L_{\alpha gq}(t, v) = L_{gq}(t, v) + \alpha \int_{\Gamma_1} b(t) v d\gamma.$$

Por simplicidad, en lo que sigue, para X un espacio de Banach con $1 \leq p \leq \infty$, se denotará $L^p(X)$ en lugar de $L^p(0,T;X)$. Así, se considera el espacio $\mathcal{H} := L^2(H)$, con norma $||.||_{\mathcal{H}}$ y producto interno $(g,h)_{\mathcal{H}} = \int_0^T (g(t),h(t))_H dt$ y el espacio $\mathcal{Q} := L^2(Q)$, con norma $||.||_{\mathcal{Q}}$ y producto interno $(q,\eta)_{\mathcal{Q}} = \int_0^T (q(t),\eta(t))_Q dt$.
Se formulan los siguientes problemas de control óptimo simultáneos *distribuido-frontera* sobre la energía interna g y el flujo del calor q, [4, 5, 7]:

$$\text{hallar} \quad (\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}}) \in \mathcal{H}\times\mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}}) = \min_{g\in\mathcal{H},q\in\mathcal{Q}} J(g,q) \tag{5}$$

$$\text{hallar} \quad (\overline{\overline{g}}_\alpha,\overline{\overline{q}}_\alpha) \in \mathcal{H}\times\mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J_\alpha(\overline{\overline{g}}_\alpha,\overline{\overline{q}}_\alpha) = \min_{g\in\mathcal{H},q\in\mathcal{Q}} J_\alpha(g,q), \tag{6}$$

donde los funcionales costo J y J_α están dados por

$$J(g,q) := \frac{1}{2}||u_{gq}-z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}}$$

$$J_\alpha(g,q) := \frac{1}{2}||u_{\alpha gq}-z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}},$$

con $z_d \in \mathcal{H}$ dado y $M_1,\ M_2$ constantes positivas.

En [3], se estudiaron problemas de control óptimo frontera sobre el flujo de calor q en problemas elípticos mixtos y se probaron resultados de existencia, unicidad y comportamiento asintótico de las soluciones óptimas, cuando el coeficiente de transferencia del calor tiende a infinito. Similares resultados fueron obtenidos por los mismos autores en [4] para problemas de control óptimo simultáneos distribuido-frontera sobre la energía interna g y el fllujo del calor q en problemas elípticos mixtos. En [6], resultados de convergencia fueron probados para problemas de conducción del calor evolutivos en relación a problemas de control óptimo sobre la energía interna g. En [1] y [2], fueron estudiados problemas de control óptimo sobre la fuente de energía g y el flujo q respectivamente, para inecuaciones variacionales parabólicas de segunda clase. En el presente trabajo, en la Sección 2, se estudian problemas de control óptimo simultáneos distribuido-frontera para problemas evolutivos de conducción del calor y se obtienen resultados de existencia y unicidad de los controles óptimos y se dan las condiciones de optimalidad de primer orden en términos del estado adjunto del sistema. En la Sección 3 se obtienen resultados de convergencia cuando el coeficiente de transferencia del calor tiende a infinito.

2. Problemas de Control Óptimo Simultáneos Distribuido-Frontera

2.1. Problema P y su correspondiente Problema de Control Óptimo

Se prueba existencia y unicidad del control óptimo simultáneo $(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}})$ para el problema (5) y se da la condición de optimalidad en términos del estado adjunto del sistema $p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$.

Siguiendo [4, 5, 6], se define la aplicación $C : \mathcal{H}\times\mathcal{Q} \to L^2(V_0)$ por $C(g,q) = u_{gq} - u_{00}$ donde u_{00} es la solución del problema (3) para $g = 0$ y $q = 0$. Más aún, se consideran $\Pi : (\mathcal{H}\times\mathcal{Q})\times(\mathcal{H}\times\mathcal{Q}) \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{L} : \mathcal{H}\times\mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\Pi((g,q),(h,\eta)) = (C(g,q),C(h,\eta))_{\mathcal{H}} + M_1(g,h)_{\mathcal{H}} + M_2(q,\eta)_{\mathcal{Q}},$$

$$\mathcal{L}((g,q)) = (C(g,q),z_d - u_{00})_{\mathcal{H}} \qquad \forall (g,q),\ (h,\eta) \in \mathcal{H}\times\mathcal{Q}$$

y se da el siguiente resultado cuya prueba es omitida.

Lema 1 *Existe un único control óptimo $(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}}) \in \mathcal{H}\times\mathcal{Q}$ tal que*

$$J(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}}) = \min_{g\in\mathcal{H},q\in\mathcal{Q}} J(g,q).$$

Se define el estado adjunto p_{gq} correspondiente al problema (3) para cada $(g,q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, como la única solución de la ecuación variacional

$$\begin{cases} p_{gq} \in L^2(V_0), \quad p_{gq}(T) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{p}_{gq} \in L^2(V_0') \quad \text{tal que} \\ -\langle \dot{p}_{gq}(t), v\rangle + a(p_{gq}(t), v) = (u_{gq}(t) - z_d, v)_H, \quad \forall v \in V_0, \end{cases} \tag{7}$$

y se da el siguiente resultado.

Lema 2 *Si J' denota la derivada Gâteaux del funcional J, entonces la condición de optimalidad para el problema (5) es, $\forall (h,\eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$*

$$\langle J'(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}), (h,\eta)\rangle = (M_1\overline{\overline{g}} + p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, h) + (M_2\overline{\overline{q}} - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \eta) = 0.$$

2.2. Problema P_α y su correspondiente Problema de Control Óptimo

Se prueba, para cada $\alpha > 0$, la existencia y unicidad del control óptimo simultáneo $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ para el problema (6) y se da la condición de optimalidad en términos del estado adjunto $p_{\alpha \overline{\overline{g}}_\alpha \overline{\overline{q}}_\alpha}$.

Lema 3 *Existe un único control óptimo $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha)$ tal que*

$$J_\alpha(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) = \min_{(g,q)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}} J_\alpha(g,q).$$

Se define el estado adjunto $p_{\alpha gq}$ correspondiente a (4) para cada $(g,q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, como la única solución de

$$\begin{cases} p_{\alpha gq} \in L^2(V), \quad p_{\alpha gq}(T) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{p}_{\alpha gq} \in L^2(V') \quad \text{tal que} \\ -\langle \dot{p}_{\alpha gq}(t), v\rangle + a_\alpha(p_{\alpha gq}(t), v) = (u_{\alpha gq}(t) - z_d, v)_H, \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{8}$$

y para cada $\alpha > 0$, se obtiene una propiedad análoga a la dada en el Lema 2.

3. Convergencia de Problemas de Control Óptimo Simultáneos Distribuido-Frontera cuando $\alpha \to \infty$

Para cada (g,q) fijo en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ se dan estimaciones en relación al estado del sistema $u_{\alpha gq}$ y al estado adjunto $p_{\alpha gq}$, cuya prueba es omitida.

Lema 4 *i) Si u_{gq} y $u_{\alpha gq}$ son las únicas soluciones de los problemas variacionales (3) y (4) respectivamente, se tiene*

$$||\dot{u}_{\alpha gq}||_{L^2(V_0')} + ||u_{\alpha gq}||_{L^\infty(H)} + ||u_{\alpha gq}||_{L^2(V)} + \sqrt{(\alpha-1)}||u_{\alpha gq} - b||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leq C \tag{9}$$

para todo $\alpha > 1$, donde la constante C depende sólo de las normas $||\dot{u}_{gq}||_{L^2(V_0')}$, $||\dot{u}_{gq}||_{L^2(V')}$, $||\nabla u_{gq}||_{L^2(H)}$, $||u_{gq}||_{L^2(V)}$, $||u_{gq}||_{L^\infty(H)}$, $||g||_{L^2(V')}$, $||q||_{L^2(H^{1/2}(\Gamma_2))}$ y de la constante de coercividad λ_1 de a_1.

ii) Si p_{gq} y $p_{\alpha gq}$ son las únicas soluciones de los problemas variacionales (7) y (8) respectivamente, se tiene

$$||\dot{p}_{\alpha gq}||_{L^2(V_0')} + ||p_{\alpha gq}||_{L^\infty(H)} + ||p_{\alpha gq}||_{L^2(V)} + \sqrt{(\alpha-1)}||p_{\alpha gq}||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leq D \tag{10}$$

para todo $\alpha > 1$, donde la constante D depende de λ_1 y de las norams $||\dot{p}_{gq}||_{L^2(V_0')}$,$||\dot{p}_{gq}||_{L^2(V')}$, $||\nabla p_{gq}||_{L^2(H)}$, $||p_{gq}||_{L^2(V)}$, $||p_{gq}||_{L^\infty(H)}$, $||g||_{L^2(V')}$, $||q||_{L^2(H^{1/2}(\Gamma_2))}$, $||z_d||_{L^2(H)}$, $||\dot{u}_{gq}||_{L^2(V')}$, $||\nabla u_{gq}||_{L^2(H)}$, $||u_q||_{L^2(V)}$, $||u_{gq}||_{L^\infty(H)}$.

Como consecuencia del anterior resultado se puede probar el teorema que se da a continuación.

Teorema 1 *Para cada (g,q) fijo en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, cuando $\alpha \to \infty$,*

i) $u_{\alpha gq} \to u_{gq}$ fuerte en $L^2(V) \cap L^\infty(H)$ y $\dot{u}_{\alpha gq} \to \dot{u}_{gq}$ fuerte en $L^2(V_0')$.

ii) $p_{\alpha gq} \to p_{gq}$ fuerte en $L^2(V) \cap L^\infty(H)$ y $\dot{p}_{\alpha gq} \to \dot{p}_{gq}$ fuerte en $L^2(V_0')$.

Ahora, en el siguiente teorema se prueba la convergencia fuerte de los controles óptimos de los problemas (5) y (6), los estados adjuntos y estados del sistema, cuando $\alpha \to \infty$.

Teorema 2 *i) Si $u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$ y $u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}$ son los únicos estados correspondientes a los controles óptimos simultáneos de los problemas (5) y (6) respectivamente, entonces $(u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}, \dot{u}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}) \to (u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \dot{u}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}})$ en $L^2(V) \times L^2(V_0')$, cuando $\alpha \to \infty$.*

ii) Si $p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$ y $p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}$ son los únicos estados adjuntos correspondientes a los controles óptimos simultáneos de los problemas (5) y (6) respectivamente, entonces $(p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}, \dot{p}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}) \to (p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \dot{p}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}})$ en $L^2(V) \times L^2(V_0')$, cuando $\alpha \to \infty$.

iii) Si $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})$ y $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha)$ son las únicas soluciones de los problemas de control óptimo simultáneos distribuido-frontera (5) y (6) respectivamente, entonces $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) \to (\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})$ en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, cuando $\alpha \to \infty$.

Prueba. Se dará sólo una idea de la prueba en los dos pasos siguientes.
Paso 1. De las estimaciones (9) y (10) y el hecho que $J_\alpha(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) \leq J_\alpha(0,0)$, se deduce que existen $f \in \mathcal{H}$, $\delta \in \mathcal{Q}$, $\mu \in L^2(V)$, $\dot{\mu} \in L^2(V_0')$, $\rho \in L^2(V)$ y $\dot{\rho} \in L^2(V_0')$ tales que se tienen las convergencias débiles:

$$\overline{\overline{g}}_\alpha \rightharpoonup f \in \mathcal{H}, \quad \overline{\overline{q}}_\alpha \rightharpoonup \delta \in \mathcal{Q}, \qquad u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \rightharpoonup \mu \in L^2(V), \quad \dot{u}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \rightharpoonup \dot{\mu} \in L^2(V_0'),$$

$$p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \rightharpoonup \rho \in L^2(V), \quad \dot{p}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \rightharpoonup \dot{\rho} \in L^2(V_0').$$

Luego, se prueba que $\mu = u_{f\delta}$ y $\rho = p_{f\delta}$. Así, de la condición de optimalidad para el problema (6), se deduce que $f = \overline{\overline{g}}$ y $\delta = \overline{\overline{q}}$ y por lo tanto, $u_{f\delta} = u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$, $p_{f\delta} = p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$, $\dot{u}_{f\delta} = \dot{u}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$ y $\dot{p}_{f\delta} = \dot{p}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$.
Paso 2. Usando que $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})$ es el par óptimo y teniendo en cuenta que $\overline{\overline{q}}_\alpha \rightharpoonup \overline{\overline{q}}$ en $\mathcal{Q}$, $\overline{\overline{g}}_\alpha \rightharpoonup \overline{\overline{g}}$ en $\mathcal{H}$ y $u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha} \rightharpoonup u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{g}}}$ en $L^2(V)$, se tiene que $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha, u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}) \to (\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}, u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}})$ en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q} \times \mathcal{H}$, cuando $\alpha \to \infty$.
Ahora, si se toma $v = u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}(t) - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) \in V$ en (4) para $u = u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}$ y se denota por $z_\alpha = u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$, se obtiene

$$\lambda_1 ||z_\alpha(t)||_V^2 \leq (\overline{\overline{g}}_\alpha(t) - \dot{u}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t), z_\alpha(t))_H - (\overline{\overline{q}}_\alpha(t), z_\alpha(t))_Q - a(u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t), z_\alpha(t)).$$

Integrando entre 0 y T y teniendo en cuenta que $z_\alpha \rightharpoonup 0$ en $L^2(V)$, $\overline{\overline{q}}_\alpha \to \overline{\overline{q}}$ en $\mathcal{Q}$ y $\overline{\overline{g}}_\alpha \to \overline{\overline{g}}$ en $\mathcal{H}$ se tiene que $z_\alpha \to 0$ en $L^2(V)$. Además, de (3) y (4) se deduce que existe una constante $E > 0$ tal que

$$||\dot{z}_\alpha||_{L^2(V_0')}^2 \leq E(||z_\alpha||_{L^2(V)}^2 + ||\overline{\overline{g}}_\alpha - \overline{\overline{g}}||_{\mathcal{H}}^2 + ||\overline{\overline{q}} - \overline{\overline{q}}_\alpha||_{\mathcal{Q}}^2).$$

Puesto que $\overline{\overline{q}}_\alpha \to \overline{\overline{q}}$ en $\mathcal{Q}$, $\overline{\overline{g}}_\alpha \to \overline{\overline{g}}$ en $\mathcal{H}$ y $u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \to u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$ en $L^2(V)$, se puede decir que $\dot{z}_\alpha \to 0$ en $L^2(V_0')$, esto es $\dot{u}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \to \dot{u}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$ en $L^2(V_0')$, cuando $\alpha \to \infty$.
De manera similar, se prueba que $(p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}, \dot{p}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}) \to (p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \dot{p}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}})$ en $L^2(V) \times L^2(V_0')$, cuando $\alpha \to \infty$.
□

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos PIP No. 0275 de CONICET-Univ. Austral, ANPCyT PICTO Austral No. 0090, Rosario, Argentina y PPI No 18/C468 de SECyT-UNRC, Río Cuarto, Argentina.

REFERENCIAS

[1] BOUKROUCHE M. - TARZIA D. A., *Existence, uniqueness, and convergence of optimal control problems associated with parabolic variational inequalities of the second kind*, Nonlinear Analysis: Real World Aplications, 12, 2211-2224 (2011).

[2] BOUKROUCHE M. - TARZIA D. A., *Convergence of optimal control problems governed by second kind parabolic variational inequalities*, J. Control Theory Appl. 11, 422-427 (2013).

[3] GARIBOLDI C. M. - TARZIA D. A., *Convergence of boundary optimal control problems with restrictions in mixed elliptic Stefan-like problems*, Adv. in Diff. Eq. and Control Processes, 1(2), 113-132 (2008).

[4] GARIBOLDI C. M. - TARZIA D. A., *Existence, uniqueness and convergence of simultaneous distributed-boundary optimal control problems*, Control and Cybernetics, 44, 5-17 (2015).

[5] LIONS J.L., *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris (1968).

[6] MENALDI J. - TARZIA D. A., *A distributed parabolic control with mixed boundary conditions*, Asymptotic Analysis 52, 227-241 (2007).

[7] TRÖLSTZSCH F., *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications*, American Math. Soc., Providence (2010).