CONTROLES ÓPTIMOS FRONTERA PARA ECUACIONES VARIACIONALES PARABÓLICAS

Carolina M. Bollo[†], Claudia M. Gariboldi[†] y Domingo A. Tarzia[‡]

[†] *Depto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Rio Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Rio Cuarto, Argentina.*
cbollo@exa.unrc.edu.ar, cgariboldi@exa.unrc.edu.ar
[‡]*Depto. Matemática - CONICET, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.*
DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Se considera un problema evolutivo P de conducción del calor con condiciones de frontera mixtas en un dominio n-dimensional Ω con frontera regular y una familia de problemas P_α, donde $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia del calor en una porción de la frontera Γ_1. En relación a estos sistemas de estado, se formulan problemas de control óptimo *frontera* sobre el flujo de calor q definido en una porción Γ_2 de la frontera de Ω. Se prueban resultados de existencia y unicidad de los controles óptimos y se dan las correspondientes condiciones de optimalidad de primer orden en términos del estado adjunto del sistema.

Palabras clave: *Ecuaciones variacionales parabólicas, Control óptimo, Condiciones de frontera mixtas, Existencia y unicidad, Condiciones de optimalidad.*
2000 AMS Subject Classification: 35K15, 35K20, 35R35, 49J20, 49K20.

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^n$, cuya frontera regular Γ consiste de la unión de dos porciones disjuntas Γ_1 y Γ_2 con $med(\Gamma_1) > 0$ y $med(\Gamma_2) > 0$. Se denota con $med(\Gamma_i)$ (para $i = 1, 2$), la medida Hausdorff $(n-1)$-dimensional de Γ. Sea un intervalo de tiempo $[0, T]$, para algún $T > 0$. Se presentan los siguientes problemas evolutivos de conducción del calor P y P_α (para cada parámetro $\alpha > 0$) respectivamente, con condiciones de frontera mixtas (se indica con $u(t)$ a $u(\cdot, t)$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \ \text{ en } \Omega \qquad u\big|_{\Gamma_1} = b \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = q \qquad u(0) = v_b \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \ \text{ en } \Omega \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_1} = \alpha(u-b) \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = q \qquad u(0) = v_b \tag{2}$$

donde u es la temperatura en $\Omega \times (0, T)$, g es la energía interna en Ω, b es la temperatura sobre Γ_1 para (1) y la temperatura del entorno externo de Γ_1 para (2), $v_b = b$ sobre Γ_1, q es el flujo de calor sobre Γ_2 y $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia de calor sobre Γ_1, que satisfacen las hipótesis: $g \in \mathcal{H} = L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $q \in \mathcal{Q} = L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$ y $b \in \mathcal{B} = L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$. Sean u_q y $u_{q\alpha}$ las únicas soluciones de los problemas parabólicos (1) and (2), cuyas formulaciones variacionales están dadas por:

$$\begin{cases} u_q - v_b \in L^2(0, T; V_0), \qquad u_q(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{u}_q \in L^2(0, T; V_0') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{u}_q(t), v\rangle + a(u_q(t), v) = L_q(t, v), \quad \forall v \in V_0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u_{q\alpha} - v_b \in L^2(0, T; V), \qquad u_{q\alpha}(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{u}_{q\alpha} \in L^2(0, T; V') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{u}_{q\alpha}(t), v\rangle + a_\alpha(u_{q\alpha}(t), v) = L_{q\alpha}(t, v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{4}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la paridad entre un espacio funcional (V ó V_0) y su espacio dual (V' ó V_0') y

$$V := H^1(\Omega); \qquad V_0 := \{v \in V : v\big|_{\Gamma_1} = 0\}; \qquad Q := L^2(\Gamma_2); \qquad H := L^2(\Omega)$$

$$(g, h)_H = \int_\Omega gh\,dx; \quad (q, \eta)_Q = \int_{\Gamma_2} q\eta\,d\gamma; \quad a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v dx; \quad a_\alpha(u, v) := a(u, v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv d\gamma$$

$$L_q(t, v) := (g(t), v)_H - (q(t), v)_Q; \quad L_{q\alpha}(t, v) := L_q(t, v) + \alpha \int_{\Gamma_1} b(t) v d\gamma.$$

Sobre el espacio $\mathcal{H} := L^2(0,T;L^2(\Omega))$, con norma $||.||_{\mathcal{H}}$ y producto interno $(g,h)_{\mathcal{H}} = \int\limits_0^T (g(t),h(t))_H dt$ y el espacio $\mathcal{Q} := L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$, con norma $||.||_{\mathcal{Q}}$ y producto interno $(q,\eta)_{\mathcal{Q}} = \int\limits_0^T (q(t),\eta(t))_Q dt$, se consideran los funcionales costo no negativos $J : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_\alpha : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_0^+$ definidos por las expresiones:

$$J(q) = \frac{1}{2}\left\|u_q - z_d\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M}{2}\left\|q\right\|_{\mathcal{Q}}^2 \qquad \text{y} \qquad J_\alpha(q) = \frac{1}{2}\left\|u_{q\alpha} - z_d\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M}{2}\left\|q\right\|_{\mathcal{Q}}^2$$

donde $z_d \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ está dado y M es una constante positiva.

En relación a estos sistemas de estado, se formulan los siguientes problemas de control óptimo frontera sobre el flujo del calor q, [6]:

$$\text{hallar} \quad q_{op} \in \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J(q_{op}) = \min_{q\in\mathcal{Q}} J(q), \tag{5}$$

$$\text{hallar} \quad q_{\alpha_{op}} \in \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J_\alpha(q_{\alpha_{op}}) = \min_{q\in\mathcal{Q}} J_\alpha(q). \tag{6}$$

En [3], se estudiaron problemas de control óptimo frontera sobre el flujo de calor q en problemas elípticos mixtos y se obtuvieron resultados de existencia, unicidad y comportamiento asintótico de las soluciones óptimas, cuando el coeficiente de transferencia del calor tiende a infinito. En [5], se probaron resultados similares para problemas evolutivos de conducción del calor en relación a problemas de control óptimo distribuido sobre la fuente de energía g. En [1] y [2], se estudiaron problemas de control sobre la fuente g y el flujo q respectivamente, para inecuaciones variacionales parabólicas de segunda clase. En el presente trabajo, en la Sección 2, se obtienen resultados de existencia y unicidad del control óptimo q_{op} para el problema (5) y se da la condición de optimalidad de primer orden en términos del estado adjunto $p_{q_{op}}$ del sistema. En la Sección 3, para cada $\alpha > 0$, se obtienen resultados similares para el problema (6).

2. Problema P y su correspondiente problema de Control Óptimo Frontera

En esta sección se prueba que el funcional J es estrictamente convexo y Gâteaux diferenciable en $\mathcal{Q}$. También se muestra la existencia y unicidad de los controles óptimos frontera q_{op} para el problema (5) y se da la condición de optimalidad en términos del estado adjunto del sistema $p_{q_{op}}$. Para esto, siguiendo [4, 5], se define la aplicación $C : \mathcal{Q} \to L^2(0,T;V_0)$ tal que $C(q) = u_q - u_0$, donde u_0 es la solución del problema variacional (3) para $q = 0$. Además, se consideran $\Pi : \mathcal{Q}\times\mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{L} : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ definidos por las siguientes expresiones:

$$\Pi(q,\eta) = (C(q),C(\eta))_{\mathcal{H}} + M(q,\eta)_{\mathcal{Q}} \quad \forall q,\eta\in\mathcal{Q} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}(q) = (C(q), z_d - u_0)_{\mathcal{H}} \quad \forall q\in\mathcal{Q}$$

y se prueba el siguiente resultado.

Lema 1 *i) C es una aplicación lineal y continua.*

ii) Π es una forma bilineal, continua, simétrica y coerciva en $\mathcal{Q}$, esto es, $\Pi(q,q) \geq M||q||_{\mathcal{Q}}^2 \;\; \forall q\in\mathcal{Q}$.

iii) $\mathcal{L}$ es lineal y continua en $\mathcal{Q}$.

iv) J se puede escribir como $J(q) = \frac{1}{2}\Pi(q,q) - \mathcal{L}(q) + \frac{1}{2}||u_0 - z_d||_{\mathcal{H}}^2, \;\; \forall q\in\mathcal{Q}$.

v) J es un funcional estrictamente convexo sobre $\mathcal{Q}$, esto es, $\forall q_1,q_2\in\mathcal{Q},\; \forall t\in[0,1]$

$$(1-t)J(q_2) + tJ(q_1) - J((1-t)q_2 + tq_1) \geqslant \frac{Mt(1-t)}{2}||q_2 - q_1||_{\mathcal{Q}}^2.$$

vi) Existe un único control óptimo $q_{op}\in\mathcal{Q}$ tal que $J(q_{op}) = \min\limits_{q\in\mathcal{Q}} J(q)$.

Prueba.

(i)-(iii) Siguiendo [5], se tiene que $C : L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \to \{v \in L^2(0,T;V_0) \cap L^\infty(0,T;H) : \dot{v} \in L^2(0,T;V_0')\}$ es un operador continuo. Luego, la forma bilineal π es simétrica, continua y coerciva sobre $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ y el operador $\mathcal{L}$ es lineal y continuo en $\mathcal{Q}$.

(iv) Resulta de la definición de J, π y $\mathcal{L}$.

(v) Es suficiente probar que $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{Q},\ \forall t \in [0,1]$

$$(1-t)J(q_2) + tJ(q_1) - J((1-t)q_2 + tq_1) = \frac{t(1-t)}{2}\left[||u_{q_2} - u_{q_1}||^2_{\mathcal{H}} + M||q_2 - q_1||^2_{\mathcal{Q}}\right].$$

(vi) Se sigue de [4], teniendo en cuenta (i)-(v).

□

A continuación, se define el estado adjunto p_q correspondiente a (1) para cada $q \in \mathcal{Q}$, como la única solución del siguiente problema parabólico mixto

$$-\frac{\partial p_q}{\partial t} - \Delta p_q = u_q - z_d \text{ en } \Omega \qquad p_q\big|_{\Gamma_1} = 0 \qquad -\frac{\partial p_q}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = 0 \qquad p_q(T) = 0,$$

cuya formulación variacional está dada por

$$\begin{cases} p_q \in L^2(0,T;V_0), \qquad p_q(T) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{p}_q \in L^2(0,T;V_0') \\ \text{tal que} \quad -\langle \dot{p}_q(t), v\rangle + a(p_q(t), v) = (u_q(t) - z_d, v)_H, \quad \forall v \in V_0, \end{cases}$$

y se enuncian las siguientes propiedades del funcional J.

Lema 2 *i) El estado adjunto p_q satisface, $\forall q, \eta \in \mathcal{Q}$,*

$$(C(\eta), u_q - z_d)_{\mathcal{H}} = -\int_0^T \frac{d}{dt}(p_q(t), C(\eta)(t))_H dt - (\eta, p_q)_{\mathcal{Q}}.$$

ii) El funcional J es diferenciable Gâteaux y J' viene dado por

$$\langle J'(q), \eta - q\rangle = (u_\eta - u_q, u_q - z_d)_{\mathcal{H}} + M(q, \eta - q)_{\mathcal{Q}} = \Pi(q, \eta - q) - \mathcal{L}(\eta - q), \quad \forall q, \eta \in \mathcal{Q}.$$

iii) La derivada Gâteaux de J puede escribirse como $J'(q) = Mq - p_q, \quad \forall q \in \mathcal{Q}$.

iv) La condición de optimalidad para el problema (5) está dada por $Mq_{op} - p_{q_{op}} = 0$ en $\mathcal{Q}$.

3. Problema P_α y su correspondiente problema de Control Óptimo Frontera

Al igual que en la sección anterior, en lo que sigue se muestra que el funcional J_α es estrictamente convexo y diferenciable Gâteaux en $\mathcal{Q}$. Además, para cada $\alpha > 0$, se prueba la existencia y unicidad de los controles óptimos frontera $q_{\alpha_{op}}$ para el problema (6) y se da la condición de optimalidad en términos del estado adjunto $p_{q_{\alpha_{op}}\alpha}$. Para esto, se define la aplicación $C_\alpha : \mathcal{Q} \to L^2(0,T;V)$ tal que $C_\alpha(q) = u_{q\alpha} - u_{0\alpha}$, donde $u_{0\alpha}$ es la solución del problema variacional (4) para $q = 0$. Se consideran $\Pi_\alpha : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{L}_\alpha : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ definidos por

$$\Pi_\alpha(q,\eta) = (C_\alpha(q), C_\alpha(\eta))_{\mathcal{H}} + M(q,\eta)_{\mathcal{Q}} \quad \forall q, \eta \in \mathcal{Q}; \qquad \mathcal{L}_\alpha(q) = (C_\alpha(q), z_d - u_{0\alpha})_{\mathcal{H}} \quad \forall q \in \mathcal{Q}$$

y de manera análoga al Lema 1, se tiene el siguiente resultado.

Lema 3 *i) C_α es una aplicación lineal y continua.*

ii) Π_α es una forma bilineal, continua, simétrica y coerciva en $\mathcal{Q}$, esto es, $\Pi_\alpha(q,q) \geq M||q||^2_{\mathcal{Q}}\ \forall q \in \mathcal{Q}$.

iii) $\mathcal{L}_\alpha$ *es lineal y continua en* $\mathcal{Q}$.

iv) J_α *se puede escribir como* $J_\alpha(q) = \frac{1}{2}\Pi_\alpha(q,q) - \mathcal{L}_\alpha(q) + \frac{1}{2}||u_{0\alpha} - z_d||^2_{\mathcal{H}}, \ \forall q \in \mathcal{Q}$.

v) J_α *es un funcional estrictamente convexo sobre* $\mathcal{Q}$*, esto es,* $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{Q}, \ \forall t \in [0,1]$

$$(1-t)J_\alpha(q_2) + tJ_\alpha(q_1) - J_\alpha((1-t)q_2 + tq_1) \geqslant \frac{Mt(1-t)}{2}||q_2 - q_1||^2_{\mathcal{Q}}.$$

vi) Existe un único control óptimo $q_{\alpha_{op}} \in \mathcal{Q}$ *tal que* $J_\alpha(q_{\alpha_{op}}) = \min_{q\in\mathcal{Q}} J_\alpha(q)$.

Se define el estado adjunto $p_{q\alpha}$ correspondiente a (2) para cada $q \in \mathcal{Q}$, como la única solución de

$$-\frac{\partial p_{q\alpha}}{\partial t} - \Delta p_{q\alpha} = u_{q\alpha} - z_d \text{ en } \Omega \qquad -\frac{\partial p_{q\alpha}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha p_{q\alpha} \qquad \frac{\partial p_{q\alpha}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \qquad p_{q\alpha}(T) = 0$$

cuya formulación variacional está dada por

$$\begin{cases} p_{q\alpha} \in L^2(0,T;V), \qquad p_{q\alpha}(T) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{p}_{q\alpha} \in L^2(0,T;V') \\ \text{tal que} \quad -\langle \dot{p}_{q\alpha}(t), v\rangle + a_\alpha(p_{q\alpha}(t), v) = (u_{q\alpha}(t) - z_d, v)_H, \quad \forall v \in V \end{cases}$$

y para cada $\alpha > 0$, se obtienen propiedades análogas a las consideradas en el Lema 2.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos PIP No 0534 de CONICET–Univ. Austral, Rosario, Argentina, AFOSR-SOARD Grant FA9550-14-1-0122 y PPI No C468 de SECyT-UNRC, Río Cuarto, Argentina.

REFERENCIAS

[1] BOUKROUCHE M. - TARZIA D. A., *Existence, uniqueness, and convergence of optimal control problems associated with parabolic variational inequalities of the second kind*, Nonlinear Analysis: Real World Aplications, 12, 2211-2224 (2011).

[2] BOUKROUCHE M. - TARZIA D. A., *Convergence of optimal control problems governed by second kind parabolic variational inequalities*, J. Control Theory Appl. 11, 422-427 (2013).

[3] GARIBOLDI C. M. - TARZIA D. A., *Convergence of boundary optimal control problems with restrictions in mixed elliptic Stefan-like problems*, Adv. in Diff. Eq. and Control Processes, 1(2), 113-132 (2008).

[4] LIONS J.L., *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux drives partielles*, Dunod, Paris (1968).

[5] MENALDI J. - TARZIA D. A., *A distributed parabolic control with mixed boundary conditions*, Asymptotic Analisys 52, 227-241 (2007).

[6] TRÖLSTZSCH F., *Optimal control of partial differetnial equations. Theory, methods and applications*, American Math. Soc., Providence (2010).