SOLUCIÓN EXPLÍCITA DEL PROBLEMA DE STEFAN A UNA FASE CON UN CALOR LATENTE DEPENDIENTE DE LA POSICIÓN Y CON UNA CONDICIÓN CONVECTIVA EN EL BORDE FIJO UTILIZANDO FUNCIONES DE KUMMER.

Julieta Bollati† y Domingo A. Tarzia†

†*Depto. Matemática - CONICET, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.*
JBollati@austral.edu.ar, DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Se considera un problema de Lamé-Clapeyron-Stefan a una fase, para un material semi-infinito, donde el calor latente de fusión está definido como una potencia de la posición y donde se impone una condición convectiva en el borde fijo del material $x = 0$. Se obtiene, utilizando las funciones de Kummer, una solución explícita del tipo de similaridad, probando a la vez su unicidad. Además se estudia el comportamiento límite de la solución de dicho problema cuando el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo tiende a infinito.

Palabras clave: *Problema de Stefan, Calor latente variable, Condición convectiva, Función de Kummer, Solución explícita, Solución de similaridad.*
2010 AMS Subject Classification: 35R35, 80A22, 35C05.

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de transferencia de calor con cambio de fase como lo son la solidificación y la fusión, constituyen un campo de estudio que tiene lugar en diversas áreas de aplicación (procesos industriales, tecnológicos, etc...). Los problemas de Stefan pueden formularse como modelos que representan procesos térmicos de transiciones de fase, donde dichas transiciones se caracterizan por la difusión del calor y por un intercambio de calor latente. Debido a su importancia, dichos problemas han sido ampliamente estudiados y analizados ([1]-[2],[8],[12]). En [11] se presenta una extensa bibliografía sobre problemas de frontera libre para la ecuación calor-difusión.

En la formulación clásica del problema de Stefan, se establecen ciertos supuestos sobre los factores físicos involucrados en el proceso de cambio de fase con el fin de simplificar la descripción del modelo. Una de estas hipótesis, es considerar al calor latente constante. Si bien esta consideración es razonable, podría plantearse un modelo con calor latente variable cuyos fundamentos físicos se encuentran en problemas relacionados con el movimiento de las costas marítimas [14], la deformación de un delta oceánico [3] o el enfriamiento de un cuerpo magmático [5].

En 1970, Primicerio [6] encontró condiciones suficientes para la existencia y unicidad de solución de un problema de Stefan a una fase, considerando al calor latente como una función general de la posición. Voller y otros [14] en 2004 calculó la solución exacta del problema a una fase considerando al calor latente como una función lineal de la posición. Por un lado Salva y Tarzia [9] extendieron el trabajo de Voller, considerando el problema de Stefan a dos fases. Por otro lado, Zhou y otros en [15] generalizaron [14] considerando un problema de Stefan a una fase, con calor latente definido como una potencia con exponente entero de la posición. Recientemente Zhou y Xia [16] trabajaron con este último problema, asumiendo un exponente real no negativo. Presentaron la solución explícita para dos problemas diferentes definidos según la condición de frontera considerada: temperatura y flujo. Otro tipo de soluciones explícitas para procesos de cambio de fase pueden encontrarse en [7], [10] y [12].

Motivados por [13] y [16] se analizará la existencia y unicidad de solución del siguiente problema de Stefan a una fase, considerando un material homogéneo semi-infinito, con un calor latente definido como una función potencia de la posición y con una condición convectiva en el borde fijo $x = 0$:

Problema (P1): Hallar la temperatura $\Psi(x,t)$ y la frontera libre $s(t)$ de manera que:

$$\Psi_t(x,t) = D\Psi_{xx}(x,t), \qquad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$s(0) = 0, \qquad \Psi(s(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{2}$$

$$k\Psi_x(0,t) = h_0 t^{-1/2}\left[\Psi(0,t) - T_\infty t^{\alpha/2}\right] \qquad t > 0, \tag{3}$$

$$k\Psi_x(s(t),t) = -\gamma s^\alpha(t)\dot{s}(t), \qquad t > 0, \tag{4}$$

donde Ψ es la temperatura, $s(t)$ representa la interfase, D es el coeficiente de difusividad térmica, k es la conductividad térmica y γx^α es el calor latente por unidad de volumen. Se supone que la temperatura de cambio de fase es cero. La condición (3) representa la condición convectiva en el borde fijo. T_∞ caracteriza la temperatura a una gran distancia del borde fijo $x = 0$ y h_0 representa el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en la frontera fija. Se asume $\gamma > 0, h_0 > 0$ y $T_\infty > 0$, lo que corresponde a trabajar con el caso de fusión. En el caso de solidificación debe suponerse: $h_0 > 0$,$\gamma < 0$ y $T_\infty < 0$.

2. SOLUCIÓN EXPLÍCITA

Lema 1

1. *Sea $\Psi(x,t) = t^{\alpha/2} f(\eta)$, con $\eta = \dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}$ entonces $\Psi = \Psi(x,t)$ es solución de la ecuación del calor $\Psi_t(x,t) = D\Psi_{xx}(x,t)$, con $d > 0$ si y solo si $f = f(\eta)$ satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria:*
$$\frac{d^2 f}{d\eta^2}(\eta) + 2\eta \frac{df}{d\eta}(\eta) - 2\alpha f(\eta) = 0. \tag{5}$$

2. *Introduciendo una nueva variable $z = -\eta^2$, la ecuación (5) se transforma en la conocida ecuación de Kummer:*
$$z\frac{d^2 f}{dz^2}(z) + \left(\frac{1}{2} - z\right)\frac{df}{dz}(z) + \frac{\alpha}{2} f(z) = 0. \tag{6}$$
cuya solución general está dada por:
$$f(z) = \widehat{c_{11}} M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, z\right) + \widehat{c_{21}} U\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, z\right). \tag{7}$$
donde $\widehat{c_{11}}$ y $\widehat{c_{21}}$ son constantes arbitrarias y $M(a,b,z)$ y $U(a,b,z)$ son las funciones de Kummer definidas de la siguiente manera:
$$M(a,b,z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s}{(b)_s s!} z^s, \text{ donde } b \text{ no puede ser un entero no positivo,} \tag{8}$$
$$U(a,b,z) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} M(a,b,z) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} M(a-b+1, 2-b, z). \tag{9}$$
siendo $(a)_s$ el símbolo de Pochhammer, dado por:
$$(a)_s = a(a+1)(a+2)\dots(a+s-1), \qquad (a)_0 = 1. \tag{10}$$

Nota 1 *Todas las propiedades de las funciones de Kummer se pueden encontrar en [4].*

Nota 2 *Teniendo en cuenta (9), la solución general de (6) se puede reescribir de la siguiente manera:*

$$f(z) = c_{11} M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, z\right) + c_{21} z^{1/2} M\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z\right), \tag{11}$$

donde c_{11} y c_{21} son constantes no necesariamente reales.

El resultado principal está dado en el siguiente teorema, el cual asegura la existencia y unicidad de solución para el problema (P1), proporcionando además la solución explícita.

Teorema 1 *Existe una única solución de tipo de similaridad para el problema (1)-(4) dada por:*

$$\Psi(x,t) = t^{\alpha/2}\left[c_{11}M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\eta^2\right) + c_{21}\eta M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\eta^2\right)\right] \tag{12}$$

$$s(t) = 2\nu\sqrt{Dt} \tag{13}$$

donde $\eta = \dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}$ *y las constantes* c_{11} *y* c_{21} *se definen como:*

$$c_{11} = \frac{-\nu M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu^2\right)}c_{21}, \quad c_{21} = \frac{-2h_0\sqrt{D}T_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu^2\right)}{\left[kM\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu^2\right) + 2\sqrt{D}h_0\nu M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu^2\right)\right]}. \tag{14}$$

El coeficiente adimensional ν *se obtiene como la única solución de la siguiente ecuación:*

$$\frac{h_0 T_\infty}{\gamma 2^\alpha D^{(\alpha+1)/2}} f_1(x) = x^{\alpha+1}, \qquad x > 0. \tag{15}$$

donde la función f_1 *está definida por:*

$$f_1(x) = \frac{1}{\left[M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},x^2\right) + 2\frac{\sqrt{D}h_0}{k}xM\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},x^2\right)\right]}. \tag{16}$$

3. COMPORTAMIENTO LÍMITE

En esta sección se analiza el comportamiento límite del problema (P1) cuando el coeficiente h_0 que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo $x = 0$ tiende a infinito. Dado que la temperatura y la frontera libre, solución del problema (P1), dependen de h_0, se considerará $\Psi_{h_0}(x,t) := \Psi(x,t)$ y $s_{h_0}(t) := s(t)$ definidos por las ecuaciones (12)-(13), donde $c_{11} = c_{11}(h_0)$, $c_{21} = c_{21}(h_0)$, y $\nu = \nu_{h_0}$ es la única solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{h_0 T_\infty}{\gamma 2^\alpha D^{(\alpha+1)/2}} f_1(x, h_0) = x^{\alpha+1}, \qquad x > 0. \tag{17}$$

con $f_1(x, h_0)$ definida por el lado derecho de la ecuación (16).

Por otro lado, se define un nuevo problema (P4):

Problem (P4): Hallar la temperatura $\Psi_\infty(x,t)$ y la frontera libre $s_\infty(t)$ que satisfacen:

$$\Psi_{\infty t}(x,t) = D\Psi_{\infty xx}(x,t), \qquad 0 < x < s_\infty(t), \quad t > 0, \tag{18}$$

$$s_\infty(0) = 0, \qquad \Psi_\infty(s_\infty(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{19}$$

$$\Psi_\infty(0,t) = T_\infty t^{\alpha/2} \qquad t > 0, \tag{20}$$

$$k\Psi_{\infty x}(s_\infty(t),t) = -\gamma s_\infty^\alpha(t)\dot{s}_\infty(t), \qquad t > 0, \tag{21}$$

Como se puede observar este problema corresponde a un problema de Stefan con condición de temperatura en el borde fijo $x = 0$. Luego, la solución, de acuerdo a [16] viene dada por:

$$\Psi_\infty(x,t) = t^{\alpha/2}\left[c_{11\infty}M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\eta^2\right) + c_{21\infty}\eta M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\eta^2\right)\right], \tag{22}$$

$$s_\infty(t) = 2\nu_\infty\sqrt{Dt}, \tag{23}$$

donde $\eta = \dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}$ y las constantes $c_{11\infty}$ y $c_{21\infty}$ están dadas por:

$$c_{11\infty} = T_\infty, \qquad c_{21\infty} = \frac{-T_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_\infty^2\right)}{\nu_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_\infty^2\right)} \tag{24}$$

y el parámetro ν_∞ es la única solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{kT_\infty}{2^{\alpha+1}D^{\alpha/2+1}\gamma} f_2(x) = x^{\alpha+1}, \qquad x > 0 \tag{25}$$

donde:

$$f_2(x) = \frac{1}{xM\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, x^2\right)}. \tag{26}$$

Ahora, se está en condiciones de establecer el siguiente resultado de convergencia:

Teorema 2 *El problema (P1) converge puntualmente al problema (P4), en el sentido de:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{h_0\to+\infty} \nu_{h_0} & = \nu_\infty, \\ \lim\limits_{h_0\to+\infty} s_{h_0}(t) & = s_\infty(t), \quad \forall t > 0 \\ \lim\limits_{h_0\to+\infty} \Psi_{h_0}(x,t) & = \Psi_\infty(x,t), \quad \forall t > 0, x > 0. \end{cases} \tag{27}$$

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos PIP No 0534 de CONICET–Univ. Austral, Rosario, Argentina y AFOSR-SOARD Grant FA9550-14-1-0122.

REFERENCIAS

[1] V. ALEXIADES, A.D. SOLOMON, *Mathematical Modelling of Melting and Freezing Processes*, Hemisphere-Taylor, Francis, Washington, 1993.

[2] H.S. CARSLAW, C.J. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1959.

[3] J. LORENZO-TRUEBA, V.R. VOLLER, *Analytical and numerical solution of a generalized Stefan Problem exhibiting two moving boundaries with application to ocean delta deformation.*, J. Math. Anal. Appl., 366 (2010) 538-549.

[4] F.W.J. OLVER, D.W. LOZIER, R.F. BOISVERT, C.W. CLARK, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, New York (2010).

[5] L.L. PERCHUK, *Progress in metamorphic and magmatic petrology*, Cambridge University Press, Wallingford, UK, 2003.

[6] M. PRIMICERIO, *Stefan-like problems with space-dependent latent heat*, Meccanica, 5 (1970) 187-190.

[7] C. ROGERS, *Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem*, J. Phys. A -Math. Gen., 18 (1985) L105-L109

[8] L.I. RUBINSTEIN, *The Stefan problem*, American Mathematical Society, Providence, 1971.

[9] N.N. SALVA, D.A. TARZIA, *Explicit solution for a Stefan problem with variable latent heat ans constant heat flux boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl., 379 (2011), 240-244.

[10] D.A. TARZIA, *An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*, Quart. Appl. Math., 39 (1982) 491-497.

[11] D.A. TARZIA, *A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems*, MAT-Serie A, 2 (2000) 1-297.

[12] D.A. TARZIA, *Explicit and approximated solutions for heat and mass transfer problems with a moving interface*, Chapter 20, in Advanced Topics in Mass Transfer, M. El-Amin (Ed.), InTech Open Access Publisher, Rijeka, 2011, 439-484.

[13] D.A. TARZIA, *Relationship between Neumann solutions for two phase Lamé-Clapeyron-Stefan problems with convective and temperature boundary conditions*, Thermal Sci.(2016), DOI 10.2298/TSCI 140607003T, In press.

[14] V.R. VOLLER, J.B. SWENSON, C. PAOLA, *An analytical solution for a Stefan problem with variable latent heat*, Int. J. Heat Mass Transfer., 47 (2004) 5387-5390.

[15] Y. ZHOU, Y.J. WANG, W. K. BU, *Exact solution for a Stefan problem with latent heat a power function of position*, Int. J. Heat Mass Transfer, 69 (2014) 451-454.

[16] Y. ZHOU, L.J. XIA, *Exact solution for Stefan problem with general power-type latent heat using Kummer function*, Int. J. Heat Mass Transfer, 84 (2015) 114-118.