UN PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES EN UN DOMINIO ANGULAR CON CONDUCTIVIDAD TÉRMICA Y CALOR ESPECÍFICIO DEPENDIENTES DE LA TEMPERATURA

Julieta Bollati[†][‡], María F. Natale[‡], José A. Semitiel[‡] y Domingo A. Tarzia[†][‡]

[†]*Depto de Matemática, FCE-Universidad Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario, Argentina, fnatale@austral.edu.ar, jsemitiel@austral.edu.ar*
[‡]*CONICET, Argentina, jbollati@austral.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar*

Resumen: Se considera un problema de frontera libre unidimensional a dos fases que modela el proceso de solidificación de una sustancia que está inicialmente en estado líquido. La principal característica es que la región sólida es un dominio angular, es decir, mientras que el líquido se solidifica, se contrae y forma una región vacía entre $x = 0$ y $x = rs(t)$ donde $0 < r < 1$ es el parámetro de contracción y $x = s(t)$ es la posición de la interface. Se asumen las conductividades térmicas y calores específicos dependientes de la temperatura en ambas fases. Se obtiene existencia y unicidad de solución del problema de Stefan a dos fases con condición de tipo Dirichlet en $x = rs(t)$.

Palabras clave: *Problema de Stefan, problema de frontera libre, coeficientes térmicos dependientes de la temperatura, solución de tipo similaridad.*
2000 AMS Subject Classification: 35R35 - 80A22 - 35K05

1. INTRODUCCIÓN

En [1] se considera un problema de frontera libre unidimensional a dos fases en un dominio angular que modela el proceso de solidificación de una sustancia pura que se encuentra inicialmente en estado líquido. La temperatura del líquido en el momento $t = 0$ en $x = 0$ desciende hasta el punto de congelación y comienza a solidificarse siendo $x = s(t)$ la posición de la interfase. A medida que el líquido se solidifica, se encoge y aparece un dominio angular, es decir, una región entre $x = 0$ y $x = rs(t)$ con

$$r = 1 - \tfrac{\rho_2}{\rho_1} \in (0, 1), \tag{1}$$

con $\rho_i > 0$ es la densidad de la región i donde $i = 1$ es la región sólida y $i = 2$ es la región líquida.

En la formulación clásica del problema de Stefan, se suponen que los coeficientes térmicos involucrados son constantes en el proceso de cambio de fase para simplificar la descripción del modelo. Sin embargo, en la última década, problemas de frontera libre que involucran coeficientes térmicos variables [2, 3], han cobrado especial importancia debido a sus múltiples aplicaciones.

En este trabjo se considera un problema de frontera libre con una condición de tipo Dirichlet en $x = rs(t)$ con coeficientes térmicos dependientes de la temperatura definido por:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) = \rho_1 c_1(u_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + r\dot{s}(t)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right), \qquad rs(t) < x < s(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_2(u_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) = \rho_2 c_2(u_2)\frac{\partial u_2}{\partial t}, \qquad x > s(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

$$u_2(+\infty, t) = u_2(x, 0) = B, \qquad t > 0,\ x > s(t), \tag{4}$$

$$u_1(s(t), t) = u_2(s(t), t) = u^*, \qquad t > 0, \tag{5}$$

$$k_1(u_1(s(t), t))\frac{\partial u_1}{\partial x}(s(t), t) - k_2(u_2(s(t), t))\frac{\partial u_2}{\partial x}(s(t), t) = \rho_1 \ell \dot{s}(t), \qquad t > 0, \tag{6}$$

$$u_1(rs(t), t) = A, \tag{7}$$

$$s(0) = 0, \tag{8}$$

donde la temperatura de la fases sólida y la líquida son, respectivamente, $u_i = u_i(x,t)$ para $i = 1, 2$, u^* es la temperatura de congelación con $A < u^* < B$ y $\ell > 0$ es el calor latente de fusión por unidad de masa.

Los coeficientes térmicos variables y dependientes de la temperatura están dados por:

$$k_i(u_i) = k_i^* \left[1 + \beta_i \left(\tfrac{u_i - B}{u^* - B}\right)^{p_i}\right], \tag{9}$$

$$c_i(u_i) = c_i^* \left[1 + \beta_i \left(\tfrac{u_i - B}{u^* - B}\right)^{p_i}\right], \tag{10}$$

con $\beta_i > 0$ y $p_i \geq 0$, donde $k_i^* = k_i\left(u^*\right)$ y $c_i^* = c_i\left(u^*\right)$ son las conductivades térmicas y calores específicos, respectivamente para $i = 1, 2$. Además, la difusividad térmica del sólido y del líquido están dadas por $\alpha_i = \dfrac{k_i^*}{\rho_i c_i^*}$ para $i = 1, 2$.

En este trabajo se prueba existencia y unicidad de solución de tipo similaridad para el problema definido por (2)-(8), donde las temperaturas $u_1 = u_1(x,t)$ y $u_2 = u_2(x,t)$ dependen de la variable de similaridad dada por:

$$\eta = \frac{x}{2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}}, \tag{11}$$

donde $\lambda > 0$ es un constante adimensional a determinar. A través del siguiente cambio de variables:

$$y_1(\eta) = \frac{B - u_1(x,t)}{B - u^*} \geq 0, \qquad y_2(\eta) = \frac{B - u_2(x,t)}{B - u^*} \geq 0, \tag{12}$$

la frontera libre está dada por:

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}, \tag{13}$$

y por lo tanto se tiene que el problema de Stefan (2)-(8) tiene una solución de tipo similaridad (u_1, u_2, s) dada por:

$$u_1(x,t) = (u^* - B)\, y_1(\eta) + B, \quad rs(t) < x < s(t), \quad t > 0, \tag{14}$$

$$u_2(x,t) = (u^* - B)\, y_2(\eta) + B, \quad x > s(t), \quad t > 0, \tag{15}$$

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}, \qquad t > 0, \tag{16}$$

si y solo si $y_1 = y_1(\eta)$, $y_2 = y_2(\eta)$ y el parámetro $\lambda > 0$ satisfacen el siguiente problema diferencial ordinario:

$$\tfrac{\alpha_1}{2\lambda^2\alpha_2}\left[(1 + \beta_1 y_1^{p_1}(\eta))y_1'(\eta)\right]' + (\eta - r)\left(1 + \beta_1 y_1^{p_1}(\eta)\right) y_1'(\eta) = 0, \qquad r < \eta < 1, \tag{17}$$

$$y_1(r) = \tfrac{A - B}{u^* - B}, \tag{18}$$

$$y_1(1) = 1, \tag{19}$$

$$\tfrac{1}{2\lambda^2}\left[(1 + \beta_2 y_2^{p_2}(\eta))y_2'(\eta)\right]' + \eta\left(1 + \beta_2 y_2^{p_2}(\eta)\right) y_2'(\eta) = 0, \qquad \eta > 1, \tag{20}$$

$$y_2(1) = 1, \tag{21}$$

$$y_2(\infty) = 0, \tag{22}$$

$$\left(\tfrac{1+\beta_1}{1+\beta_2}\right) \tfrac{k_1^*}{k_2^*} y_1'(1) - y_2'(1) = \tfrac{-2\lambda^2}{(1+\beta_2)} \tfrac{\rho_1}{\rho_2 \mathrm{Ste}}, \tag{23}$$

donde $\mathrm{Ste} = \frac{c_2^*(B - u^*)}{\ell} > 0$ es el número de Stefan. En la sección 2, se prueba existencia y unicidad de solución del problema (2)-(8) a través del análisis del problema (17)-(23).

2. Existencia y unicidad de solución

En esta sección se prueba existencia y unicidad de solución del problema diferencial ordinario (17)-(23) transformándolo en un problema funcional equivalente.

Lema 1 *(y_1, y_2, λ) es una solución del problema* (17)-(23) *si y solo si (y_1, y_2, λ) satisface el siguiente problema funcional:*

$$\mathcal{F}_1(y_1(\eta)) = \mathcal{G}_1(\eta), \qquad r < \eta < 1, \tag{24}$$
$$\mathcal{F}_2(y_2(\eta)) = \mathcal{G}_2(\eta), \qquad \eta > 1, \tag{25}$$
$$\mathcal{M}(\lambda) = \mathcal{N}(\lambda), \tag{26}$$

donde

$$\mathcal{F}_i(x) = x + \tfrac{\beta_i}{1+p_i} x^{1+p_i}, \qquad i = 1, 2, \qquad x \geq 0, \tag{27}$$

$$\mathcal{G}_1(\eta) = \left(\mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\tfrac{A-B}{u^*-B}\right)\right) \frac{\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta-r)\right)}{\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)} + \mathcal{F}_1\left(\tfrac{A-B}{u^*-B}\right), \qquad r < \eta < 1, \tag{28}$$

$$\mathcal{G}_2(\eta) = \mathcal{F}_2(1)\tfrac{\operatorname{erfc}(\lambda\eta)}{\operatorname{erfc}(\lambda)}, \qquad \eta > 1, \tag{29}$$

$$\mathcal{M}(x) = \sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}\tfrac{k_1^*}{k_2^*}\left(\mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\tfrac{A-B}{u^*-B}\right)\right) \frac{\exp\left(-x^2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1-r)^2\right)}{\operatorname{erf}\left(x\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)} + \mathcal{F}_2(1)\tfrac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)}, \qquad x \geq 0, \tag{30}$$

$$\mathcal{N}(x) = -x\tfrac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}}\tfrac{\rho_1}{\rho_2}, \qquad x \geq 0. \tag{31}$$

Prueba. Supongamos que (y_1, y_2, λ) es una solución del problema (17)-(23).

Definimos $v_1(\eta) = (1 + \beta_1 y_1^{p_1}(\eta))y_1'(\eta)$. Teniendo en cuenta la ecuación (17) obtenemos

$$v_1(\eta) = C_1 \exp\left(-\lambda^2\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}(\eta - r)^2\right), \qquad r < \eta < 1, \tag{32}$$

donde $C_1 \in \mathbb{R}$. Luego, integrando respecto de η se obtiene que la solución general de la ecuación diferencial ordinaria (17) debe verificar la siguiente ecuación:

$$y_1(\eta) + \frac{\beta_1}{1 + p_1} y_1^{1+p_1}(\eta) = \frac{C_1}{\lambda}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta - r)\right) + D_1, \qquad r < \eta < 1, \tag{33}$$

donde $D_1 \in \mathbb{R}$. Si imponemos las condiciones de borde (18) y (19) tenemos que

$$C_1 = \left(\mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\tfrac{A-B}{u^*-B}\right)\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\frac{\lambda}{\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)}, \qquad D_1 = \mathcal{F}_1\left(\tfrac{A-B}{u^*-B}\right), \tag{34}$$

donde $\mathcal{F}_1$ está dada por (27). Por lo tanto, y_1 satisface la ecuación (24).

De manera similar, definimos $v_2(\eta) = (1 + \beta_2 y_2^{p_2}(\eta))y_2'(\eta)$. De la ecuación (20) e imponiendo las condiciones (21) y (22) se obtiene que y_2 satisface la ecuación (25).

Finalmente, de (32) y de la expresión que se obtiene para v_2, se tiene la ecuación (26).

Recíprocamente, si (y_1, y_2, λ) es una solución del sistema (24)-(26) entonces fácilmente puede probarse que se satisface (17)-(23). □

Lema 2 *El problema funcional dado por* (24), (25) *y* (26) *tiene una única solución (y_1, y_2, λ).*

Prueba. Notar que para cada $i = 1, 2$, $\mathcal{F}_i : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ es una función estrictamente creciente. Como $A < u^* < B$ entonces tenemos que $\frac{A-B}{u^*-B} > 1$ y luego $\mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{u^*-B}\right) > \mathcal{F}_1(1)$. Por lo tanto, para cada $\lambda > 0$, tenemos que la función $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1(\eta)$ dada por (28) satisface $\mathcal{G}_1(\eta) > \mathcal{F}_1(1) > 0$.

Así, para cada $\lambda > 0$ existe una única función $y_1 \in C^2(r, 1)$ que es solución de la ecuación (24) y está dada por

$$y_1(\eta) = \mathcal{F}_1^{-1}(\mathcal{G}_1(\eta)), \qquad r < \eta < 1. \tag{35}$$

Análogamente, teniendo en cuenta que $\mathcal{G}_2(\eta) > 0$ para cada $\eta > 1$, obtenemos una única función $y_2 \in C^2(1, +\infty)$ solución de la ecuación (25) definida por

$$y_2(\eta) = \mathcal{F}_2^{-1}(\mathcal{G}_2(\eta)), \qquad \eta > 1. \tag{36}$$

Ahora estudiaremos la ecuación (26). Para ello, reescribimos la función $\mathcal{M}$ dada por (30) como sigue:

$$\mathcal{M}(x) = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\frac{k_1^*}{k_2^*}\left(\mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{u^*-B}\right)\right)\mathcal{M}_1\left(x\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right) + \mathcal{F}_2(1)\mathcal{M}_2(x) \tag{37}$$

con

$$\mathcal{M}_1(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erf}(x)}, \qquad \mathcal{M}_2(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)}. \tag{38}$$

De las propiedades de las funciones $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, obtenemos que existe una única solución $\lambda > 0$ de la ecuación $\mathcal{M}(x) = \mathcal{N}(x)$, $x > 0$. □

De todo lo expuesto previamente podemos enunciar el siguiente teorema que nos asegura la existencia y unicidad de solución de tipo similaridad al problema de Stefan planteado.

Teorema 1 *El problema de Stefan a dos fases* (2)-(8) *tiene una única solución de tipo similaridad* (u_1, u_2, s) *dada por* (14)-(16) *donde* (y_1, y_2, λ) *es la única solución del problema funcional* (24)-(26).

Nota 1 *Del Lema 1 es fácil ver que se satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$1 = y_1(1) < y_1(\eta) < y_1(r) = \frac{A-B}{u^*-B}, \quad r < \eta < 1, \tag{39}$$

$$0 = y_2(\infty) < y_2(\eta) < y_2(1) = 1, \quad \eta > 1, \tag{40}$$

y de (12) *se obtiene que:*

$$A < u_1(x,t) < u^*, \qquad rs(t) < x < s(t),\ t > 0, \tag{41}$$

$$u^* < u_2(x,t) < B, \qquad x > s(t),\ t > 0. \tag{42}$$

Nota 2 *Si consideramos $p_1 = p_2 = 0$, los coeficientes térmicos dados en (9) and (10) son constantes y se recuperan los resultados obtenidos en [1].*

Nota 3 *Si consideramos $p_1 = p_2 = 1$, los coeficientes térmicos dados en (9) and (10) son lineales y se puede obtener una solución explícita del problema de Stefan:*

$$u_1(x,t) = \frac{u^*-B}{\beta_1}\left(-1 + \sqrt{1 + 2\beta_1\hat{\mathcal{G}}_1(\eta)}\right) + B, \qquad r < \eta < 1, \tag{43}$$

donde

$$\hat{\mathcal{G}}_1(\eta) = \left(1 + \frac{\beta_1}{2} - \frac{A-B}{u^*-B} - \frac{\beta_1}{2}\left(\frac{A-B}{u^*-B}\right)^2\right)\frac{\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta-r)\right)}{\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)} + \frac{A-B}{u^*-B} + \frac{\beta_1}{2}\left(\frac{A-B}{u^*-B}\right)^2, \tag{44}$$

$$u_2(x,t) = \frac{u^*-B}{\beta_2}\left(-1 + \sqrt{1 + \beta_2(2+\beta_2)\frac{\operatorname{erfc}(\lambda\eta)}{\operatorname{erfc}(\lambda)}}\right) + B, \qquad \eta > 1, \tag{45}$$

y $\lambda > 0$ es la única solución de la ecuación:

$$\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\frac{k_1^*}{k_2^*}\left(1 + \frac{\beta_1}{2} - \frac{A-B}{u^*-B} - \frac{\beta_1}{2}\left(\frac{A-B}{u^*-B}\right)^2\right)\frac{\exp\left(-x^2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1-r)^2\right)}{\operatorname{erf}\left(x\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)} + \left(1 + \frac{\beta_2}{2}\right)\frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)} = -x\frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}}\frac{\rho_1}{\rho_2}. \tag{46}$$

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente patrocinado por los Proyectos 80020210100002 y 80020210200003 de la Universidad Austral, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

[1] M. NATALE, E. SANTILLAN MARCUS, AND D. TARZIA, *Explicit solutions for one-dimensional two-phase free boundary problems with either shrinkage or expansion*, Non-linear Analysis, Vol. 11 (2010), pp. 1946-1952.

[2] A. KUMAR, A. K. SINGH, AND R. RAJEEV, *A moving boundary problem with variable specific heat and thermal conductivity*, Journal of King Saud University - Science, Vol. 32 (2020), pp. 384-389.

[3] A. KUMAR, A. K. SINGH, AND R. RAJEEV, *A Stefan problem with temperature and time dependent thermal conductivity*, Journal of King Saud University - Science, Vol. 32 (2020), pp. 97-101.