Matemática Aplicada, Computacional e Industrial

MACI

Vol. 8

2021

Trabajos presentados al VIII MACI 2021

Proceedings of VIII MACI 2021

La Plata, 3 al 7 de mayo de 2021

ASOCIACION ARGENTINA DE MATEMATICA APLICADA COMPUTACIONAL E INDUSTRIAL

Existencia y unicidad de solución de un problema de Stefan a una fase con una fuente de calor que depende del flujo de temperatura en el borde fijo

Julieta Bollati†‡, María F. Natale‡, José A. Semitiel‡ y Domingo A. Tarzia†‡

†Depto. Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, fnatale@austral.edu.ar, jsemitiel@austral.edu.ar
‡CONICET, Argentina, jbollati@austral.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar

Resumen: Se considera un problema de Stefan a una fase para un material semi-infinito con una conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura. Se asume una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo $x = 0$ y se considera además una fuente de calor dependiente del flujo de temperatura en el borde fijo $x = 0$. Se prueba existencia y unicidad de solución de tipo similaridad a través de la equivalencia con un problema funcional.

Palabras clave: *problema de Stefan, coeficientes térmicos variables, fuente de calor variable*
2000 AMS Subject Classification: 34A34 - 35K05 - 80A22 - 35R35 - 35C06

1. Introducción

En este trabajo, se considera un problema de fusión a una fase con conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura, y una fuente de calor externa dependiente del flujo de temperatura en el borde fijo $x = 0$. Algunos modelos que involucran coeficientes térmicos dependientes de la temperatura pueden encontrarse en [2, 4, 5, 7, 8]. El modelo matemático que describe este proceso está gobernado por las siguientes ecuaciones:

$$\rho c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\lambda_0}{\sqrt{t}}\frac{\partial T}{\partial x}(0,t), \qquad 0 < x < s(t), \qquad t > 0, \tag{1}$$

$$T(0,t) = T_0 > 0, \qquad t > 0, \tag{2}$$

$$T(s(t),t) = T_f < T_0, \qquad t > 0, \tag{3}$$

$$k_0\frac{\partial T}{\partial x}(s(t),t) = -\rho l \dot{s}(t), \qquad t > 0, \tag{4}$$

$$s(0) = 0, \tag{5}$$

donde las funciones a determinar son la temperatura $T = T(x,t)$ y la frontera libre $x = s(t)$ que separa dichas fases. Los parámetros $\rho > 0$ (densidad de masa), $l > 0$ (calor latente de fusión por unidad de masa), $T_0 > 0$ (temperatura impuesta en el borde fijo $x = 0$) con $T_0 > T_f$ (temperatura de cambio de fase en la frontera libre $x = s(t)$) son constantes conocidas. Las funciones $k = k(T)$ (conductividad térmica) y $c = c(T)$ (calor específico) se definen como en [6] por:

$$k(T) = k_0\left(1 + \delta\left(\tfrac{T-T_f}{T_0-T_f}\right)^p\right) \tag{6}$$

$$c(T) = c_0\left(1 + \delta\left(\tfrac{T-T_f}{T_0-T_f}\right)^p\right), \tag{7}$$

donde δ es una constante positiva dada, k_0 y c_0 son la conductividad térmica y calor específico de referencia, respectivamente. En la ecuación (1) se considera una fuente de calor como en [3] donde $\lambda_0 > 0$ es una constante dada.

El problema (1)-(5) sin fuente de calor fue considerado previamente en [1] donde se obtuvo un problema diferencial ordinario equivalente y se probó existencia y unicidad de solución.

En este trabajo se propone solución de tipo similaridad para el problema (1)-(5). Introduciendo la variable de similaridad

$$\eta = \tfrac{x}{2a\sqrt{t}}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{8}$$

donde $a^2 = \frac{k_0}{\rho c_0}$ (difusividad térmica) y el siguiente cambio de variables

$$y(\eta) = \tfrac{T(x,t)-T_f}{T_0-T_f} \geq 0, \tag{9}$$

es fácil ver que el problema de Stefan (1)-(5) tiene una solución de similaridad (T, s) dada por:

$$T(x,t) = (T_0 - T_f)\, y\left(\tfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + T_f, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{10}$$

$$s(t) = 2a\lambda\sqrt{t}, \qquad t > 0 \tag{11}$$

si y sólo si la función $y = y(\eta)$ y el parámetro $\lambda > 0$ satisfacen el siguiente problema diferencial ordinario:

$$2\eta(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta) + [(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta)]' = Ay'(0), \qquad 0 < \eta < \lambda, \tag{12}$$

$$y(0) = 1, \tag{13}$$

$$y(\lambda) = 0, \tag{14}$$

$$y'(\lambda) = -\tfrac{2\lambda}{\text{Ste}}, \tag{15}$$

donde $A = \frac{2\lambda_0}{\rho c_o a}$, $\delta \geq 0$, $p > 0$ y $\text{Ste} = \frac{c_0(T_0-T_f)}{l} > 0$ es el número de Stefan.

En la sección 2, se prueba existencia y unicidad de solución del problema (1)-(5) a través del análisis del problema diferencial ordianario equivalente (12)-(15).

2. Existencia y Unicidad de solución

Se estudia la existencia y unicidad de solución del problema (1)-(5) a través del problema diferencial ordinario (12)-(15).

Lema 1 *Sean $p > 0$, $\delta > 0$, $\lambda > 0$, $y \in C^\infty[0, \lambda]$ e $y \geq 0$. Entonces (y, λ) es solución del problema diferencial ordinario* (12)-(15) *si y solo si λ es la única solución de la ecuación:*

$$\frac{\sqrt{\pi}x\exp(x^2)}{\text{Ste}\left(A\int_0^x \exp(z^2)\,dz + 1 + \delta\right)}\left(A\int_0^x \exp(z^2)\left(\text{erf}(x) - \text{erf}(z)\right)\,dz + (1+\delta)\text{erf}(x)\right) = 1 + \tfrac{\delta}{p+1},\ x > 0, \tag{16}$$

y la función $y = y(\eta)$ satisface la ecuación

$$y(\eta)\left(1 + \tfrac{\delta}{p+1}y^p(\eta)\right) = 1 + \tfrac{\delta}{p+1} - \frac{\sqrt{\pi}\lambda\exp(\lambda^2)}{\text{Ste}\left(A\int_0^\lambda \exp(z^2)\,dz + 1 + \delta\right)}\left(A\int_0^\eta \exp(z^2)\left(\text{erf}(\eta) - \text{erf}(z)\right)\,dz + \right.$$
$$\left. +(1+\delta)\text{erf}(\eta)\right), \qquad 0 \leq \eta \leq \lambda. \tag{17}$$

Prueba. Sea (y, λ) solución del problema (12)-(15).

Se define $v(\eta) = (1 + \delta y^p(\eta))\, y'(\eta)$. Teniendo en cuenta (12) se tiene

$$(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta) = \exp(-\eta^2)y'(0)\left(A\int_0^\eta \exp(z^2)\,dz + 1 + \delta\right). \tag{18}$$

Si se integra (18) en $(0, \eta)$, y se tiene en cuenta la condición (13) se deduce

$$y(\eta) + \tfrac{\delta}{p+1}y^{p+1}(\eta) = 1 + \tfrac{\delta}{p+1} + y'(0)\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\left(A\int_0^\eta \exp(z^2)\left(\text{erf}(\eta) - \text{erf}(z)\right)\,dz + (1+\delta)\text{erf}(\eta)\right) \tag{19}$$

Tomando $\eta = \lambda$ en la ecuación (18) y usando las condiciones (14)-(15) se obtiene que

$$y'(0) = -\frac{2\lambda\exp(\lambda^2)}{\text{Ste}\left(A\int_0^\lambda \exp(z^2)\,dz + 1 + \delta\right)} \tag{20}$$

y sustituyendo (20) en (19), se obtiene que $y = y(\eta)$ es solución de la ecuación (17).

Tomando $\eta = \lambda$ en la ecuación (19), usando (20) y la condición (14), se obtiene que $\lambda > 0$ es la única solución de la ecuación (16).

Recíprocamente, si (y, λ) es solución del problema funcional (16)-(17), a través de cálculos elementales se puede ver que (y, λ) es solución del problema diferencial ordinario (12)-(15) . $\square$

El lema anterior prueba la equivalencia entre entre el problema diferencial ordinario (12)-(15) y el problema funcional (16)-(17). En el siguiente lema se prueba la existencia y unicidad de solución de este último.

Lema 2 *Si $p > 0$ y $\delta > 0$, entonces existe una única solución (y, λ) al problema funcional* (16)-(17) *con $\lambda > 0$, $y \in C^\infty[0, \lambda]$, $y \geq 0$.*

Prueba. Sean las funciones definidas por

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi} x \exp(x^2)}{\text{Ste}\left(A \int_0^x \exp(z^2)\, dz + 1 + \delta\right)} \left(A \int_0^x \exp(z^2) \left(\text{erf}(x) - \text{erf}(z)\right)\, dz + (1+\delta)\text{erf}(x) \right),\ x > 0,$$

y

$$F(x) = x + \tfrac{\delta}{p+1} x^{p+1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Dado que $f(0) = 0$, $f(+\infty) = +\infty$ y $f'(x) > 0$, existe un único $\lambda > 0$ solución de la ecuación (16).

Por otro lado, como $F(0) = 0$, $F(1) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$ y F es creciente, es posible definir la función $F^{-1} : [0, 1 + \frac{\delta}{p+1}] \to [0, 1]$.

Para el único valor $\lambda > 0$ obtenido de (16), se define la siguiente función:

$$G(x) = 1 + \tfrac{\delta}{p+1} - \frac{\sqrt{\pi}\lambda \exp(\lambda^2)}{\text{Ste}\left(A \int_0^\lambda \exp(z^2)\, dz + 1 + \delta\right)} \left(A \int_0^x \exp(z^2) \left(\text{erf}(x) - \text{erf}(z)\right)\, dz + (1+\delta)\text{erf}(x) \right),$$

donde $x \in [0, \lambda]$.

Dado que $G(0) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$, $G(\lambda) = 0$ y $G'(x) < 0$ por lo que G es decreciente, se tiene que $G(x) \in \left[0, 1 + \frac{\delta}{p+1}\right]$ para toda $x \in [0, \lambda]$.

Por lo tanto, existe una única $y \in C^\infty[0, \lambda]$ solución de la ecuación

$$F\left(y(\eta)\right) = G(\eta),$$

dada por

$$y(\eta) = F^{-1}\left(G(\eta)\right), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda. \tag{21}$$

$\square$

De acuerdo a lo presentado en la introducción y a los lemas previos, se procede a probar que existe una única solución al problema (1)-(5).

Teorema 1 *El problema de Stefan gobernado por* (1)-(5) *tiene una única solución de tipo similaridad dada por*

$$T(x,t) = (T_0 - T_f)\, y\left(\tfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + T_f, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{22}$$

$$s(t) = 2a\lambda\sqrt{t}, \qquad t > 0 \tag{23}$$

donde (y, λ) es la única solución del problema funcional (16)-(17) *. Es decir $\lambda > 0$ es la única solución de la ecuación* (16) *y la función $y = y(\eta)$ viene dada por* (21).

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido parcialmente patrocinado por el Proyecto PIP No 0275 de CONICET-UA, Rosario, Argentina, y ANPCyT PICTO Austral 2016 No 0090, y por European Union's Horizon 2020 Research and Innovation Programme under the Marie Sklodowska-Curie grant agreement 823731 CONMECH.

REFERENCIAS

[1] J. BOLLATI, M.F. NATALE, J. SEMITIEL, AND D. TARZIA, *Existence and uniqueness of solution for two one-phase Stefan problems with variable thermal coefficients*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 51 (2020), pp.1-11.

[2] A. BRIOZZO, AND M. NATALE, *One-dimensional nonlinear Stefan problems in Storm's materials*, Mathematics, 2 (2014), pp. 1-11.

[3] A. BRIOZZO AND M. NATALE, *Two Stefan problems for a non-classical heat equation with nonlinear thermal coefficients*, Differential and Integral Equations, 27 (2014), pp. 1187-1202.

[4] A. BRIOZZO, AND M. NATALE, *Nonlinear Stefan problem with convective boundary condition in Storm's materials*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 67(2) (2016), pp.1-11.

[5] A. BRIOZZO, AND M. NATALE, *Two-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients and a convective boundary condition*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 58 (2021) 103204.

[6] A. KUMAR, A. K. SINGH,AND RAJEEV, *A moving boundary problem with variable specific heat and thermal conductivity*, Journal of King Saud University - Science, (2018), doi: https://doi.org/10.1016/j.jksus.2018.05.028.

[7] O. MAKINDE, N. SANDEEP, T. AJAYI, AND I. ANIMASAUN, *Numerical Exploration of Heat Transfer and Lorentz Force Effects on the Flow of MHD Casson Fluid over an Upper Horizontal Surface of a Thermally Stratified Melting Surface of a Paraboloid of Revolution*, Int. J. Nonlinear Sci. Simul., 19(2-3) (2018), pp. 93-106.

[8] M. NATALE, AND D. TARZIA, *Explicit solutions to the two-phase Stefan problem for Storm-type materials*, J. Phys. A: Math. Gen., 33 (2000), pp.395–404.