Relaciones entre las soluciones de problemas de Stefan a tres fases con distintas condiciones en el borde fijo

Julieta Bollati[†‡], María F. Natale[†], José Semitiel[†] y Domingo A. Tarzia[†‡]

[†] *Universidad Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario, Argentina, fnatale@austral.edu.ar, jsemitiel@austral.edu.ar*
[‡] *CONICET, Argentina, jbollati@austral.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar*

Resumen:
En este trabajo se obtiene la existencia y la unicidad de solución de un problema de Stefan a tres fases imponiendo una condición convectiva en el borde fijo que modela un proceso de fusión de un material semi-infinito. Además, se establece una equivalencia entre la solución obtenida y la solución del problema de Stefan a tres fases que surge imponiendo una condición de Dirichlet en el borde fijo. Esta equivalencia se establece bajo la condición de que los datos del problema cumplan una relación específica, ofreciendo nuevos enfoques sobre el comportamiento de los problemas de cambio de fase con diferentes condiciones de contorno.

Palabras clave: *Problema de Stefan, condición de tipo Robin, Solución explícita de tipo similaridad*
2000 AMS Subject Classification: 35R35 - 80A22 - 35K05

1. Introducción

Durante el proceso de solidificación o fusión, el material puede dividirse en tres regiones distintas: una región sólida, una zona pastosa donde coexisten las fases sólida y líquida, y una región líquida. En el caso de materiales polimorfos como el hierro metálico y la sílice, existen varias formas cristalinas en la fase sólida, lo que da lugar a múltiples fronteras libres entre las diferentes fases. Por ejemplo, el hierro metálico tiene tres formas cristalinas principales, mientras que la sílice existe en varias formas distintas como el cuarzo, tridimita y cristobalita bajo alta presión. Cuando estos materiales polimorfos se congelan o se funden, diversas fases se separan mediante múltiples interfaces móviles [3].

La transferencia de calor a tres fases presenta desafíos significativos que son críticos para una variedad de aplicaciones. Por ejemplo, en [2], se desarrolla una solución analítica para la ecuación de transferencia de calor dependiente del tiempo que tiene en cuenta el cambio de fase. Esta solución permite un nuevo algoritmo numérico para analizar las variaciones de temperatura y flujo de calor en una pared de edificio de tres capas bajo condiciones transitorias ambientales. Además, en [1] se examina una simulación numérica de un sistema térmico de tubo triplex que combina varios materiales de cambio de fase con espuma metálica porosa. Otra aplicación relevante se presenta en [4], donde se desarrolla una solución analítica para la transferencia acoplada de calor y masa durante la congelación de materiales con alto contenido de agua.

En este trabajo se presentan formalmente dos problemas de Stefan a tres fases con diferentes condiciones de contorno. Además, se demuestra la existencia y la unicidad de la solución al imponer una condición de tipo Robin en el borde fijo $x = 0$. Luego, se recupera de [6] la única solución de semejanza que corresponde al caso en el que se impone una condición de contorno de tipo Dirichlet en el borde fijo $x = 0$. Finalmente, y siguiendo [5], se establece una equivalencia entre los problemas analizados.

2. Formulación matemática

Se considera un problema de Stefan unidimensional a tres fases para la fusión de un material semi-inifnito $x \geq 0$ donde se imponenen diferentes condiciones en el borde fijo $x = 0$. Consiste en hallar la temperatura:

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \Phi_3(x,t) & \text{si} \quad 0 < x < y_2(t), & t > 0, \\ \Phi_2(x,t) & \text{si} \quad y_2(t) < x < y_1(t), & t > 0, \\ \Phi_1(x,t) & \text{si} \quad y_1(t) < x, & t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

y las fronteras libres $x = y_i(t)$, $i = 1, 2$, $t > 0$ que separan las tres regiones tales que

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial t} = \alpha_3 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < y_2(t), \quad t > 0, \tag{2}$$
$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = \alpha_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2}, \qquad y_2(t) < x < y_1(t), \quad t > 0, \tag{3}$$
$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}, \qquad x > y_1(t), \quad t > 0, \tag{4}$$
$$\Phi_3(y_2(t), t) = \Phi_2(y_2(t), t) = B, \qquad t > 0, \tag{5}$$
$$\Phi_2(y_1(t), t) = \Phi_1(y_1(t), t) = C, \qquad t > 0, \tag{6}$$
$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_1(+\infty, t) = D, \qquad t > 0, \tag{7}$$
$$k_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(y_2(t), t) - k_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}(y_2(t), t) = \delta_2 \dot{y_2}(t), \qquad t > 0, \tag{8}$$
$$k_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(y_1(t), t) - k_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(y_1(t), t) = \delta_1 \dot{y_1}(t), \qquad t > 0, \tag{9}$$
$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \tag{10}$$

donde las constantes positivas $\alpha_i = \frac{k_i}{\rho c_i}$, k_i y c_i reprensentan la difusividad térmica, la conductividad térmica y el calor específico, respectivamente, para la fase $i = 1, 2, 3$ siendo ρ la densidad de masa común a las tres fases. Se asume a través de todo el trabajo que $\alpha_2 > \alpha_3$.

El calor latente por unidad de volumen utilizado para pasar de la fase i a $i + 1$ para $i = 1, 2$ es $\delta_i = \rho \ell_i$ donde $\ell_i > 0$ representa el calor latente por unidad de masa. Las temperaturas de cambio de fase B y C y la temperatura inicial D verifican la condición $B > C > D$.

Se define el problema **(P1)** al gobernado por (2)-(10) imponiendo una condición de Robin en el borde fijo dada por:

$$k_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}(0, t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}} \left(\Phi_3(0, t) - A_\infty \right), \qquad t > 0, \tag{11}$$

donde $h_0 > 0$ es el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo y $A_\infty > B$ es la temperatura ambiente.

De manera similar se plantea el problema **(P2)** definido por (2)-(10) imponiendo una condición de Dirichlet en el borde fijo dada por:

$$\Phi_3(0, t) = A > B, \qquad t > 0. \tag{12}$$

En este trabajo se prueba la existencia y la unicidad de solución de tipo similaridad del problema **(P1)** definido por (2)-(10) y (11) y se establece una relación con la solución del problema **(P2)** definido por (2)-(10) y (12) dada en [6].

3. Equivalencia entre las soluciones de los problemas (P1) y (P2)

Para establecer la equivalencia entre las soluciones de estos problemas, se necesita la solución explícita de tipo similaridad del problema **(P1)** la cual se establece en el siguiente teorema:

Teorema 1 *Si $h_0 > h_2$ siendo*

$$h_2 = \frac{B - C}{A_\infty - B} \sqrt{\frac{k_2 k_3 c_2}{\pi c_3 \alpha_3}} \frac{1}{\operatorname{erf}\left(z_0 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \right)} \tag{13}$$

entonces el problema **(P1)** *tiene una única solución dada por*

$$v_3(x,t) = \frac{\frac{Bk_3}{h_0\sqrt{\pi\alpha_3}} + A_\infty \operatorname{erf}\left(\xi_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\right) - (A_\infty - B)\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_3 t}}\right)}{\frac{k_3}{h_0\sqrt{\pi\alpha_3}} + \operatorname{erf}\left(\xi_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\right)}, \qquad 0 < x < w_2(t),\ t > 0, \tag{14}$$

$$v_2(x,t) = \frac{-C\operatorname{erf}\left(\xi_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) + B\operatorname{erf}\left(\xi_1\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) - (B-C)\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\xi_1\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\xi_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right)}, \qquad w_2(t) < x < w_1(t),\ t > 0, \tag{15}$$

$$v_1(x,t) = \frac{C\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right)\right) + D\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right) - \operatorname{erf}(\xi_1)\right)}{\operatorname{erfc}(\xi_1)}, \qquad x > w_1(t),\ t > 0, \tag{16}$$

$$w_2(t) = 2\xi_2\sqrt{\alpha_1 t}, \qquad t > 0, \tag{17}$$

$$w_1(t) = 2\xi_1\sqrt{\alpha_1 t}, \qquad t > 0, \tag{18}$$

donde

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\operatorname{erf}^{-1}\left(H(\xi_1)\right), \tag{19}$$

y ξ_1 *es la única solución de la ecuación*

$$Q(z) = U(z), \quad z > z_0, \tag{20}$$

siendo

$$H(z) = \operatorname{erf}\left(z\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) - \frac{\text{Ste}_2}{\sqrt{\pi}}\frac{\ell_2}{\ell_1}\sqrt{\frac{k_2c_1}{k_1c_2}}\frac{\exp\left(-z^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{\varphi(z)}, \quad \varphi(z) = z + \frac{\text{Ste}_1}{\sqrt{\pi}}\frac{\exp\left(-z^2\right)}{\operatorname{erfc}(z)}, \quad z \geq 0, \tag{21}$$

$$\text{Ste}_1 = \frac{c_1(C-D)}{\ell_1}, \qquad \text{Ste}_2 = \frac{c_2(B-C)}{\ell_2}, \qquad z_0 = H^{-1}(0), \tag{22}$$

$$Q(z) = \frac{\ell_1}{\ell_2}\varphi(z)\exp\left(z^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right),\ z \geq 0, \qquad U(z) = T\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\operatorname{erf}^{-1}(H(z))\right), \quad z > z_0, \tag{23}$$

$$T(z) = \frac{\text{Ste}_2}{\sqrt{\pi}c_2}\frac{A_\infty - B}{B-C}\sqrt{\frac{k_3c_1c_3}{k_1}}\frac{\exp\left(-z^2\alpha_1\left(\frac{1}{\alpha_3} - \frac{1}{\alpha_2}\right)\right)}{\frac{k_3}{h_0\sqrt{\pi\alpha_3}} + \operatorname{erf}\left(z\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\right)} - z\exp\left(z^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right), \quad z > z_0. \tag{24}$$

Se puede expresar la solución del problema de Stefan con condición de Dirichlet para el caso particular en el que se consideran tres fases, según [6], de la siguiente manera:

Teorema 2 *El problema* **(P2)** *tiene una única solución de tipo similaridad dada por:*

$$u_3(x,t) = A\frac{\operatorname{erf}\left(\mu_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_3 t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\mu_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\right)} + B\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_3 t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\mu_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\right)}, \qquad 0 < x < r_2(t),\ t > 0, \tag{25}$$

$$u_2(x,t) = \frac{(C-B)\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right) - C\operatorname{erf}\left(\mu_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) + B\operatorname{erf}\left(\mu_1\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\mu_1\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\mu_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right)}, \qquad r_2(t) < x < r_1(t),\ t > 0, \tag{26}$$

$$u_1(x,t) = D + (C-D)\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right)}{\operatorname{erfc}(\mu_1)}, \qquad x > r_1(t),\ t > 0, \tag{27}$$

$$r_2(t) = 2\mu_2\sqrt{\alpha_1 t}, \qquad t > 0, \tag{28}$$

$$r_1(t) = 2\mu_1\sqrt{\alpha_1 t}, \qquad t > 0, \tag{29}$$

donde

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\operatorname{erf}^{-1}\left(H(\mu_1)\right), \tag{30}$$

y μ_1 *es la única solución de la ecuación*

$$Q(z) = V\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\operatorname{erf}^{-1}\left(H(z)\right)\right), \qquad z > z_0, \tag{31}$$

donde H está dada por (21)*,* z_0 *por* (22)*,* Q *por* (23)*, y*

$$V(z) = \frac{A-B}{\ell_2}\sqrt{\frac{c_1 c_3 k_3}{\pi k_1}}\frac{\exp\left(-z^2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\right)}{\operatorname{erf}\left(z\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\right)} - z\exp\left(z^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right), \qquad z > 0. \tag{32}$$

Se formula a continuación la equivalencia entre los problemas **(P1)** y **(P2)**. Por equivalencia, nos referimos a la condición en la que, si los datos de ambos problemas satisfacen una relación específica, entonces se obtendrá la misma solución.

Teorema 3

a) Sean h_0 y A_∞ con $h_0 > h_2$ las constantes dadas en el problema **(P1)** *con condición convectiva donde h_2 está dado por* (13)*. Si vale la siguiente desigualdad:*

$$\frac{\frac{Bk_3}{h_0\sqrt{\pi\alpha_3}}+A_\infty\operatorname{erf}\left(\xi_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\right)}{\frac{k_3}{h_0\sqrt{\pi\alpha_3}}+\operatorname{erf}\left(\xi_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\right)} > B, \tag{33}$$

donde ξ_2 está dada por (19)*, entonces la solución del problema* **(P2)** *con*

$$A = \frac{\frac{Bk_3}{h_0\sqrt{\pi\alpha_3}}+A_\infty\operatorname{erf}\left(\xi_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\right)}{\frac{k_3}{h_0\sqrt{\pi\alpha_3}}+\operatorname{erf}\left(\xi_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\right)}, \tag{34}$$

coincide con la solución del problema **(P1)***.*

b) Sea $A > B$ la constante dada en el problema **(P2)** *con condición de temperatura. Si se satisface la siguiente desigualdad:*

$$\frac{A-B}{(A_\infty-A)\operatorname{erf}\left(\mu_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\right)} > \frac{B-C}{A_\infty-B}\sqrt{\frac{k_2c_2}{k_3c_3}}\frac{1}{\operatorname{erf}\left(z_0\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right)}, \tag{35}$$

donde z_0 está dada por (22)*, μ_2 está dado por* (30) *y $A_\infty > A$, entonces la solución del problema* **(P1)** *con*

$$h_0 = \frac{k_3}{\sqrt{\alpha_3\pi}}\frac{A-B}{A_\infty-A}\frac{1}{\operatorname{erf}\left(\mu_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\right)}, \tag{36}$$

coincide con la solución del problema **(P2)***.*

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente patrocinado por el proyecto PIP-CONICET 11220220100532CO y los proyectos 80020210100002 y 80020210200003 de la Universidad Austral, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

[1] ABANDANI, M. AND GANJI, D., *Melting effect in triplex-tube thermal energy storage system using multiple PCMs-porous metal foam combination*, Journal of Energy Storage, 43 (2021), pp.103154.

[2] ANTONOV, D. AND NIZOVTSEV, M. AND SHCHEPAKINA, E. AND SOBOLEV, V. AND STRIZHAK, P. AND SAZHIN, S., *Heat transfer through a three-layer wall considering the contribution of a phase change: A novel approach to the modelling of the process*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 226 (2024), pp.125500.

[3] CHENG, T., *Numerical analysis of nonlinear multiphase Stefan problems*, Computers and Structures, 75 (2000), pp.225-233.

[4] OLGUÍN, M. AND SALVADORI, V. AND MASCHERONI, R. AND TARZIA, D,, *An analytical solution for the coupled heat and mass transfer during the freezing of high-water content materials*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 51 (2008), pp.4379-4391.

[5] TARZIA, D. A., *Relationship between Neumann solutions for two-phase Lamé-Clapeyron-Stefan problems with convective and temperature boundary conditions*, Thermal Science, 21 (2017), pp.187-197.

[6] WILSON, D. G., *Existence and Uniqueness for Similarity Solutions of One Dimensional Multi-Phase Stefan Problems*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 35 (1978), pp.135-147.