

# SOLUCIONES EXPLÍCITAS DE PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO DISTRIBUIDO, FRONTERA Y DISTRIBUIDO-FRONTERA

Julieta Bollati<sup>†</sup>, Claudia M. Gariboldi<sup>‡</sup> y Domingo A. Tarzia<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Depto. Matemática - CONICET, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.

[JBollati@austral.edu.ar](mailto:JBollati@austral.edu.ar), [DTarzia@austral.edu.ar](mailto:DTarzia@austral.edu.ar)

<sup>‡</sup>Depto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Rio Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Rio Cuarto, Argentina.

[cgariboldi@exa.unrc.edu.ar](mailto:cgariboldi@exa.unrc.edu.ar)

## Resumen:

Se considera un problema estacionario de conducción del calor en un dominio multidimensional acotado  $\Omega$  para la ecuación de Poisson con fuente  $g$  y con condiciones de contorno mixtas dadas por una temperatura  $b$  en la porción  $\Gamma_1$  de frontera y un flujo de calor  $q$  en la porción  $\Gamma_2$  restante de frontera. Además, se considera una familia de problemas estacionarios imponiendo sobre la frontera  $\Gamma_1$  una condición convectiva con coeficiente  $\alpha$  y temperatura exterior  $b$ . Se obtienen de manera explícita, para un dominio rectangular, los controles óptimos, los estados del sistema y estados adjuntos para los siguientes cuatro problemas de control óptimo: un problema de control *distribuido* sobre la fuente de energía  $g$ , dos problemas de control *frontera* sobre el flujo del calor  $q$  y sobre la temperatura  $b$  en un entorno externo a través de una condición de Robin, respectivamente y un problema de control óptimo simultáneo *distribuido-frontera* sobre la fuente  $g$  y el flujo  $q$ . Estas soluciones explícitas podrían ser utilizadas para chequear cálculos numéricos.

**Palabras clave:** Ecuaciones variacionales elípticas, Controles óptimos, Condiciones de contorno mixtas, Soluciones explícitas.

2000 AMS Subject Classification: 35C05,35J25,35J86,35R35,49J20,49K20.

## 1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^n$  cuya frontera regular  $\Gamma$  consiste en la unión de dos porciones disjuntas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  con  $med(\Gamma_1) > 0$  y  $med(\Gamma_2) > 0$ . Se presentan los siguientes problemas estacionarios de conducción del calor  $P$  y  $P_\alpha$  (para cada parámetro  $\alpha > 0$ ) respectivamente, con condiciones de frontera mixtas:

$$\Delta u = g \text{ in } \Omega \quad u|_{\Gamma_1} = b \quad -\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = q \quad (1)$$

$$-\Delta u = g \text{ in } \Omega \quad -\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = \alpha(u - b) \quad -\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = q \quad (2)$$

donde  $g$  es la energía interna en  $\Omega$ ,  $b$  es la temperatura sobre  $\Gamma_1$  para (1) y la temperatura del entorno externo de  $\Gamma_1$  para (2),  $q$  es el flujo de calor sobre  $\Gamma_2$  y  $\alpha > 0$  es el coeficiente de transferencia de calor sobre  $\Gamma_1$ , que satisfacen las hipótesis:  $g \in H = L^2(\Omega)$ ,  $q \in Q = L^2(\Gamma_2)$  y  $b \in B = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ . Estos pueden ser considerados como problemas estacionarios de Stefan [7].

Sean  $u$  y  $u_\alpha$  las únicas soluciones de los problemas elípticos (1) and (2), respectivamente, cuyas formulaciones variacionales están dadas por ([5],[7]):

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \quad u \in K \quad (3)$$

$$a_\alpha(u_\alpha, v) = L_\alpha(v), \quad \forall v \in V, \quad u_\alpha \in V \quad (4)$$

donde

$$V = H^1(\Omega); \quad V_0 = \{v \in V / v|_{\Gamma_1} = 0\} \quad \text{y} \quad K = v_0 + V_0$$

para  $v_0 \in V$  dado, con  $v_0|_{\Gamma_1} = b$ ,  $(g, h)_H = \int_\Omega gh \, dx$  y  $(q, \eta)_Q = \int_{\Gamma_2} q\eta \, d\gamma$ ,

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx; \quad a_\alpha(u, v) = a(u, v) + \alpha(u, v)_{L^2(\Gamma_1)}$$

$$L(v) = (g, v)_H - (q, v)_Q; \quad L_\alpha(v) = L(v) + \alpha(b, v)_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Vinculados a estos sistemas de estado, se han considerado los cuatro problemas de control óptimo que se detallan a continuación ([6],[8]).

### 1.1. CONTROL ÓPTIMO DISTRIBUIDO SOBRE LA FUENTE DE ENERGÍA $g$

En [2] se consideraron los siguientes problemas de control óptimo distribuido:

$$\text{hallar } g_{op} \in H \quad \text{tal que} \quad J_1(g_{op}) = \min_{g \in H} J_1(g), \quad (5)$$

$$\text{hallar } g_{\alpha_{op}} \in H \quad \text{tal que} \quad J_{1\alpha}(g_{\alpha_{op}}) = \min_{g \in H} J_{1\alpha}(g), \quad (6)$$

con  $J_1 : H \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  y  $J_{1\alpha} : H \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , dados por:

$$J_1(g) = \frac{1}{2} \|u_g - z_d\|_H^2 + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2 \quad \text{y} \quad J_{1\alpha}(g) = \frac{1}{2} \|u_{\alpha g} - z_d\|_H^2 + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2$$

donde  $u_g$  y  $u_{\alpha g}$  denotan las únicas soluciones de los problemas (3) y (4) respectivamente, para datos  $q \in Q$ ,  $b \in B$ ,  $z_d \in L^2(\Omega)$  y  $M_1 > 0$ .

### 1.2. CONTROL ÓPTIMO FRONTERA SOBRE EL FLUJO DEL CALOR $q$ SOBRE $\Gamma_2$

En [3] se estudiaron los siguientes problemas de control óptimo frontera:

$$\text{hallar } q_{op} \in U_{ad} \quad \text{tal que} \quad J_2(q_{op}) = \min_{q \in U_{ad}} J_2(q), \quad (7)$$

$$\text{hallar } q_{\alpha_{op}} \in U_{ad} \quad \text{tal que} \quad J_{2\alpha}(q_{\alpha_{op}}) = \min_{q \in U_{ad}} J_{2\alpha}(q), \quad (8)$$

con  $U_{ad} = \{q \in Q : q \geq 0 \text{ en } \Gamma_2\}$ ,  $J_2 : Q \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  y  $J_{2\alpha} : Q \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , dados por:

$$J_2(q) = \frac{1}{2} \|u_q - z_d\|_H^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2 \quad \text{y} \quad J_{2\alpha}(q) = \frac{1}{2} \|u_{\alpha q} - z_d\|_H^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2$$

donde  $u_q$  y  $u_{\alpha q}$  son las únicas soluciones de los problemas (3) y (4) respectivamente, para datos  $g \in H$ ,  $b \in B$ ,  $z_d \in L^2(\Omega)$  y  $M_2 > 0$ .

### 1.3. CONTROL ÓPTIMO FRONTERA SOBRE LA TEMPERATURA $b$ EN UN ENTORNO EXTERNO DE $\Gamma_1$

En [1] se consideraron los siguientes problemas de control óptimo frontera:

$$\text{hallar } b_{op} \in H^{1/2}(\Gamma_1) \quad \text{tal que} \quad J_3(b_{op}) = \min_{b \in H^{1/2}(\Gamma_1)} J_3(b), \quad (9)$$

$$\text{hallar } b_{\alpha_{op}} \in H^{1/2}(\Gamma_1) \quad \text{tal que} \quad J_{3\alpha}(b_{\alpha_{op}}) = \min_{b \in H^{1/2}(\Gamma_1)} J_{3\alpha}(b), \quad (10)$$

con  $J_3 : H^{1/2}(\Gamma_1) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  y  $J_{3\alpha} : H^{1/2}(\Gamma_1) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , dados por:

$$J_3(b) = \frac{1}{2} \|u_b - z_d\|_H^2 + \frac{M_3}{2} \|b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \quad \text{y} \quad J_{3\alpha}(b) = \frac{1}{2} \|u_{\alpha b} - z_d\|_H^2 + \frac{M_3}{2} \|b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2$$

donde  $u_b$  y  $u_{\alpha b}$  son las únicas soluciones de los problemas (3) y (4) respectivamente, para datos  $g \in H$ ,  $q \in Q$ ,  $z_d \in L^2(\Omega)$  y  $M_3 > 0$ .

### 1.4. CONTROL ÓPTIMO SIMULTÁNEO DISTRIBUIDO-FRONTERA SOBRE LA FUENTE $g$ Y EL FLUJO $q$

En [4] se estudiaron los siguientes problemas de control óptimo simultáneo distribuido-frontera:

$$\text{hallar } (g, q)_{op} \in H \times U_{ad} \quad \text{tal que} \quad J_4((g, q)_{op}) = \min_{g \in H, q \in U_{ad}} J_4(g, q), \quad (11)$$

$$\text{hallar } (g, q)_{\alpha_{op}} \in H \times U_{ad} \quad \text{tal que} \quad J_{4\alpha}((g, q)_{\alpha_{op}}) = \min_{g \in H, q \in U_{ad}} J_{4\alpha}(g, q), \quad (12)$$

con los funcionales costo  $J_4 : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  y  $J_{4\alpha} : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  dados por:

$$J_4(g, q) = \frac{1}{2} \|u_{(g,q)} - z_d\|_H^2 + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2$$

$$J_{4\alpha}(g, q) = \frac{1}{2} \|u_{\alpha(g,q)} - z_d\|_H^2 + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2$$

donde  $u_{(g,q)}$  y  $u_{\alpha(g,q)}$  son las únicas soluciones de los problemas (3) y (4) respectivamente, para datos  $b \in B$ ,  $z_d \in L^2(\Omega)$ ,  $M_1 > 0$  y  $M_2 > 0$ .

En los trabajos [1, 2, 3, 4] se obtuvieron resultados de existencia y unicidad de los controles óptimos, como así también resultados de convergencia, cuando el coeficiente de transferencia del calor  $\alpha$  tiende a infinito, de los controles óptimos, los estados del sistema y los estados adjuntos correspondientes, en determinados espacios de Sobolev.

En este trabajo se consideran dominios  $\Omega$  particulares, de forma rectangular y circular en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , y se calculan de manera explícita los controles óptimos, los estados del sistema y estados adjuntos para los cuatro problemas de control óptimo planteados anteriormente.

En la Sección 2 se presenta solamente, por motivo de espacio, las soluciones explícitas en un dominio rectangular en  $\mathbb{R}^2$ .

## 2. SOLUCIONES ÓPTIMAS EN UN DOMINIO RECTANGULAR EN EL PLANO

Si se considera el dominio  $\Omega = (0, x_0) \times (0, y_0)$  con  $x_0 > 0$ ,  $y_0 > 0$ , se obtiene que las soluciones de los problemas (1) y (2) están dadas por:

$$u(x, y) = -g \frac{x^2}{2} + (gx_0 - q)x + b,$$

$$u_\alpha(x, y) = -g \frac{x^2}{2} + (gx_0 - q)x + \frac{gx_0 - q}{\alpha} + b,$$

con datos  $g, b, \alpha$  y  $q$  constantes. Se considera además  $z_d \in \mathbb{R}$ .

Para los problemas de control óptimo distribuidos (5) y (6), las soluciones óptimas son:

$$g_{op} = \frac{x_0^2 \left( \frac{5}{12}qx_0 - \frac{2}{3}(b - z_d) \right)}{\left( \frac{4}{15}x_0^4 + 2M_1 \right)},$$

$$g_{\alpha op} = \frac{\left[ \frac{5}{12}qx_0^4 - \left( -\frac{5}{3}\frac{q}{\alpha} + \frac{2}{3}(b - z_d) \right) x_0^3 - \frac{2}{\alpha} \left( -\frac{q}{\alpha} + (b - z_d) \right) x_0^2 \right]}{\left( M_1x_0 + \frac{2}{15}x_0^5 + \frac{2}{3\alpha}x_0^4 + \frac{1}{\alpha^2}x_0^3 \right)}.$$

Para los problemas de control óptimo fronteras (7) y (8), se obtienen:

$$q_{op} = \frac{\left( \frac{5}{12}gx_0^2 + (b - z_d) \right)}{2x_0 \left( \frac{M_2}{x_0^3} + \frac{1}{3} \right)},$$

$$q_{\alpha op} = \frac{\left[ gx_0^2 \left( \frac{2}{\alpha^2} + \frac{5}{3}\frac{x_0}{\alpha} + \frac{5}{12}x_0^2 \right) + (b - z_d)x_0 \left( x_0 + \frac{2}{\alpha} \right) \right]}{2 \left( M_2 + \frac{x_0^3}{3} + \frac{x_0^2}{\alpha} + \frac{x_0}{\alpha^2} \right)}.$$

En los problemas de control óptimo fronteras (9) y (10), los controles óptimos están dados por:

$$b_{op} = \frac{\left( -\frac{1}{3}gx_0^2 + q\frac{x_0}{2} + z_d \right)}{\left( 1 + \frac{M_3}{x_0} \right)},$$

$$b_{\alpha op} = \frac{\left[ g\frac{x_0^3}{3} - (gx_0 - q)x_0^2 - 2 \left( \frac{gx_0 - q}{\alpha} - z_d \right) x_0 \right]}{2(x_0 + M_3)}.$$

Para el problema de control óptimo distribuido-frontera (11), la solución óptima está dada por:

$$(g, q)_{op} = \left( -\frac{(b - z_d)}{x_0^2} C_4, -\frac{(b - z_d)}{x_0} C_5 \right)$$

donde:

$$C_4 = \frac{1}{2 \left( \frac{2}{15} + \frac{M_4}{x_0^4} \right)} \left( \frac{2}{3} - \frac{\frac{5}{12} \left( -\frac{5}{18} + 2 \left( \frac{2}{15} + \frac{M_4}{x_0^4} \right) \right)}{4 \left( \frac{2}{15} + \frac{M_4}{x_0^4} \left( \frac{1}{3} + \frac{M_5}{x_0^3} \right) - \frac{25}{144} \right)} \right),$$

$$C_5 = \frac{\left[ \frac{5}{18} - 2 \left( \frac{2}{15} + \frac{M_4}{x_0^4} \right) \right]}{\left[ \left( \frac{8}{15} + 4 \frac{M_4}{x_0^4} \right) \left( \frac{1}{3} + \frac{M_4}{x_0^4} - \frac{25}{144} \right) \right]},$$

y para el problema de control óptimo distribuido-frontera (12) que depende del parámetro  $\alpha > 0$ , se obtiene:

$$(g, q)_{\alpha op} = \left( -\frac{(b - z_d)}{x_0^2} C_{4\alpha}, -\frac{(b - z_d)}{x_0} C_{5\alpha} \right)$$

donde

$$C_{4\alpha} = \frac{1}{\left( \frac{4}{15} + \frac{4}{3} \frac{1}{\alpha x_0} + \frac{2}{\alpha^2 x_0^2} + \frac{2M_4}{x_0^4} \right)} \left\{ \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{\alpha x_0} \right) + D_{4\alpha} \right\},$$

$$C_{5\alpha} = \frac{\left[ \left( \frac{5}{12} + \frac{5}{3\alpha x_0} + \frac{2}{\alpha x_0} \right) \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{\alpha x_0} \right) - \left( \frac{4}{15} + \frac{4}{3\alpha x_0} + \frac{2}{\alpha^2 x_0^2} + \frac{M_4}{x_0^4} \right) \left( 1 + \frac{2}{\alpha x_0} \right) \right]}{\left[ \left( \frac{8}{15} + \frac{8}{3\alpha x_0} + \frac{4}{\alpha^2 x_0^2} + \frac{4M_4}{x_0^4} \right) \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha x_0} + \frac{1}{\alpha^2 x_0^2} + \frac{M_5}{x_0^3} \right) - \left( \frac{5}{12} + \frac{5}{3\alpha x_0} + \frac{2}{\alpha^2 x_0^2} \right)^2 \right]},$$

con

$$D_{4\alpha} = \frac{\left( \frac{5}{12} + \frac{5}{3\alpha x_0} + \frac{2}{\alpha^2 x_0^2} \right) \left[ \left( \frac{5}{12} + \frac{5}{\alpha x_0} + \frac{2}{\alpha^2 x_0^2} \right) \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{\alpha x_0} \right) - \left( \frac{4}{15} + \frac{4}{3\alpha x_0} + \frac{2}{\alpha^2 x_0^2} + \frac{2M_4}{x_0^4} \right) \left( 1 + \frac{2}{\alpha x_0} \right) \right]}{\left[ \left( \frac{8}{15} + \frac{8}{3\alpha x_0} + \frac{4}{\alpha^2 x_0^2} + \frac{4M_4}{x_0^4} \right) \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha x_0} + \frac{1}{\alpha^2 x_0^2} + \frac{M_5}{x_0^3} \right) - \left( \frac{5}{12} + \frac{5}{3\alpha x_0} + \frac{2}{\alpha^2 x_0^2} \right)^2 \right]}.$$

**Observación.** Resultados análogos pueden obtenerse también para los siguientes dominios:

- i) Corona circular en  $\mathbb{R}^2$ :  $\Omega = \{(r, \theta) : r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ,
- ii) Corona circular en  $\mathbb{R}^3$ :  $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) : r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ .

## AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos PIP No 0534 de CONICET-Univ. Austral, Rosario, Argentina, PPI No C468 de SECyT-UNRC, Río Cuarto, Argentina y AFOSR-SOARD Grant FA9550-14-1-0122.

## REFERENCIAS

- [1] F. BEN BELGACEM - H. EL FEKIH - H. METOUI, *Singular perturbation for the Dirichlet boundary control of elliptic problems*, ESAIM: M2AN, 37 (2003), 833-850.
- [2] C.M. GARIBOLDI - D.A. TARZIA, *Convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity*, Appl. Math. Optim., 47 (2003), 213-230.
- [3] C.M. GARIBOLDI AND D.A. TARZIA, *Convergence of boundary optimal control problems with restrictions in mixed elliptic Stefan-like problems*, Adv. in Diff. Eq. and Control Processes, 1(2) (2008), 113-132.
- [4] C. M. GARIBOLDI - D. A. TARZIA, *Existence, Uniqueness and Convergence of Simultaneous Distributed-Boundary Optimal Control Problems*, Control and Cybernetics, 44(1) (2015), 5-17.
- [5] O. KINDERLEHRER - G. STAMPACCHIA, *An introduction to variational inequalities and their applications*, SIAM, Philadelphia (2000).
- [6] J.L. LIONS, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux drives partielles*, Dunod, Paris (1968).
- [7] D.A. TARZIA, *Sur le problème de Stefan à deux phases*, C.R. Acad. Sc. Paris, 288A (1979), 941-944.
- [8] F. TRÖLSTZSCH, *Optimal control of partial differetnial equations. Theory, methods and applications*, American Math. Soc., Providence (2010).