ISSN 0325-4011

Rev. latinoam. transf. cal. mat. 9: 215-222 (1985) Lat. am. j. heat mass transf.

COMUNICACION COMMUNICATION

SOBRE LA SOLUCION DE NEUMANN PARA EL PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES INCLUYENDO EL SALTO DE DENSIDAD EN LA FRONTERA LIBRE

ON THE NEUMANN SOLUTION FOR THE TWO-PHASE STEFAN PROBLEM INCLUDING THE DENSITY JUMP AT THE FREE BOUNDARY

ALICIA BEATRIZ BANCORA* **, DOMINGO ALBERTO TARZIA* ***

** PROMAR (CONICET-UNR). Instituto de Matemática "Beppo Levi", Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad Nacional de Rosario. ** Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería (U.N.R.), Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina. *** Investigador del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.*

Resumen

Se considera un cuerpo semi-infinito $x > 0$ en su fase líquida (p. ej., agua) a una temperatura inicial $\theta_0 > 0$ teniendo un flujo de calor saliente $ho/\sqrt{t}$ ($ho > 0$) en el borde fijo $x = 0$. Se estudia el problema incluyendo el movimiento inducido por el cambio de densidad en la transición de fase.

Si $ho > k_2\theta_0/a_2\sqrt{\pi}$ existe una solución del tipo de Neumann, para el problema de Stefan a dos fases resultante. Si se conecta dicho problema con el de Neumann (sobre $x = 0$ se impone una temperatura $-d < 0$) se obtiene la desigualdad: erf $(\gamma/a_1) < d/\theta_0\,(\rho_1 c_1 k_1/\rho_2 c_2 k_2)^{1/2}$, para el coeficiente γ de la frontera libre $s(t) = 2\gamma\sqrt{t}$, donde k_i, ρ_i, c_i son, respectivamente, la conductividad térmica, la densidad de masa y el calor específico, y $a_i^2 = k_i/\rho_i c_i$ la difusividad térmica correspondientes a la fase i ($i = 1$: fase sólida; $i = 2$: fase líquida).

En cambio, si $ho < k_2\theta_0/a_2\sqrt{\pi}$ no existe solución del problema inicial con cambio de fase, resultando ser sólo un problema de conducción de calor para la fase líquida.

Abstract

We consider a semi-infinite body $x > 0$ in liquid phase (e.g., water) with an initial temperature $\theta_0 > 0$ that has an outward heat flux $h(t) = ho/\sqrt{t}$ ($ho > 0$) in the fixed face $x = 0$. We enlarge the problem by taking into account the effect of the density change occurring during the phase change.

If $ho > k_2\theta_0/a_2\sqrt{\pi}$, there exists a solution of the Neumann type, for the resulting two-phase Stefan problem. If this problem is connected with Neumann's (on $x = 0$ the body has a temperature $-d < 0$), the following inequality is obtained: erf $(\gamma/a_1) < d/\theta_0\,(\rho_1 c_1 k_1/\rho_2 c_2 k_2)^{1/2}$, for the coefficient γ of the free boundary $s(t) = 2\gamma\sqrt{t}$, where k_i, ρ_i, c_i, are respectively the thermal conductivity, the mass density and the specific heat, and $a_i^2 = k_i/\rho_i c_i$, the thermal diffusivity coefficient of the corresponding i phase ($i = 1$: solid phase; $i = 2$: liquid phase).

If $ho < k_2\theta_0/a_2\sqrt{\pi}$ there is no solution for the solidification problem, we just have a problem of heat conduction in the initial liquid phase.

Se considera el problema de Stefan a dos fases para un cuerpo semi-infinito que tenga en cuenta el salto de densidad bajo un cambio de fase. Sin pérdida de generalidad se tomará que·

We shall consider the two-phase Stefan problem for a semi-infinite body taking into account the density jump under the change of phase. Without loss of generality, we take null la temperatura del cambio de fase es nula. Se hallará la función $s = s(t) > 0$ (frontera libre), definida para $t > 0$, y la temperatura

phase temperature, that is, we shall find the function $s = s(t) > 0$ (free boundary), defined for $t > 0$, and the temperature

$$\theta(x,t) = \begin{cases} \theta_1(x,t) < 0 & \text{si (if)} \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ 0 & \text{si (if)} \quad x = s(t) \quad , \quad t > 0 \\ \theta_2(x,t) > 0 & \text{si (if)} \quad s(t) < x \quad , \quad t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

definida para $x > 0$ y $t > 0$, de manera que satisfagan las siguientes condiciones (problema P1):

defined for $x > 0$ and $t > 0$, such that they satisfy the following conditions (problem P1):

$$\alpha_1 \theta_{1xx} = \theta_{1t} \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad t > 0 \tag{2}$$

$$\alpha_2 \theta_{2xx} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \dot{s}(t)\, \theta_{2x} = \theta_{2t} \quad , \quad x > s(t) \quad , \quad t > 0 \tag{3}$$

$$\theta_1(s(t),t) = 0 \quad , \quad t > 0 \tag{4}$$

$$\theta_2\,(s(t),t) = 0 \quad , \quad t > 0 \tag{5}$$

$$k_1 \theta_{1x}(s(t),t) - k_2 \theta_{2x}(s(t),t) = \rho_1 \ell \dot{s}(t) \quad , \quad t > 0 \tag{6}$$

$$\theta_2\,(x,0) = \theta_0 > 0 \quad , \quad x > 0 \tag{7}$$

$$s(0) = 0 \tag{8}$$

$$\theta_1(0,t) = -d < 0 \quad , \quad t > 0. \tag{9}$$

Se considerará también el siguiente problema P2: hallar $\{s(t), \theta(x,t)\}$ de manera que satisfagan las condiciones (2)-(8) y (10), donde

We also consider the following problem P2: we find $\{s(t), \theta(x,t)\}$ such that they satisfy the conditions (2)-(8) and (10) where

$$k_1 \theta_{1x}(0,t) = h(t) \equiv \frac{ho}{\sqrt{t}} \, , \quad t > 0 \tag{10}$$

y $h(t)$ representa el flujo de calor saliente en el borde fijo $x = 0$ del material. Se probará que no siempre existe una solución del tipo de Neumann para el problema P2. Más aún, la solución explícita existe si la constante *ho* satisface una cierta desigualdad (16). Este trabajo generaliza (Tarzia, 1981-82) considerando el salto de densidad en el problema de cambio de fase para un material semi-infinito, y fue presentado en (Báncora, 1981; Báncora y Tarzia, 1982). Siguiendo la idea de Neumann para el problema de Stefan a dos fases (Brillouin, 1930-31; Carslaw y Jaeger, 1959; Rubinstein, 1971; Weber, 1901), la solución del problema (P1) está dada por:

and $h(t)$ represents the outgoing heat flux in the fixed face $x = 0$ of the material. We shall prove that there is not always a solution of the Neumann type for the problem P2. Moreover, the explicit solution exists if the constant *ho* satisfies a certain inequality (16). This paper generalizes (Tarzia, 1981-82) considering the jump density in the phase-change problem for a semi-infinite body and it was presented in (Báncora, 1981; Báncora and Tarzia, 1982). Following Neumann's idea for the two-phase Stefan problem (Brillouin, 1930-31; Carslaw and Jaeger, 1959; Rubinstein, 1971; Weber, 1901), the solution of problem (P1) is given by:

$$\begin{cases} \theta_1(x,t) = A_1 + B_1 f\left(\dfrac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \\ \theta_2(x,t) = A_2 + B_2 f\left(\delta_1 + \dfrac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \\ s(t) = 2\gamma\sqrt{t}\ , \quad \gamma > 0, \end{cases} \tag{11}$$

donde

where

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x \exp(-u^2)\, du \quad (\equiv \operatorname{erf}(x)) \\ A_1(\gamma) = -d \quad , \quad B_1(\gamma) = \dfrac{d}{f(\gamma/a_1)} \\ A_2(\gamma) = \dfrac{-\theta_0 f(\gamma/a_0)}{1-f(\gamma/a_0)}, \quad B_2(\gamma) = \dfrac{\theta_0}{1-f(\gamma/a_0)} \\ \varepsilon = \dfrac{\rho_1-\rho_2}{\rho_2} \quad , \quad \delta_1 = \dfrac{\gamma}{a_2}|\varepsilon| \quad , \quad a_0 = \dfrac{a_2}{1+|\varepsilon|} \end{cases} \tag{12}$$

y γ es la única solución de la ecuación

and γ is the unique solution of equation

$$F(\gamma) = \gamma \quad , \quad \gamma > 0 \tag{13}$$

con

with

$$F(\gamma) = \frac{k_1}{\ell\rho_1 a_1\sqrt{\pi}} B_1(\gamma) \exp\left(\frac{-\gamma^2}{a_1^2}\right) - \frac{k_2}{\ell\rho_1 a_2\sqrt{\pi}} B_2(\gamma) \exp\left(\frac{-\gamma^2}{a_0^2}\right) \tag{14}$$

que satisface las siguientes propiedades:

which satisfies the following properties:

$$F(0^+) = +\infty \quad , \quad F(+\infty) = -\infty \quad , \quad F' < 0. \tag{15}$$

Para el problema (P2) también se obtiene la siguiente

Also for the problem (P2) we obtain the following

Propiedad 1:

Existe una solución del tipo de Neumann para el problema (P2), si y sólo si

Property 1:

There exists a solution of the Neumann type for the problem (P2) if and only if

$$ho > \frac{k_2\theta_0}{a_2\sqrt{\pi}} = \theta_0\sqrt{\frac{k_2\rho_2 c_2}{\pi}}. \tag{16}$$

En este caso, la solución de (P2) está dada por:

In this case, the solution of (P2) is given by:

$$\begin{cases} \theta_1(x,t) = C_1 + D_1\, f\left(\dfrac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \\ \theta_2(x,t) = C_2 + D_2\, f\left(\delta_2 + \dfrac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \\ s(t) = 2\omega\sqrt{t}\ , \quad \omega > 0 \end{cases} \tag{17}$$

donde

where

$$\begin{cases} C_1(\omega) = -\dfrac{\sqrt{\pi}a_1\, ho}{k_1}\, f\left(\dfrac{\omega}{a_1}\right)\ , \quad D_1(\omega) = \dfrac{ho\, a_1\sqrt{\pi}}{k_1} \\ C_2(\omega) = -\dfrac{\theta_0 f\left(\dfrac{\omega}{a_0}\right)}{1-f\left(\dfrac{\omega}{a_0}\right)},\quad D_2(\omega) = \dfrac{\theta_0}{1-f\left(\dfrac{\omega}{a_0}\right)} \\ \delta_2 = \dfrac{\omega|\varepsilon|}{a_2} \end{cases} \tag{18}$$

y ω es la única solución de la ecuación

and ω is the unique solution of the equation

$$F_0(\omega) = \omega\ , \quad \omega > 0 \tag{19}$$

con

with

$$F_0(\omega) = \frac{ho}{\rho_1 \ell} \exp\left(\frac{-\omega^2}{a_1^2}\right) - \frac{k_2\theta_0}{\rho_1 \ell a_2\sqrt{\pi}} \; \frac{\exp\left(\dfrac{-\omega^2}{a_0^2}\right)}{1-f\left(\dfrac{\omega}{a_0}\right)}\, . \tag{20}$$

Demostración

Se usa el método similar a (Tarzia, 1982) y las siguientes propiedades de la función F_0:

Proof

We use a method similar to (Tarzia, 1981-82) and the following properties of the function F_0

$$F_0(0^+) = \frac{1}{\rho_1 \ell}\left(ho - \frac{k_2\theta_0}{a_2\sqrt{\pi}}\right),\quad F_0(+\infty) = -\infty,\quad F_0' < 0. \tag{21}$$

Observación 1:

1) Si $ho \leq k_2\theta_0/a_2\sqrt{\pi}$ no existe solución al problema de solidificación (P2), se tiene realmente un problema de conducción del calor en la fase líquida inicial;

2) El caso $ho = k_2\theta_0/a_2\sqrt{\pi}$ corresponde al caso límite del problema (P1) cuando $\ell \to +\infty$.

Remark 1:

1) If $ho \leq k_2\theta_0/a_2\sqrt{\pi}$ there is no solution for the solidification problem (P2), we just have a problem of heat conduction in the initial liquid phase;

2) The case $ho = k_2\theta_0/a_2\sqrt{\pi}$ corresponds to the limit case of problem (P1) when $\ell \to +\infty$.

Observación 2:

También pudo obtenerse la desigualdad (16) como sigue: se plantea el siguiente problema de conducción del calor para el material semi-infinito $x > 0$, que inicialmente está en la fase líquida a la temperatura constante θ_0 (se supone que su temperatura de fusión es 0°C), es decir

Remark 2:

We can also obtain inequality (16) as follows: we state the following heat conduction problem for the semi-infinite body $x > 0$, that is initially in liquid phase, at a constant temperature θ_0 (we have assumed that its temperature of fusion is 0°C), that is:

$$\begin{cases} a_2^2\, T_{xx} = T_t \ , & x>0 \ , \ t>0 \\ T(x,0) = \theta_0 > 0 \ , & x>0 \\ k_2\, T_x(0,t) = \dfrac{ho}{\sqrt{t}} \ , & t>0. \end{cases} \tag{22}$$

La solución de (22) está dada por:

The solution of (22) is given by:

$$\begin{cases} T(x,t) = \theta_0 - \dfrac{ho}{k_2}\, a_2\sqrt{\pi}\, \operatorname{erf} c\left(\dfrac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \\ \text{donde (where)} \quad \operatorname{erf} c(x) = 1 - f(x). \end{cases} \tag{23}$$

La temperatura calculada en $x = 0$ es

Since the temperature calculated in $x = 0$, is

$$T(0,t) = \theta_0 - \frac{ho}{k_2}\, a_2\sqrt{\pi} \ , \quad t>0 \tag{24}$$

la cual es constante en el tiempo. Por lo tanto, el material semi-infinito que está inicialmente a la temperatura θ_0, y que está siendo enfriado por el flujo de calor $ho/\sqrt{t}$, tendrá un cambio de fase si y sólo si:

which is constant in time. Hence, the semi-infinite material that is initially at temperature θ_0 and that is being cooled by a heat flux $ho/\sqrt{t}$, will undergo a phase change if and only if:

$$\theta_0 - \frac{ho}{k_2}\, a_2\sqrt{\pi} < 0, \tag{25}$$

que es la desigualdad (16). Este método, dado en Solomon y col.(1983) para el caso $\rho_1 = \rho_2$, permite obtener (16) pero no la solución del problema (P2).

which is the inequality (16). This method, given in Solomon et al. (1983), for the case $\rho_1 = \rho_2$, allows us to obtain (16) but not the solution of problem (P2).

Observación 3:

Otro método para obtener la desigualdad (16) consiste en introducir la masa como variable espacial definiendo el siguiente cambio de variables (Quilghini, 1965)

Remark 3:

Another method to obtain inequality (16) consists in introducing the mass as a space variable by defining the following changes of variables (Quilghini, 1965)

$$\begin{cases} e(t) = \rho_1 s(t) \\ V_1(y,t) = \theta_1\left(\dfrac{y}{\rho_1}, t\right) \quad \text{si (if)} \quad 0<y<e(t) \ , \quad t>0 \\ V_2(y,t) = \theta_2\left(\dfrac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}\, s(t) + \dfrac{y}{\rho_2}\ , t\right) \quad \text{si (if)} \quad y>e(t) \ , \quad t>0 \end{cases} \tag{26}$$

con lo cual las condiciones (2)-(8) y (10) se transforman en (2')-(8') y (9'), donde

then conditions (2)-(8) and (10) are transformed into (2')-(8') and (9'), where

$$D_1 V_{1yy} = V_{1t} \quad , \quad 0<y<e(t) \quad , \quad t>0 \tag{2'}$$

$$D_2 V_{2yy} = V_{2t} \quad , \quad e(t)<y \quad , \quad t>0 \tag{3'}$$

$$V_1(e(t),t) = 0 \quad , \quad t>0 \tag{4'}$$

$$V_2(e(t),t) = 0 \quad , \quad t>0 \tag{5'}$$

$$k_1\rho_1 V_{1y}(e(t),t) - k_2\rho_2 V_{2y}(e(t),t) = \ell \dot{e}(t) \quad , \quad t>0 \tag{6'}$$

$$V_2(y,0) = \theta_0 \quad , \quad y>0 \tag{7'}$$

$$e(0) = 0 \tag{8'}$$

$$K_1\rho_1 V_{1y}(0,t) = \frac{ho}{\sqrt{t}} \quad , \quad t>0. \tag{9'}$$

Las condiciones (2')-(8') y (10') representan un problema de cambio de fase con densidades iguales y por lo tanto utilizando (Tarzia, 1981-82) se obtiene que

Conditions (2')-(8') and (10') represent a phase-change problem with the same densities and then by using (Tarzia, 1981-82), we obtain that

$$ho > \frac{\theta_0\, k_2\rho_2}{\sqrt{\pi}\sqrt{D_2}} = \frac{\theta_0\, k_2}{a_2\sqrt{\pi}} \tag{27}$$

que es la desigualdad (16).

Como $d_0 \equiv C_1(\omega) < 0$, se puede considerar el problema (P1) para $d = d_0$ y de este modo se obtiene la siguiente

which is the inequality (16).

Since $d_0 \equiv C_1(\omega) < 0$, we can consider the problem (P1) for $d = d_0$ and so we obtain the following

Propiedad 2

Si la condición (16) es válida y se toma $d = d_0$ en el problema (P1), se tiene:

1) $\gamma = \omega$;

2) el coeficiente γ, que caracteriza la frontera libre en el problema (P1), verifica la siguiente desigualdad:

Property 2

If the condition (16) is valid and we take $d = d_0$ in problem (P1), we have:

1) $\gamma = \omega$;

2) the coefficient γ, which characterized the free boundary in problem (P1), verifies the following inequality:

$$f\left(\frac{\gamma}{a_1}\right) < \frac{d}{\theta_0}\sqrt{\frac{\rho_1 c_1 k_1}{\rho_2 c_2 k_2}}. \tag{28}$$

Demostración

Proof

1)

$$F(\omega) = \frac{k_1}{\rho_1 \ell a_1\sqrt{\pi}} B_1(\omega)\exp\left(\frac{-\omega^2}{a_1^2}\right) - \frac{k_2}{\ell\rho_1 a_2\sqrt{\pi}} B_2(\omega)\exp\left(\frac{-\omega^2}{a_0^2}\right) =$$

$$= \frac{ho}{\ell\rho_1}\exp\left(\frac{-\omega^2}{a_1^2}\right) - \frac{k_2\theta_2}{\ell\rho_1 a_2\sqrt{\pi}} \frac{\exp\left(\frac{-\omega^2}{a_0}\right)}{1-f\left(\frac{\omega}{a_0}\right)} = F_0(\omega) = \omega,$$

y de la unicidad de γ en la ecuación (13) se deduce $\gamma = \omega$;

2) Con 1) se deduce que el problema (P1) es equivalente al problema (P2). Entonces, la desigualdad (16) para el problema (P1) es transformada en (28).

Observación 4

Para el caso $\rho_1 = \rho_2$ se obtienen los resultados dados en (Tarzia, 1981-82).

and from the uniqueness of γ in equation (13), we deduce $\gamma = \omega$;

2) With 1), we deduce that problem (P1) is equivalent to problem (P2). Then, the inequality (16) for the problem (P1) is transformed into (28).

Remark 4

For the case $\rho_1 = \rho_2$ we obtain the results given in (Tarzia, 1981-82).

Agradecimiento

Este trabajo ha sido parcialmente subsidiado por la SUBCYT-CONICET (Argentina), a través del Proyecto "Problemas de Frontera Libre de la Física-Matemática".

Acknowledgment

This paper has been partially sponsored by the SUBCYT-CONICET (Argentina). This financial support was granted to the Project "Problemas de Frontera Libre de la Física-Matemática".

Nomenclatura / **Nomenclature**

calor específico de la fase sólida	c_1	specific heat of solid phase
calor específico de la fase líquida	c_2	specific heat of liquid phase
temperatura en el borde fijo	$-d<0$	temperature in the fixed face $x = 0$
función de error	erf	error function
función de error complementaria	erfc	complementary error function
flujo de calor en el borde fijo $x = 0$	$h(t)$	heat flux in the fixed face $x = 0$
coeficiente definido por la ecuación (10)	$ho > 0$	coefficient defined by equation (10)
conductividad térmica de la fase sólida	k_1	thermal conductivity of solid phase
conductividad térmica de la fase líquida	k_2	thermal conductivity of liquid phase
calor latente de fusión	ℓ	latent heat of fusion
posición de la interfase sólido-líquido (frontera libre) al instante $t>0$	$s(t)$	position of the solid-liquid interface (free boundary at time $t > 0$)
tiempo	$t>0$	time
variable espacial	$x>0$	space coordinate variable

Letras griegas / *Greek letters*

difusividad térmica de la fase sólida	$\alpha_1 = a_1^2 = k_1/\rho_1 c_1$	thermal diffusivity of solid phase
difusividad térmica de la fase líquida	$\alpha_2 = a_2^2 = k_2/\rho_2 c_2$	thermal diffusivity of liquid phase
densidad de masa de la fase sólida	ρ_1	mass density of solid phase
densidad de masa de la fase líquida	ρ_2	mass density of liquid phase
temperatura definida para $x>0, t>0$	$\theta(x,t)$	temperature defined for $x > 0, t > 0$
temperatura de la fase sólida definida para $0<x<s(t), t>0$	$\theta_1(x,t)$	solid phase temperature defined for $0 < x < s(t), t > 0$
temperatura de la fase líquida definida para $x > s(t), t > 0$	$\theta_2(x,t)$	liquid phase temperature defined for $x > s(t), t > 0$
temperatura inicial	$\theta_0 > 0$	initial temperature

Referencias References

Báncora, A. B.: "Sobre la solución de Neumann del problema de Stefan a dos fases, considerando el cambio de densidad en la transición de fases", Trabajo Final de la Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería (Universidad Nacional de Rosario), Rosario, 4 de diciembre de 1981.

Báncora, A. B. and Tarzia, D. A.: Comunicación a la Reunión Nacional de Física, 1982, La Plata, 6-10 diciembre de 1982.

Brillouin, M.: "Sur quelques problèmes non résolus de physique mathématique classique: propagation de la fusion", Annales de l'Institut H. Poincaré, 1: 285-238 (1930-31).

Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C.: "Conduction of Heat in Solids". Clarendon Press, Oxford (1959).

Quilghini, D.: "Una analisi fisico-matematica del processo del cambiamento di fase", Ann. Mat. Pura Appl., 67: 33-74 (1965).

Rubinstein, L. I.: "The Stefan Problem", Trans. Math. Monographs, Vol. 27, American Mathematical Society, Providence (1971).

Solomon, A. D.; Wilson, D. G. and Alexiades, V.: "Explicit Solutions to Phase Change Problems", Quart. Appl. Math., 41: 237-243 (1983).

Tarzia, D. A.: "An Inequality of the Coefficient σ of the Free Boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann Solution for the Two-Phase Stefan Problem", Quart. Appl. Math., 39: 491-497 (1981-82).

Weber, H.: "Die partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik, nach Riemann's Vorlesungen", t. II, Braunwschweig (1901).

Recibido: Diciembre 3, 1984
Aceptado: Octubre 28, 1985

Received: December 3, 1984
Accepted: October 28, 1985