Introducción al Cálculo Fraccionario

Sabrina D. Roscani

1 de abril de 2011

Índice

1. Breve introducción histórica **1**

2. Resultados preliminares **6**

3. Funciones especiales asociadas al Cálculo Fraccionario **9**
3.1. La función Gamma 9
3.2. La función Beta 13
3.3. Representación de la función Gamma como integral de línea. 18
3.4. Representación de $\frac{1}{\Gamma(z)}$ como integral de línea. 19
3.5. La función de Mittag-Leffler 20
3.6. La función de Bessel 22
3.7. La función de Wright 23

4. Integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville **25**

5. Derivada fraccionaria de Caputo **41**

1. Breve introducción histórica

¿Alguna vez nos planteamos en nuestro transcurso por los cursos de matemática qué significaría hacer $D^{1/2}f(x)$?

La idea de generalizar la noción de derivada para valores no naturales, surgió con el nacimiento del propio Cálculo Diferencial. En aquel entonces se planteó la cuestión del sentido que tendría una derivada de orden fraccionario en vez de natural; por ello se le asignó originalmente el nombre de *Cálculo Fraccionario*. Más tarde se amplió el alcance de la pregunta anterior: *¿Se podrá derivar respecto de un número cualquiera, fraccionario, irracional o complejo?*. Veremos que esto es posible y, por ende, deberíamos sustituir el término de "Cálculo Fraccionario" por el de "integración y diferenciación de orden arbitrario". Sin embargo el origen histórico, en este caso, ha tenido más peso y, la bibliografía actual acerca de este tema se encuentra bajo el título "Cálculo Fraccionario".

La notación de Leibnitz $D^{(n)}f(x)$ o $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, empujó en 1695 a L'Hôpital a preguntarle "*¿Qué sucede si n es* 1/2 *?*". Leibnitz respondió: " *Usted puede ver por eso, señor, que uno puede expresar por una serie infinita una cantidad como $d^{1/2}xy$ o $d^{1:2}xy$. Aunque las series infinitas y geométricas son relaciones distantes, las series infinitas admiten sólo el uso de exponentes que son enteros y no hacen, todavía, el uso de exponentes fraccionarios.*" Después en la misma carta, Leibnitz continua profetizando: "*Esta es una aparente paradoja que algún día mostrará sus útiles consecuencias*".

En 1730, Euler escribió:"*Si n es un entero positivo, 'dn' puede ser encontrada con derivación continuada. De tal manera, sin embargo no es evidente si n es una fracción; pero con la ayuda de la interpolación uno puede expedir el asunto*".

La primera referencia en un texto a una derivada de orden arbitrario aparece en un libro de 1819 del matemático francés Lacroix, en el que dedica a este tema dos páginas de las 700 que lo constituyen. Lacroix desarrolló un ejercicio meramente matemático generalizando el caso de orden entero. Hagamos nosotros mismos el ejercicio: Consideremos la función $y = x^n$, cuyas derivadas m-ésimas están dadas por:

$$\frac{d^m}{dx^m}y = \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m} \quad n, m \in \mathbb{N} \; n \geq m$$

Utilizando la función Gamma para generalizar los factoriales, sustituyendo m por 1/2, n por un número a real positivo cualquiera y suponiendo $x > 0$, obtenemos:

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}y = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}x^{a-\frac{1}{2}}$$

que " representaría la derivada de orden 1/2 de la función $f(x) = x^a$ ". Para $a = 1$, tenemos

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}f(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1/2\Gamma(1/2)}\sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

y este resultado coincide con la definición de "*derivada fraccionaria de Riemann-Liouville* " que veremos más adelante.

El paso siguiente lo dió Fourier en 1822, al sugerir la utilización de la igualdad

$$\frac{d^p}{dx^p}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^p d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)cos(\lambda x - t\lambda + p\frac{\pi}{2})dt$$

para definir la derivada de orden p arbitrario de una función que se comportase "*suficientemente bien* ", sin ser necesariamente una función potencia. Pero no proporcionó ejemplos o aplicaciones.

El primero en presentar una aplicación fue de Abel en 1823, utilizando el Cálculo Fraccionario en la solución de la ecuación integral:

$$k = \int_0^x (x-t)^{-1/2}f(t)dt$$

que se obtiene al plantear el *problema de la tautócrona*, es decir, el problema de determinar la forma de una curva de modo tal que el tiempo de descenso de una masa puntual que se desliza por ella sin fricción y bajo el efecto de la gravedad sea independiente del punto de partida. Esta ecuación integral, llamada **de Abel**, corresponde a un tiempo de deslizamiento constante y conocido; la integral que en ella aparece, salvo por el factor multiplicativo $\frac{1}{\Gamma(1/2)}$, es *la integral fraccionaria de orden* $1/2$ *de Riemann-Liouville de la función* $f(x)$. Abel escribió el lado derecho de la ecuación como $\sqrt{\pi}\frac{d^{-1/2}}{dx^{-1/2}}f(x)$. Luego operó en ambos lados de la ecuación con $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$ y obtuvo:

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}k = \sqrt{\pi}f(x)$$

La solución de Abel fue catalogada como " elegante ", lo que atrajo la atención de Liouville, quien después de una década volvió a trabajar en el Cálculo Fraccionario, y en 1832 hizo el primer gran intento de definir la derivada fraccionaria. El punto de partida de Liouville fue el conocido resultado para las derivadas de orden entero m de la exponencial

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax}$$

donde a es una constante real, que extendió de modo natural a las derivadas de orden p arbitrario

$$D^p e^{ax} = a^p e^{ax}$$

Entonces asumió que la derivada de orden arbitrario de una función $f(x)$, que puede ser desarrollada en una serie del tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x},$$

tiene la forma

$$D^p f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^p e^{a_n x}$$

Esta fórmula es conocida como la primera definición de Liouville, con la obvia desventaja de ser únicamente aplicable para funciones que se puedan expresar como serie de exponenciales, y en dicho caso considerar aquellos valores de p para los cuales la serie converge.

Como esta definición no lo satisfizo, Liouville optó por un segundo método basándose en la definición de la función Gamma:

$$I = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-xu} du \quad a > 0,\ x > 0$$

donde, haciendo la sustitución $xu = t$ obtenemos:

$$I = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{x^a} e^{-t} dt \Leftrightarrow I = x^{-a}\Gamma(a) \Leftrightarrow x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I$$

Liouville opera entonces con D^p en ambos miembros y

$$D^p x^{-a} = \frac{(-1)^p}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a+p+1} e^{-xu} du$$

de donde llega a su segunda definición de derivada fraccionaria:

$$D^p x^{-a} = \frac{(-1)^p \Gamma(a+p)}{\Gamma(a)} x^{-a-p-}, \quad a > 0$$

Sin embargo esta definición sólo se aplica a funciones del tipo x^{-a} con $a > 0$.

Otra vez estamos bajo una definición que se aplica sólo a un conjunto restringido de funciones. Esto produjo contradicciones y críticas entre queines apoyaban la "*definición de Liouville*" y quienes apoyaban la "*definición de Lacroix*".

La atención se desplazó entonces hacia la integral fraccionaria, pensando que quizás de ésta se deduciría la definición de derivada como la de su operador inverso izquierdo, en analogía al caso entero. En esos mismos escritos de 1832, Liouville obtuvo la siguiente fórmula:

$$\left(D^{-p} f\right)(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^\infty t^{p-1} f(x+t) dt, \quad \Re(p) > 0$$

que hoy en día, eliminado el factor $(-1)^p$, es conocida por la definición de Liouville por la derecha de la integral fraccionaria de orden p.

Siguiendo esto, cabe mencionar un escrito de Riemann fechado en 1847, y de publicación póstuma en 1892 en *Gesammelte Werke*. Buscando una generalización de una serie de Taylor obtuvo la expresión

$$D^{-p} f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} f(t) dt + \Phi(x)$$

para la integral de orden fraccionario.

Debido a la ambigüedad del extremo inferior de integración c, Riemann consideró oportuno añadir una función complementaria $\Phi(x)$ de naturaleza indeterminada. Riemann se preocupaba por una medida de desviación para el caso ${}_cD_x^{-p} f(x)$ y ${}_{c'}D_x^{-p} f(x)$ cuando $c \neq c'$.

El primer trabajo que finalmente condujo a la actual definición de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville fue debido a N. Ya. Sonine en 1870, quien llamó a su escrito "*En la diferenciación con índice arbitrario* ", empezando con la fórmula integral de Cauchy. Pero fue Laurent el que en 1884 llegó a formularla de manera definitiva. Su punto inicial fue también la fórmula integral de Cauchy, que reduce la integral de orden entero n de una función real a una única integral de convolución. Esto es,

Fórmula de Cauchy:

$$_cI^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_c^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau$$

Laurent llegó a definir la integral de oreden fraccionario como

$$_cI_x^p f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_c^x (x-t)^{p-1} f(t)dt, \quad p \in \mathbb{R}^+$$

Cuando $x > c$ recuperamos de nuevo la definición de la integral fraccionaria de Riemann, pero sin la función complementaria; mientras que para $a = -\infty$ obtenemos la definición de la integral fraccionaria de Liouville.

En los mismos años, Grünwald (1867) y Letnikov (1868) afrontaron el problema de la diferenciación no entera, generalizando la definición de derivada de orden entero, basada en el concepto de cociente incremental, utilizando la siguiente fórmula

$$\left(D^p f\right)(x) = {}_{h\to 0}\frac{(\nabla_h^p f)(x)}{h^p}$$

donde $(\nabla_h^p f)(x) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{p}{j} f(x-jh)$, con $[n = p]$

Con la llegada del Siglo XX y los desarrollos del Análisis Matemático y de la Teoría de Funciones, aparecieron nuevas formas íntegro-diferenciales fraccionarias.

En 1967 Caputo dió una nueva definición de derivada fraccionaria que permitiría interpretar físicamente las condiciones iniciales de los cada vez más numerosos problemas aplicados que se estaban estudiando.

En el año 1974, tuvo lugar en Connecticut la primera conferencia internacional sobre el Cálculo Fraccionario, que sirvió de estímulo a numerosas publicaciones. La segunda conferencia tuvo lugar en 1984 en Escocia, y la tercera en 1989 en Tokyo.

Actualmente es difícil encontrar un ámbito de la Ciencia o de la Ingeniería que no considere conceptos del Cálculo Fraccionario, y cada año tienen lugar varios acontecimientos que lo ponen de manifiesto.

Desde el punto de vista de la Matemática, es fascinante ver como el campo de las generalizaciones "fraccionarias" da lugar al encuentro de varias disciplinas: entre otras, la teoría de las probabilidades y los procesos estocásticos, las ecuaciones integro-diferenciales, la teoría de las transformadas, las funciones especiales y el análisis numérico. De relevante importancia son las aplicaciones físicas en la teoría de la visco-elasticidad, en el estudio del fenómeno de la difusión anómala y en la teoría electromagnética; pero podemos anticipar que también se va despertando un interés cada vez mayor en otros ámbitos muy distintos, por ejemplo, el de la teoría de circuitos, de la biología o de la física de la atmósfera. Asimismo, entre los economistas se va consolidando el empleo de conceptos de cálculo fraccionario. Ya en 1996, en *Journal of Econometrics* apareció un número especial en el que se recogía una serie de artículos sobre el tema "*Fractional Difeerencing and Long Memory Processes* ".

Entre las variadas cuestiones abiertas sobre el Cálculo Fraccionario, ocupa un lugar prominente la de determinar si es posible encontrar una interpretación geométrica para la derivada fraccionaria. Una posible solución a este problema ha sido propuesta por I. Podlubny en un reciente articulo titulado "*Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Diferentiation*" en el que la interpretación física de estos operadores fraccionarios está basada en el empleo de dos tipos de tiempos: un *tiempo cósmico* y un *tiempo individual*, y viene estrechamente relacionada con la Teoría de la Relatividad.

2. Resultados preliminares

Enunciaremos aquí algunos conceptos y resultados matemáticos que fueron vistos a lo largo de las materias de nuestra carrera y que nos serán útiles en nuestro trabajo.

Teorema 1 *Teorema del Valor Medio*

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema 2 *Para cada serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ existe un número real extendido R, $0 \leq R \leq \infty$ tal que:*

1. *Si $R = 0$, la serie converge sólo en $z = z_0$*
2. *Si $R = +\infty$, la serie converge absolutamente en todo punto $z \in \mathbb{C}$ siendo la convergencia uniforme en todo círculo $|z - z_0| \leq R$*
3. *Si $0 < R < \infty$, la serie converge absolutamente en el círculo $|z - z_0| < R$ y diverge si $|z - z_0| > R$. La convergencia es uniforme en todo círculo $|z - z_0| \leq r$ con $0 < r < R$*

Teorema 3 *Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ Si existe $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, entonces $R = \frac{1}{L}$*

Teorema 4 *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ una serie de funciones definidas en Ω que converge puntualmente a la función suma f. Supongamos que existe una serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ convergente tal que $|f_n(z)| \leq M_n \, \forall z \in \Omega$, $\forall \, n \in \mathbb{N}$.*

Entonces la serie converge uniformemente a f en Ω.

Teorema 5

1. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas sobre un arco γ que converge uniformemente sobre γ a una función f. Entonces:*

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz$$

2. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ una serie de funciones continuas sobre un arco γ que converge uniformemente sobre γ a la función suma f. Entonces:*

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)dz$$

Teorema 6 *Continuidad de una integral con respecto a un parámetro*

Sea $(X, \aleph, \mu)$ un espacio con medida y sea (Λ, α) un espacio métrico. Sea $f(x, \lambda)$ una función de $X \times \Lambda$ en $\mathbb{C}$ tal que:

1. *Para cada $\lambda \in \Lambda$ la función $x \to f(x, \lambda)$ es $\aleph$-medible.*

2. *Para cierto* λ_0 *y cada* $x \in X$ *existe* $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} f(x, \lambda) = h(x)$

3. *Existe una función* g *integrable sobre* X *tal que* $|f(x, \lambda)| \leq g(x)\ \forall\, x\ \in\ X\ \forall\, \lambda\ \in\ \Lambda$

Entonces está definida sobre Λ *la función* $F(\lambda) = \int_X f(x, \lambda) d\mu$ *y existe* $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} F(\lambda) = \displaystyle\int_X \lim_{\lambda \to \lambda_0} f(x, \lambda)$

Teorema 7 *Derivabilidad de una integral con respecto a un parámetro*

Sea $(X, \aleph, \mu)$ *un espacio con medida y sea* Λ *un intervalo abierto de* $\mathbb{R}$*. Sea* $f(x, \lambda)$ *una función de* $X \times \Lambda$ *en* $\mathbb{C}$ *tal que:*

1. *Para cada* $\lambda \in \Lambda$ *la función* $x \to f(x, \lambda)$ *es* $\aleph$*-medible.*

2. *Para cierto* λ_0 *y cada* $x \in X$ *la función* $x \to f(x, \lambda_0)$ *es integrable.*

3. *Existe* $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ *sobre* $X \times \Lambda$

4. *Existe una función* g *integrable sobre* X *tal que* $\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\right| \leq g(x)\ \forall\, x\ \in\ X\ \forall\, \lambda$ *in* Λ

Entonces para cada $\lambda \in \Lambda$*, la función* $x \to f(x, \lambda)$ *es integrable y la función* $F(\lambda) = \int_X f(x, \lambda) d\mu$ *es derivable sobre* Λ *siendo* $F'(\lambda) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) d\mu$

Teorema 8 *Teorema de Cauchy*

Sea f *una función holomorfa en un dominio simplemente conexo* Ω*, entonces*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0 \quad \forall \ \text{ciclo } \gamma \ \text{ contenido en } \Omega$$

Teorema 9 *Teorema de los residuos*

Sea f *una función analítica en un dominio* Ω *salvo por singularidades aisladas* a_j*. Sea* γ *una curva simple cerrada tal que* $\gamma \cup int(\gamma) \subset \Omega$ *que no pasa por ningún* a_j*. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(z) dz = \sum_j Res(f, a_j)$$

donde la suma se extiende a todos los j *tales que* $a_j \in int(\gamma)$*.*

Teorema 10 *Teorema de los polos simples*

Sea $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ *una función a valores complejos donde* g *y* h *son analíticas en* z_0*. Supongamos además que* $g(z_0) \neq 0$*,* $h(z_0) = 0$ *y* $h'(z_0) \neq 0$*. Entonces* f *tiene un polo simple en* z_0 *y*

$$Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Definición 1 *Llamaremos elemento analítico a todo par* (f, Ω) *en el que* Ω *es un dominio del plano* $\mathbb{C}$ *y* f *es una función analítica en* Ω*.*

Teorema 11 *Principio de identidad para funciónes analíticas*

Si f *y* g *son funciones analíticas en un dominio* Ω *y el conjunto* $\{z \in \Omega\ :\ f(z) = g(z) \forall z\ \in\ \Omega\}$ *tiene un punto de acumulación en* Ω*, necesariamente será* $f(z) = g(z) \forall z \in \Omega$

Teorema 12 *Principio de Prolongación Analítica*

Sea (f_1, Ω_1) *un elemento analítico y sea* Ω_2 *un dominio tal que* $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \phi$. *Entonces, si existe una función* f_2 *analítica en* Ω_2 *y tal que* $f_2(z) = f_1(z) \quad \forall z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, *tal función* f_2 *es la única con dicha propiedad.*

En tal caso, la función f *definida sobre* $\Omega_1 \cup \Omega_2$ *por* $f(z) = \begin{cases} f_1(z) & si \in \Omega_1 \\ f_2(z) & si \in \Omega_2 \end{cases}$ *es analítica en* $\Omega_1 \cup \Omega_2$

Definición 2 *Llamaremos* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *al espacio de las funciónes infinitamente diferenciables a soporte compacto en* $\mathbb{R}$ *y* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *a su dual, el espacio de las distribuciones.*

Definición 3 *Sea* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. *Definimos la derivada de* u *como*

$$\partial u(\phi) = -u(\partial \phi) \; \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Proposición 1 *Sea* H *la función de Heaviside y* δ *la función de Dirac. Entonces*

$$\partial H = \delta$$

Definición 4 *Sea* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *y* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. *Definimos la convolución de* u *con* φ *como:*

$$u * \varphi(x) = u(T_x \circ S\phi)$$

donde $T_x(\varphi)(y) = \varphi(y - x)$ *y* $S\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Sean u *y* v *dos distribuciones una de las cuales es a soporte compacto. Entonces*

$$u * v(\varphi) = u(Sv * \varphi) = v(Su * \varphi)$$

donde S *es tal que* $Su(\varphi) = u(S(\varphi))$

Proposición 2 *Definimos* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})_+ = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) / \text{ existe } l \in \mathbb{R} \text{ tal que } sop(u) \subset [l, +\infty)\}$.
Decimos que $u_j \to u$ *en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})_+$ *si existe* $l \in \mathbb{R}$ *tal que* $u_j \to u$ *en*

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R})_{[l,\infty)} = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) / sop(u) \subset [l, +\infty)\}.$$

Sean u *y* $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})_+$. *Entonces está bien definida la convolución entre* u *y* v,

$$u * v(\varphi) = u(Sv * \varphi) = v(Su * \varphi)$$

y satisface todas las reglas de la convolución con la convergencia definida arriba.

Proposición 3 *Sean* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *y* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *entonces*

1. $(u * \varphi)(x)$ *es una función de clase* C^∞
2. $\partial^k (u * \varphi) = (\partial^k u) * \varphi = u * (\partial^k \varphi)$
3. $u * \delta = u$
4. $u * (\partial^k \delta) = (\partial^k u) * \delta = (\partial^k u)$

3. Funciones especiales asociadas al Cálculo Fraccionario

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de las funciones Gamma, Beta, Mittag-Leffler y Wright, que juegan un papel fundamental en la teoría de derivadas fraccionarias y ecuaciones diferenciales fraccionarias.

3.1. La función Gamma

Definición 5 *Sea $A = \{z \in \mathbb{C} / \Re(z) > 0\}$. Definimos la función Gamma como*

$$\begin{array}{l} \Gamma : A \to \mathbb{C} \\ z \to \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \end{array} \tag{1}$$

Para ver que efectivamente es una buena definición, probaremos que la integral $\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ converge absolutamente en $\Re(z) > 0$.

Sea $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ x > 0$. Teniendo en cuenta que $|t^{z-1}| = |t^{x-1+iy}| = t^{x-1}|t^{iy}| = t^{x-1}\left|e^{iy\,ln\,t}\right| = t^{x-1}$ tenemos

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

Descomponemos

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = I_1 + I_2$$

En I_1,

$$e^{-t} t^{x-1} \leq \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{y} \quad x > 0 \Rightarrow 1 - x < 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt \quad \text{es convergente}$$

Luego, I_1 es convergente si $x > 0$. (A)

En I_2,

$$e^{-t} t^{x-1} = e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} t^{x-1} \leq C_x e^{-\frac{t}{2}} \quad \forall\, t \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

donde

$$C_x = max\left\{e^{-\frac{t}{2}} t^{x-1}, \quad t \geq 1\right\} \quad (C_x \text{ existe pues } e^{-\frac{t}{2}} t^{x-1} \quad \text{es continua y} \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{2}} t^{x-1} = 0)$$

Siendo $\int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt$ convergente, resulta I_2 convergente $\forall\, x \in \mathbb{R}$. (B)

De (A) y (B), $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ converge $\forall\, x > 0$.

Observación 1

$$\Gamma(x + iy) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} e^{iy\,lnt} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \left[cos(y\,ln\,t) + i\,sen(y\,ln\,t)\right] dt \tag{2}$$

Teorema 13 *La función Gamma $\Gamma(z)$ definida originalmente en $\Re(z) > 0$, se prolonga analíticamente a una función que seguiremos llamando $\Gamma(z)$ sobre el dominio $\Omega = \mathbb{C} - \{z = -n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$*

Demostración:

1. Probaremos que $I_2 = \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ es entera (esto es, es holomorfa en todo $\mathbb{C}$), con lo cual no necesitaremos prolongarla analíticamente. Para esto veamos que se verifican las hipótesis del Teorema 3.
   Sea
   $$F : [1,\infty) \times \Omega \to \mathbb{C} \quad / \; F(z,t) = e^{-t}t^{z-1}.$$

   Esta función verifica las siguientes propiedades:

   a) Para cada $z \in \Omega$ la función $t \to F(z,t)$ es medible por ser continua.

   b) Existe $z_0 = 1 \in \Omega \; / \; F(1,t) = e^{-t}$ es integrable en $[1,\infty)$.

   c) Existe $\frac{\partial F}{\partial z} = e^{-t}t^{z-1}ln\, t$ sobre $[1,\infty) \times \Omega$

   d) Existe una función g integrable sobre $[1,\infty)$ tal que $|e^{-t}t^{z-1}ln\, t| \leq g(t) \, \forall\, t \in [1,\infty)$, $z \in \Omega$.
   Probaremos esto en todo semiplano $\Re(z) < b, \quad b \in \mathbb{R}$. Siendo $t \geq 1$
   $$\left|e^{-t}t^{z-1}ln\, t\right| = e^{-t}t^{x-1}ln\, t \leq e^{-\frac{t}{2}}e^{-\frac{t}{2}}t^{b-1}ln\, t \leq e^{-\frac{t}{2}}C_b \, \in L^1[1,\infty)$$
   ya que $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{2}}t^{b-1}ln\, t = 0.$

   Queda probado entonces que $I_2(z)$ es holomorfa en todo semiplano $\Re(z) < b, \; b \in \mathbb{R}$, luego $I_2(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$

2. Veamos que $I_1(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt$ es holomorfa para los z tales que $\Re(z) > 0$.
   Sea $z_0/ \; \Re(z_0) > 0$ y sea $a \in \mathbb{R} \; / \; 0 < a < \Re(z_0), a < 1$.
   Razonando de igual manera que en el item anterior, queremos probar que existe $g(t) \in L^1[0,1] \; / \; |e^{-t}t^{z-1}\, ln\, t| \leq g(t) \quad \forall\, t \in (0,1]\,, \; \Re(z) > a, \; a \in (0,1)$. Siendo $z = x + iy$, $t \in (0,1]$,
   $$\left|e^{-t}t^{z-1}\, ln\, t\right| = e^{-t}t^{x-1}\,|ln\, t| \leq t^{a-1}\,|ln\, t|$$

   Sea $0 < \epsilon < a$. Entonces
   $$t^{a-1}\,|ln\, t| = \frac{|ln\, t|}{t^{1-a}} = \frac{t^\epsilon\,|ln\, t|}{t^{1-a+\epsilon}} \leq C_\epsilon \frac{1}{t^{1-a+\epsilon}} \quad \text{ya que} \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{-ln\, t}{e^{-\epsilon\, ln\, t}} = 0$$

   Como $1 - a + \epsilon < 1$, $\frac{1}{t^{1-a+\epsilon}} \in L^1[0,1]$, y así resulta que $I_1(z)$ es holomorfa en cada semiplano $\Re(z) > a$, $a \in (0,1)$, y por lo tanto resulta holomorfa en $\Re(z) > 0$.

Probemos por último que podemos extender analíticamente a $I_1(z)$ al dominio Ω.

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!} \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{-t}t^{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+z-1}}{n!} = t^{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+z-1}}{n!}$$

Como
$$\left|\frac{t^{n+z-1}}{n!}\right| = \frac{t^{n+x-1}}{n!} \leq \frac{1}{n!} \quad \forall\, n \geq 1, \; x > 0$$

la serie es uniformemente convergente en el intervalo $[0,1]$. Podemos intercambiar entonces la integral y la suma

$$I_1(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt=\int_0^1 t^{z-1}dt+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{t^{n+z-1}}{n!}dt=\left.\frac{t^z}{z}\right|_0^1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left.\frac{t^{n+z}}{n+z}\right|_0^1=$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}\qquad(1)$$

Esta serie converge en todo compacto K de Ω y por lo tanto define una función holomorfa en Ω siendo (1) la prolongación analítica de $I_1(z)$ a Ω. ■

Definición 6 *Definimos la prolongación analítica de la función Gamma (que seguiremos llamando Gamma) a la función*

$$\Gamma:\Omega\to\mathbb{C}/\ \Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}+\int_1^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$$

Observación 2 *Observemos que* Γ *tiene polos simples en los puntos* $z=-n,\ n\in\mathbb{N}_0$.

Veamos ahora algunas propiedades de la función Gamma.

Proposición 4 *Propiedades de la función Gamma*

I. $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\quad\forall\, z\in\Omega.$

II. $\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!\,n^z}{z(z+1)...(z+n)}$

Demostración:

1. Si $\Re(z)>0$,

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{\infty}t^ze^{-t}dt=-t^ze^{-t}\Big|_0^{\infty}+z\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt=0+z\Gamma(z)$$

Si $z\in\Omega$, utilizamos la definición 3

$$z\Gamma(z)=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{z}{n+z}+z\int_1^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{z+n-n}{n+z}+\int_1^{\infty}e^{-t}zt^{z-1}dt=$$
$$=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{n}{n+z}+\left[t^ze^{-t}\big|_1^{\infty}+\int_1^{\infty}e^{-t}t^zdt\right]=$$
$$=e^{-1}-\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\frac{n}{n+z}+0-e^{-1}+\int_1^{\infty}e^{-t}t^zdt=-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n+1}{n+z+1}+\int_1^{\infty}e^{-t}t^zdt=$$
$$=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{n+z+1}+\int_1^{\infty}e^{-t}t^zdt=\Gamma(z+1)$$

■

2. Tomemos primero el caso $\Re(z) > 0$. Consideremos la función $f_n(z) = \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{z-1} dt$ Haciendo la sustitución $\tau = \frac{t}{n}$ y aplicando sucesivamente integración por partes,

$$f_n(z) = \int_0^1 (1-\tau)^n n^{z-1} \tau^{z-1} n d\tau = n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau =$$
$$= n^z \left[(1-\tau)^n \frac{\tau^z}{z}\Big|_0^1 + \int_0^1 n(1-\tau)^{n-1} \frac{\tau^z}{z} d\tau \right] = n^z \frac{n}{z} \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau =$$
$$= n^z \frac{n}{z} \left[(1-\tau)^{n-1} \frac{\tau^{z+1}}{z+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 (n-1)(1-\tau)^{n-2} \frac{\tau^{z+1}}{z+1} d\tau \right] = n^z \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \int_0^1 (1-\tau)^{n-2} \tau^{z+1} d\tau =$$
$$= \ldots = \frac{n^z\, n!}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau = \frac{n^z\, n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \Gamma(z)$$

En efecto

$$\text{Sea } \Delta = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt - f_n(z) = \int_0^n \left[e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n \right] t^{z-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{y } \epsilon > 0.$$

La convergencia de la integral $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ nos da la existencia de un $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\left| \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \le \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall\, n > N \tag{3}$$

Fijando $n > N$,

$$\Delta = \int_0^N \left[e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n \right] t^{z-1} dt + \int_N^n \left[e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n \right] t^{z-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

Sea $g(t) = e^t (1-\frac{t}{n})^n$, $g(0) = 1$

$$g'(t) = (1-\frac{t}{n})^n e^t + n(1-\frac{t}{n})^{n-1}(-\frac{1}{n}) e^t = (1-\frac{t}{n})^{n-1} e^t (1-\frac{t}{n}-1) \le 0 \quad \forall\, t \in [0,n]$$

Luego, g es decreciente en $[0,n]$, y por lo tanto

$$g(0) \ge g(t) \quad \forall\, t \in [0,n] \Rightarrow 1 \ge e^t (1-\frac{t}{n})^n \quad \forall\, t \in [0,n] \Rightarrow e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n \ge 0 \quad \forall\, t \in [0,n]$$

Así,

$$\begin{array}{rcccl} \left| \int_N^n \left[e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n \right] t^{z-1} dt \right| & \le & \int_N^n \left[e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n \right] t^{x-1} dt & < & \int_N^n e^{-t} t^{x-1} dt \\ & < & \int_N^\infty e^{-t} t^{x-1} dt & < & \dfrac{\epsilon}{3} \end{array} \tag{4}$$

Por otro lado, ya que

$$1 - e^t (1-\frac{t}{n})^n = \int_0^t e^\tau (1-\frac{\tau}{n}^{n-1}) \frac{\tau}{n} d\tau < \int_0^t e^\tau \frac{\tau}{n} d\tau \le e^t \int_0^t \frac{\tau}{n} d\tau = e^t \frac{t^2}{2n}$$

al multiplicar por e^{-t} surge que

$$e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \leq \frac{t^2}{2n}$$

y así

$$\left| \int_0^N \left[e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \right] t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^N \frac{t^2}{2n} t^{x-1} dt = \frac{1}{2n} \int_0^N t^{x+1} dt = \frac{1}{2n} M < \frac{\epsilon}{3} \qquad (5)$$

si n es suficientemente grande, digamos $n > n_0 > N$.

De (3), (4) y (5) resulta

$$|\Delta| = \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt - f_n(z) \right| < \epsilon \quad \text{si } n > n_0$$

Consideremos, por último, el caso $z \neq 0, -1, -2, ...$

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $-m < \Re(z) \leq -m + 1,\ m \in \mathbb{N}$. Luego $\Re(z + m) > 0$ y aplicando primero la Proposición 4. I tenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)...(z+m-1)} = \frac{1}{z(z+1)...(z+m-1)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{z+m} n!}{(z+m)...(z+m+n)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z\, n!\, n^m}{z(z+1)...(z+m-1)(z+m)(z+m+1)...(z+n)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z\, n!\, n^m}{z(z+1)...(z+n)(z+n+1)...(z+n+m)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z\, n!}{z(z+1)...(z+n)}
\end{aligned}$$

ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{(z+n+1)...(z+n+m)} = 1$

■

3.2. La función Beta

Definición 7 *Sea $\Theta = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, \Re(z) > 0,\ \Re(w) > 0\}$. Definimos la función Beta como*

$$B : \Theta \to \mathbb{C} \,/\, B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1 - \tau)^{w-1} d\tau$$

Observación 3 *Para establecer una relación entre la función Gamma y la Beta, utilizaremos la transformada de Laplace. Recordemos entonces la definición:*

Sea f una función definida sobre $\mathbb{R}$ tal que $f(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$, llamaremos Transformada de Laplace de f a la función F dada por

$$F(s) = \mathbb{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

donde la inversa

$$\mathbb{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)H(t)$$

siendo H es la conocida función de Heaviside, $H(t) = \begin{cases} 1 & si\, t > 0 \\ 0 & si\, t \leq 0 \end{cases}$

Consideremos la función integral

$$h_{z,w}(t) = \begin{cases} \int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1} d\tau \,, & \text{si } t \geq 0 \\ 0 \ \text{ si } t < 0 \end{cases} \tag{6}$$

Observemos que $h_{z,w}(1) = B(z,w)$ y además es la convolución $f * g\,(1)$ siendo $f(t) = t^{z-1}$ y $g(t) = t^{w-1}$. Utilizando el hecho que la transformada de Laplace de una convolución de dos funciones es el producto de sus respectivas transformadas de Laplace, resulta que

$$H_{z,w}(s) = \mathbb{L}\left\{h_{z,w}(t)\right\} = \mathbb{L}\left\{f * g\,(t)\right\} = \mathbb{L}\left\{f(t)\right\}\mathbb{L}\left\{g(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}t^{z-1}dt \int_0^\infty e^{-st}t^{w-1}dt =$$

$$\underbrace{=}_{st=u} \int_0^\infty e^{-u}(\frac{u}{s})^{z-1}\frac{1}{s}du \int_0^\infty e^{-u}(\frac{u}{s})^{w-1}\frac{1}{s}du = \frac{1}{s^z}\int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du \frac{1}{s^w}\int_0^\infty e^{-u}u^{w-1}du = \frac{\Gamma(z)}{s^z}\frac{\Gamma(w)}{s^w}$$

Por lo tanto

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}$$

Por otro lado, siendo $\Gamma(z)\Gamma(w)$ una constante, podemos obtener la función $h_{z,w}(t)$, teniendo en cuenta que $\mathbb{L}\left\{t^\alpha\right\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ siempre que $\Re(\alpha) > -1$ y aplicando la transformada inversa de Laplace (que es única) obtenemos

$$\mathbb{L}^{-1}\left\{H_{z,w}(s)\right\} = \mathbb{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}\right\} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\mathbb{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(z+w)}{s^{z+w}}\right\} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w-1}H(t)$$

Luego,

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w-1} \quad t \geq 0 \tag{7}$$

y tomando $t = 1$ obtenemos la siguiente expresión para la función Beta:

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

Enunciamos a partir de esto la siguiente proposición:

Proposición 5 *Si* $h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau, \quad t \geq 0,$ *entonces*

1. $h_{z,w}(t) = \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w-1}$

2. *Si* $t = 1,\ B(z,w) = \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$

Corolario 1 $B(z,w) = B(w,z) \quad \forall\, z,w \in \theta$

Observación 4 *Gracias a la Proposición* 5 *y el Teorema 11 podemos extender a la función Beta analíticamente al dominio* Ω *a partir de la extensión de la función Gamma.*

Con la ayuda de la función Beta, probaremos dos propiedades muy importantes de la función Gamma:

Proposición 6

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sen(\pi z)} \qquad \forall\ z/z \neq 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Demostración: Supongamos primero que $0 < \Re(z) < 1$. De la proposición 5 (a),

$$B(z,1-z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)} = \Gamma(z)\Gamma(1-z)$$
$$B(z,1-z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{1-z-1}dt = \int_0^1 \left(\tfrac{t}{1-t}\right)^{z-1} \tfrac{dt}{1-t}$$

Esta integral converge si $0 < \Re(z) < 1$. En efecto,

$$\left|\int_0^1 \left(\tfrac{t}{1-t}\right)^{z-1} \tfrac{dt}{1-t}\right| \leq \int_0^1 \left|\left(\tfrac{t}{1-t}\right)^{z-1}\right| \tfrac{dt}{1-t} = \int_0^1 \left(\tfrac{t}{1-t}\right)^{x-1} \tfrac{dt}{1-t} = \int_0^{1/2} \left(\tfrac{t}{1-t}\right)^{x-1} \tfrac{dt}{1-t} + \int_{1/2}^1 \left(\tfrac{t}{1-t}\right)^{x-1} \tfrac{dt}{1-t}$$

donde $x = \Re(z)$ y $0 < x < 1$

Con respecto a la primera integral:

$$0 \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq t-1 \leq 1 \Rightarrow (\frac{1}{2})^x \leq (1-t)^x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{(1-t)^x} \leq 2^x$$

$$\therefore \int_0^{1/2} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{dt}{1-t} = \int_0^{1/2} \frac{t^{x-1}}{(1-t)^x}dt \leq 2^x \int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1-x}}dt < \infty$$

En la segunda:

$$\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \wedge x-1 < 0 \Rightarrow 1 \leq t^{x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

$$\therefore \int_{1/2}^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{dt}{1-t} = \int_{1/2}^1 \frac{t^{x-1}}{(1-t)^x}dt \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \int_{1/2}^1 \frac{1}{(1-t)^x}dt < \infty$$

Supongamos ahora que $z = 1 + yi,\ y \neq 0$

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1} \frac{dt}{1-t}\right| = \left|\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{yi} \frac{dt}{1-t}\right| = \left|\int_0^1 \frac{t^{yi}}{(1-t)^{1+yi}}dt\right|$$

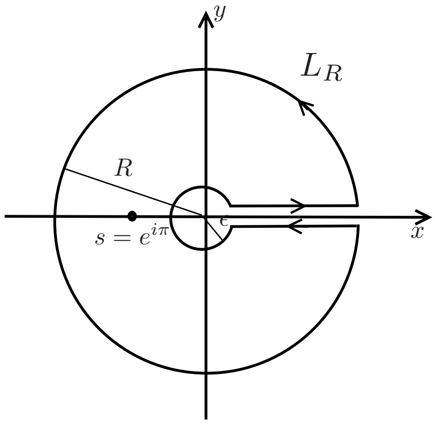
Haciendo la sustitución $\tau = \frac{t}{1-t}$, resulta $\tau + 1 = \frac{1}{1-t}$ y $d\tau = \frac{1}{(1-t)^2}dt$ obtenemos

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{\tau^{z-1}}{1+\tau}d\tau \tag{8}$$

Para calcular esta integral, consideremos la integral compleja

$$\int_{L_R} f(s)ds$$

donde $f(s) = \frac{s^{z-1}}{1+s}$ y L_R es el contorno que muestra la figura siguiente:



f tiene un polo simple en $s = e^{i\pi}$. Luego $\forall\, R > 1$, el Teorema 9 nos asegura que

$$\int_{L_R} f(s)ds = 2\pi i \left[Res\, f(s)\right]_{s=e^{i\pi}}$$

Aplicando el Teorema 10, resulta que

$$Res(f, e^{i\pi}) = (e^{i\pi})^{z-1} = \tfrac{e^{i\pi z}}{e^{i\pi}} = -e^{i\pi z}$$

Nuevamente usando el Teorema 9, obtenemos

$$\int_{L_R} f(s)ds = 2\pi i \left[Res\, f(s)\right]_{s=e^{i\pi}} = 2\pi i(-e^{i\pi z}) \tag{9}$$

Por otro lado,

$$\int_{L_R} f(s)ds = \int_{\epsilon}^{R} f(\tau)d\tau + \int_{C_R} f(s)ds + e^{2\pi iz}\int_{R}^{\epsilon} f(\tau)d\tau + \int_{C_\epsilon} f(s)ds$$

donde vale destacar que, sobre la rama superior del contorno L_R, $w = t + \delta i$, $t \in [\epsilon, R]$, y, sobre el contorno inferior $w = -t + (2\pi - \delta)i$, $t \in [\epsilon, R]$.
Más aún, la integral a lo largo del corte superior al semieje difiere en $e^{2\pi iz}$ con la integral a lo largo del corte inferior y hemos hecho tender δ a 0.

Además las integrales a lo largo de las circunferencias C_R y C_ϵ tienden a 0 cuando $\epsilon \to 0$ y $R \to \infty$, en efecto,

$$f(s) = \frac{s^{z-1}}{1+s} = \frac{s^z}{s(1+s)} \text{ y vale la desigualdad } \frac{1}{s(1+s)} \leq \frac{c}{1+|s|^2} \text{ prara cierto } c \in \mathbb{R}$$

$$\left|\int_{C_R} f(s)ds\right| \leq \int_{C_R} |f(s)|\, ds \leq \int_{|s|=R} |s|^x \frac{1}{s(1+s)}ds \leq \int_{|s|=R} |s|^x \frac{c}{1+|s|^2}ds = R^x \frac{c}{1+R^2}2\pi R =$$

$$= \frac{2\pi c}{R^{-x-1} + R^{2-1-x}} = \frac{2\pi c}{R^{-x-1} + R^{1-x}} \to 0 \quad \text{si } R \to \infty \quad \text{ya que } 0 < 1 - x < 1$$

$$\left|\int_{C_\epsilon} f(s)ds\right| \leq \int_{C_\epsilon} |f(s)|\, ds \leq \int_{|s|=\epsilon} |s|^x \frac{1}{s(1+s)}ds \leq \int_{|s|=\epsilon} |s|^x \frac{c}{1+|s|^2}ds = \epsilon^x \frac{c}{1+\epsilon^2}2\pi\epsilon \leq$$

$$\leq 2\pi\epsilon^{x+1} \to 0 \quad \text{si } \epsilon \to 0 \quad \text{ya que } 1 < x + 1$$

Haciendo $\epsilon \to 0$ y $R \to \infty$, resulta

$$\int_{L_R} f(s)ds = \int_0^\infty f(\tau)d\tau - \epsilon^{2\pi iz}\int_0^\infty f(\tau)d\tau = (1-e^{2\pi iz})\int_0^\infty f(\tau)d\tau \underbrace{=}_{(6)} (1-e^{2\pi iz})\Gamma(z)\Gamma(1-z)$$

Por lo tanto

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{-2\pi i(e^{i\pi z})}{1-e^{2\pi iz}} = \frac{\pi}{sen(\pi z)} \qquad 0 < Re(z) < 1$$

Si $m < \Re(z) < m+1$, poniendo $z = w + m$ donde $0 < \Re(w) < 1$.

Utilizando la Proposición 4. I,

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(w)} &= \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-m)} = (z-m)(z-m+1)...(z-1) = (-1)^m(1-z)...(m-1-z)(m-z) = \\ &= (-1)^m\frac{\Gamma(m+1-z)}{\Gamma(1-z)} = (-1)^m\frac{\Gamma(1-w)}{\Gamma(1-z)}\end{aligned}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = (-1)^m\Gamma(w)\Gamma(1-w) = (-1)^m\frac{\pi}{sen(\pi w)} = \frac{\pi}{sen(\pi(w+m))} = \frac{\pi}{sen\,\pi z}$$

Por último, la función $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ está definida y es analítica en $C = \{z \in \mathbb{C}/z \neq 0, \pm 1, 2, ...\}$, al igual que la función $\frac{\pi}{sen\,\pi z}$ y hemos demostrado, hasta aquí, que coinciden en el conjunto abierto $\hat{C} = \{z \in \mathbb{C}/\Re(z) \neq 0, \pm 1, 2, ...\}$.

Por el principio de identidad, Teorema 11, resulta $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{sen\,\pi z}\,\forall\, z \in C$

■

Corolario 2 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Demostración: Tomando $z = \frac{1}{2}$ en la Proposición anterior,

$$\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{sen\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Proposición 7 *Si* $2z \neq 0, -1, -2, ...,$ *entonces*

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,2^{1-2z}\Gamma(2z)$$

Demostración: Si $\Re(z) > 0$ podemos considerar $B(z,z) = \int_0^1 [\tau(1-\tau)]^{z-1}\,d\tau$.
Teniendo en cuenta la simetría de la función $y(\tau) = \tau(1-\tau)$ y haciendo la sustitución $s = 4\tau(1-\tau)$, resulta

$$B(z,z) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} [\tau(1-\tau)]^{z-1}\,d\tau = \frac{1}{2^{2z-1}}\int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{-1/2}ds = 2^{1-2z}B(z,\frac{1}{2})$$

Combinando este resultado con el de la Proposición 4 II y el Corolario 2,

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z}\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)} \Rightarrow \Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = 2^{1-2z}\Gamma(1/2)\Gamma(2z) = \sqrt{\pi}\, 2^{1-2z}\Gamma(2z)$$

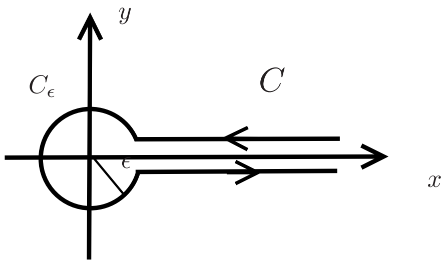
■

Observación 5 *Si en esta propiedad tomamos* $z = n + \frac{1}{2}$

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+1) = \sqrt{\pi}\, 2^{-2n}\Gamma(2n+1) \Rightarrow \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

3.3. Representación de la función Gamma como integral de línea.

La definición 5 de la función Gamma involucra una integral a lo largo del semieje positivo de las abscisas. Para llegar a una definición como integral de línea, consideremos el contorno C de la figura siguiente



y la función compleja $g(w) = e^{-w}w^{z-1} = e^{(z-1)log\, w - w}$ definida en el dominio $G = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}/\ \Re(z) > 0\ \wedge\ \Im(z) = 0\}$, donde estamos considerando la rama principal del logaritmo, esto es $log\, w = log\,|w| + i\, arg\, w$. Por el clásico teorema de Cauchy, Teorema 8, sabemos que esta integral tiene el mismo valor $\forall\, \epsilon > 0$.

Observemos que sobre la rama superior del contorno C, $w = t + \delta i$, $t \in \mathbb{R}$, y, sobre el contorno inferior $w = t + (2\pi - \delta)i$, $t \in \mathbb{R}$.

Haciendo $\delta \to 0$, tenemos

$$\int_C e^{-w}w^{z-1}dw = \int_{+\infty}^{\epsilon} e^{-t}t^{z-1}dt + \int_{C_\epsilon} e^{-w}w^{z-1}dt + e^{2(z-1)\pi i}\int_{\epsilon}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

Mostremos que la integral a lo largo de C_ϵ tiende a 0 si $\epsilon \to 0$.

$$\begin{aligned} |w| = \epsilon \text{ en } C_\epsilon \quad \Rightarrow \quad & \left|e^{-w}w^{x-1}w^{iy}\right| = \left|w^{x-1}\right|\left|e^{-w}\right|\left|e^{iyLog\, w}\right| = \\ & = \left|w^{x-1}\right|\left|e^{-w}\right|\left|e^{iy(log\,|w| + i arg\, w)}\right| = \left|w^{x-1}\right|\left|e^{-w-y\, arg\, w}\right|\left|e^{i\, y\, log\,\epsilon}\right| \end{aligned}$$

y llamando $M = max\,\{e^{-w-y\, arg\, w},\ w \in C_\epsilon\}$ resulta

$$\left|e^{-w}t^{x-1}w^{iy}\right| \leq M\left|w^{x-1}\right|$$

Por lo tanto

$$\left|\int_{C_\epsilon} e^{-w}w^{z-1}dt\right| \leq \int_{C_\epsilon}\left|e^{-w}w^{z-1}\right| dt \leq M\int_{C_\epsilon}\left|w^{x-1}\right| dw = M\int_{C_\epsilon}|w|^{x-1}\, dw = M\int_{C_\epsilon}\epsilon^{x-1}dw =$$

$$= M\epsilon^{x-1}2\pi\epsilon = 2\pi M\epsilon^{x} \to 0 \text{ si } \epsilon \to 0$$

Podemos concluir entonces que

$$\int_C e^{-w}w^{z-1}dt = \int_{+\infty}^{0} e^{-t}t^{z-1}dt + e^{2(z-1)\pi i}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = -\Gamma(z) + e^{2\pi iz}\Gamma(z)$$

ya que $e^{2(z-1)\pi i} = e^{2z\pi i}e^{-2\pi i} = e^{2z\pi i}$

Con todo esto estamos en condiciones de enunciar la siguiente proposición:

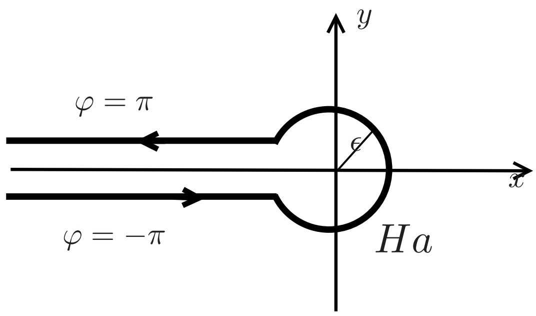
Proposición 8 *La función Gamma admite la siguiente representacion como integral de línea en Ω.*

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi zi}-1}\int_C e^{-w}w^{z-1}dw$$

La función $e^{2\pi zi}-1$ se anula en los puntos $z = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Los puntos $z = 1, 2, ...$ no son polos de $\Gamma(z)$ pues son valores regulares de la función $e^{-t}t^{z-1}$ y, por el Teorema de Cauchy $\int_C e^{-t}t^{z-1}dt = 0$. Si $z = 0, -1, -2, ...$, entonces la función $e^{-t}t^{z-1}$ no es una función entera de t y la integral a lo largo de C no se anula. Luego, los puntos $z = 0, -1, -2, ...$ son polos de $\Gamma(z)$. De acuerdo con el principio de prolongación analítica, la representación integral de la función Gamma es válido no sólo en $\Re(z) > 0$ sino en todo Ω.

3.4. Representación de $\frac{1}{\Gamma(z)}$ como integral de línea.

Definición 8 *Llamaremos contorno de Hankel a la curva que encierra el semieje real negativo como muestra la siguiente figura:*



Proposición 9 *Sea $z \in \Omega$ entonces*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\tau}\tau^{-z}d\tau$$

Demostración: Reemplazando z por $1-z$ en la Proposición 8,

$$\Gamma(1-z) = \frac{1}{e^{2\pi i(1-z)}-1}\int_C e^{-t}t^{-z}dt \Rightarrow \int_C e^{-t}t^{-z}dt = (e^{-2\pi zi)}-1)\Gamma(1-z) \tag{10}$$

Hacemos la sustitución $t = \tau e^{\pi i} = -\tau$. Esta sustitución transforma el plano complejo (t) con el corte en el semieje real positivo, en el plano complejo (τ) con el corte en el semieje real negativo.

El corte inferior $arg\tau = -\pi$ en el τ-plano será el correspondiente al corte superior $t = 0$ en el t-plano.

Resulta entonces que la curva C se transforma en el contorno de Hankel Ha.
Tenemos entonces:

$$\int_C e^{-t}t^{-z}dt = -\int_{Ha} e^{\tau}(e^{\pi i}\tau)^{-z}d\tau = -e^{-z\pi i}\int_{Ha} e^{\tau}\tau^{-z}d\tau$$

Teniendo en cuenta (10) y la Proposición 6,

$$-e^{-z\pi i}\int_{Ha} e^{\tau}\tau^{-z}d\tau = (e^{-2\pi zi)} - 1)\frac{\pi}{\Gamma(z)sen(\pi z)}$$

Luego considerando que $e^{iz} - e^{-iz} = 2isen\, z$

$$\int_{Ha} e^{\tau}\tau^{-z}d\tau = (1 - e^{-2\pi zi)})e^{-z\pi i}\frac{\pi}{\Gamma(z)sen(\pi z)} = (e^{z\pi i} - e^{-z\pi i})\frac{\pi}{\Gamma(z)sen(\pi z)} =$$

$$= 2isen(\pi z)\frac{\pi}{\Gamma(z)sen(\pi z)} = \frac{2i\pi}{\Gamma(z)}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\tau}\tau^{-z}d\tau$$

■

3.5. La función de Mittag-Leffler

Definición 9 *: Dado $z \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, ,$\Re(\alpha) > 0$ llamaremos función de Mittag-Leffler a la definida por:*

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

También podemos definirla de forma integral como:

$$E_{\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}\frac{e^t t^{\alpha-1}}{t^{\alpha} - z}dt$$

donde Ha es el contorno de Hankel.

Observación 6 *Veremos en la Observación 8 que, efectivamente, esta función está bien definida para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Observación 7 *La función de Mittag-Leffler proporciona una generalización de la función exponencial, $E_1(z) = e^z$.*

Otros casos particulares son

$$E_2(z^2) = cosh(z) \quad E_2(-z^2) = cos(z)$$

$$E_{1/2}(\pm z^{1/2}) = e^z\left[1 + erf(\pm z^{1/2})\right] = e^Z erfc(\mp z^{1/2})$$

donde el valor principal de la raíz cuadrada de z se asume en el plano complejo cortado a lo largo del eje real negativo, y las funciones erf y $erfc$ se definen como

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du \quad y \quad erfc(z) = 1 - erf(z)$$

Una generalización de esta función fue propuesta por Agarwal en el año 1953 y consiste en sustituir la constante 1 en el argumento de la función Gamma, por un nuevo parámetro complejo β.

Definición 10 *Llamaremos función de Mittag-Leffler generalizada o de dos parámetros a*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad z \in \mathbb{C}, \, \Re(\alpha) > 0, \, \beta \in \mathbb{C}.$$

Esta función también se puede definir de manera integral como:

$$E_{\alpha.\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^t t^{\alpha-\beta}}{t^\alpha - z} dt$$

Observación 8 *Para ver la convergencia de esta serie en todo $z \in \mathbb{C}$, utilizaremos la siguiente relación:*

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b}\left[1 + \frac{1}{2} z^{-1}(a-b)(a+b-1) + O(z^{-2})\right] \tag{11}$$

Esta fórmula aparece en el volumen 1 del libro de Erdelyi (fórmula 1.18 (4)), citado en la bibliografía.

Considerando $z = \alpha k$, $a = \alpha + \beta$, $b = \beta$ y aplicando el Teorema 3:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| (\alpha k)^\alpha \left[1 + \frac{\alpha(\alpha + 2\beta - 1)}{2\alpha k} + O((\alpha k)^{-2})\right] \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} |\alpha^\alpha| \, k^{\Re(\alpha)} \left| \left[1 + \frac{\alpha(\alpha + 2\beta - 1)}{2\alpha k} + O((\alpha k)^{-2})\right] \right| = \lim_{k\to\infty} |\alpha^\alpha| \, k^{\Re(\alpha)} = +\infty$$

ya que $\Re(\alpha) > 0$

Observación 9

1. *Claramente, se cumple que*

$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z) \quad \forall \, z \in \mathbb{C}$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} e^z = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} e^z = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

$$\vdots$$

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+2}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}$$

2. *Las funciones $senh(z)$ y $cosh(z)$ también son casos particulares de la función de Mittag-Leffler:*

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = cosh(z)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{senh(z)}{z}$$

3. *Las funciones hiperbólicas de orden n, (que son generalizaciones de senh y de cosh) también se pueden expresar en función de Mittag-Leffler*

$$h_r(z,n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(z^n) \quad r = 1,2,...,n$$

Así también como las funciones trigonométricas de orden n (que son generalizaciones del seno y el coseno):

$$k_r(z,n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{nj+r-1}}{(nj+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(-z^n) \quad r = 1,2,...,n$$

4. *Se puede probar (no lo haremos en este trabajo) la siguiente destacada relación:*

$$E_{\frac{1}{2},1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} = e^{z^2} erfc(-z)$$

donde $erfc(z)$ es el complemento de la función error definido por

$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{t^2} dt$$

5. *Para $\beta = 1$ obtenemos la denominada función de Mittag-Leffler uniparamétrica:*

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_\alpha(z)$$

3.6. La función de Bessel

Definición 11 *Llamaremos función de Bessel a*

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

donde $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\nu \in \mathbb{C}$

Observación 10 *Esta serie es convergente para todo $z \in \mathbb{C}$. Además si $\nu = -\frac{1}{2}$ y $\nu = \frac{1}{2}$ (utilizando la Proposición 7) tenemos,*

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-\frac{1}{2}}}{k!\Gamma(-\frac{1}{2}+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}\sqrt{2}}{k!\sqrt{z}2^{2k}\Gamma(k+\frac{1}{2})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}\sqrt{2}}{k!\sqrt{z}2^{2k}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{\pi}2^{1-2k}\Gamma(2k)} =$$

$$\left(\frac{2}{z\pi}\right)^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{k!}\frac{(k-1)!}{2(2k-1)!}=\left(\frac{2}{z\pi}\right)^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}=\left(\frac{2}{z\pi}\right)^{1/2} cos\, z$$

Análogamente,

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{2}{z\pi}\right)^{1/2} sen\, z$$

3.7. La función de Wright

Esta función juega un papel fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias, en particular en la ecuación fraccionaria de difusión. Su nombre es en honor a E. Maitland Wright, el eminente matemático británico que introdujo e investigó esta función desde 1933.

Definición 12 *Llamaremos función de Wright a*

$$W(z;\alpha;\beta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)}$$

definida para todo $z\in\mathbb{C}$, $\alpha>-1$, $\beta>0$

Proposición 10 *Representación integral de la función de Wright*
Si $\alpha>0$ y $\beta>0$, vale la siguiente representación

$$W(z;\alpha;\beta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}\tau^{-\beta}e^{\tau+z\tau^{-\alpha}}$$

donde Ha es el contorno de Hankel.

Demostración: Teniendo en cuenta la Proposición 8, la convergencia uniforme de la serie en Ha y el Teorema 5,

$$W(z;\alpha;\beta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\int_{Ha}e^{\tau}\tau^{-(\alpha k+\beta)}d\tau=\int_{Ha}e^{\tau}\tau^{-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k\tau^{-\alpha k}}{k!}d\tau=$$

$$=\int_{Ha}e^{\tau}\tau^{-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z\tau^{-\alpha})^k}{k!}d\tau=\int_{Ha}e^{\tau}\tau^{-\beta}e^{z\tau^{-\alpha}}d\tau=\int_{Ha}e^{\tau+z\tau^{-\alpha}}\tau^{-\beta}d\tau$$

Probemos la convergencia uniforme. Para esto, consideremos la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\tau}\tau^{-\beta}(z\tau^{-\alpha})^k}{k!}$ y llamemos $f_k(\tau)=\frac{e^{\tau}\tau^{-\beta}(z\tau^{-\alpha})^k}{k!}$, $k\in\mathbb{N}$. Claramente esta serie converge puntualmente a la función $f(\tau)=e^{\tau+z\tau^{-\beta}}\tau^{-\beta}$.

Por otro lado,

$$\tau\in Ha\Rightarrow(|\tau|\geq\epsilon\ \wedge\Re(\tau)\leq\epsilon)\underbrace{\Rightarrow}_{\alpha>0}(|\tau|^{\alpha}\geq\epsilon^{\alpha}\ \wedge\Re\tau\leq\epsilon)\Rightarrow\left(\left|z\tau^{-\alpha}\right|\leq\frac{|z|}{\epsilon^{\alpha}}\ \wedge\ |e^{\tau}|=e^{\Re\tau}\leq e^{\epsilon}\right)$$

$$\therefore\ |f_k(\tau)|=\left|\frac{e^{\tau}\tau^{-\beta}(z\tau^{-\alpha})^k}{k!}\right|\leq\frac{e^{\epsilon}}{\epsilon^{\beta}}\frac{(|z|\,\epsilon^{-\alpha})^k}{k!}$$

donde la serie numérica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\epsilon}}{\epsilon^{\beta}} \frac{\left(|z|\epsilon^{-\alpha}\right)^k}{k!}$ es convergente . La convergencia uniforme de la serie la obtenemos entonces aplicando el criterio M de Weierstrass (Teorema 4).

■

Observación 11 *A partir de la definición de la función de Wright sigue que*

$$W(z;0;1) = e^z$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} W(-\frac{z^2}{4};1;\nu+1) = J_{\nu}$$

$$W(-z;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$$

Como vemos, la función de Wright es una generalización de la función exponencial y de la de Bessel.

Observación 12 *Utilizando la Propiedad 6, tenemos otra representación:*

$$W(z;\alpha;\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \Gamma(1-\alpha k-\beta) sen\, \pi(\alpha k+\beta)}{k!}$$

Observación 13 *Para ver que la función de Wright está bien definida en $\mathbb{C}$ (i.e., la serie converge en $\mathbb{C}$), razonamos como en la Observación 8 y resulta*

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta)(k+1)!}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} \right| = \lim_{k\to\infty} |\alpha k|^{\alpha} (k+1) = \infty$$

ya que $\alpha > -1$, (estamos suponiendo $\alpha \neq 0$, pero este caso es trivial).
Podemos concluir entonces que la función de Wright es una función entera. ■

Finalmente vale destacar la relación que hay entre la función de Wright y la de Mittag-Leffler, ya que la transformada de Laplace de la función de Wright admite una expresión ligada a la de Mittag-Leffler:

$$L\{W(t;\alpha;\beta);s\} = L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)};s\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{1}{s^{k+1}} = s^{-1} E_{\alpha,\beta}(s^{-1})$$

donde se ha aplicado la linealidad de la transformada de Laplace y el hecho de que

$$\mathbb{L}\left\{t^k;s\right\} = \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}} = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

4. Integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville

La derivada de Riemann - Liouville aparece como el resultado de unificar nociones de integración y derivación de orden entero. Supongamos que la función $f(\tau)$ es continua e integrable en todo intervalo finito (a,t). Además, puede tener una singularidad de orden $r<1$ en el punto $t=a$, esto es

$$\lim_{\tau\to a}(\tau-a)^r f(\tau)=c\neq 0$$

Nota 1 *En la expresión anterior anterior el límite es en realidad un límite por derecha. En adelante haremos este tipo abuso de notación, donde interpretaremos los límites donde estén definidos.*

Entonces la integral

$$({}_aI^1 f)(t)=\int_a^t f(\tau)d\tau$$

existe, es finita (lo estamos pidiendo por hipótesis) y tiende a 0 cuando $t\to a$.
En efecto, haciendo la sustitución $\tau=a+y(t-a)$y nombrando $\epsilon=t-a$ obtenemos:

$$\lim_{t\to a}({}_aI^1 f)(t)=\lim_{t\to a}\int_a^t f(\tau)d\tau=\lim_{t\to a}(t-a)\int_0^1 f(a+y(t-a))dy=$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\underbrace{(\epsilon)^{1-r}}_{\to 0 \text{ pues } 1-r>0}\underbrace{\int_0^1(\epsilon)^r f(a+y\epsilon))dy}_{\to K}=0$$

Veamos que es válido intercambiar el límite con la integral. Para esto definimos la función

$$F:(0,1)\times(0,1)\to\mathbb{R}$$
$$F(y,\epsilon)=\epsilon^r f(a+y\epsilon)$$

F verifica las hipótesis del Teorema 6:

1. Para cada $\epsilon>0$ $y\to F(y,\epsilon)$ es medible pues por hipótesis f es continua en $(0,1)$
2. $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\epsilon^r f(a+y\epsilon)=\lim\limits_{\epsilon\to 0}(\epsilon y)^r f(a+y\epsilon)y^{-r}=\dfrac{c}{y^r}=h(y)$
3. $|f(a+y\epsilon)\epsilon^r|=|f(a+y\epsilon)(y\epsilon)^r y^{-r}|\leq My^{-r}$ ya que f tiene una singularidad de orden r, luego $\lim\limits_{\epsilon\to 0}(\epsilon y)^r f(a+y\epsilon)=c\neq 0$ y resulta $f(a+y\epsilon)(\epsilon y)^r$ acotada en $(0,1)$ $\forall y$.
   Pudimos acotar a F entonces por una función que no depende de ϵ y que es integrable en $(0,1)$ por ser $r<1$.

Luego, podemos intercambiar el límite con la integral y

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1(\epsilon y)^r f(a+y\epsilon)y^{-r}dy=\int_0^1\lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon y)^r f(a+y\epsilon))y^{-r}dy=\int_0^1 cy^{-r}=K<\infty$$

ya que $r<1$.

Podemos considerar la integral doble

$$({}_aI^2 f)(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau)d\tau = \int_a^t f(\tau)d\tau \int_\tau^t d\tau_1 = \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau$$

Integrando nuevamente se obtiene:

$$({}_aI^3 f)(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_3)d\tau_3 = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} (\tau_1-\tau)f(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau$$

Se puede probar por inducción que para el caso general tenemos la *fórmula de Cauchy*

$$({}_aI^n f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau$$

En efecto, suponiendo que $({}_aI^n f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau$,

$$({}_aI^{n+1} f)(t) = {}_aI(({}_aI^n f)(t)) = \int_a^t \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^s (s-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau ds \underbrace{=}_{Fubini}$$

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t \int_\tau^t (s-\tau)^{n-1} f(\tau)ds d\tau = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t f(\tau)\int_\tau^t (s-\tau)^{n-1} ds d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)n}\int_a^t (t-\tau)^n f(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_a^t (t-\tau)^n f(\tau)d\tau$$

■

Supongamos ahora que n es un natural fijo, $k \geq n$ y queremos hallar la derivada $(k-n)-$ésima de la función $f(t)$. Podríamos pensar que derivar $(k-n)$ veces es equivalente a integrar primero n veces y luego derivar k veces, vale decir:

$$f^{(k-n)} = D^k\left[({}_aI^n f)(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n)}D^k\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau$$

Esto nos induce a presentar las siguientes definiciones.

Definición 13 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Llamaremos parte entera techo de α, y notamos $\lceil\alpha\rceil$, al menor entero mayor que α, esto es, si $n = \lceil\alpha\rceil$, entonces $n-1 \leq \alpha < n$*

Definición 14 *Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, y $n = \lceil\alpha\rceil$. Sea f una función continua e integrable en todo intervalo finito $(a,t) \subset (a,b)$ que además puede tener una singularidad de orden $r < 1$ en el punto $t = a$. La integral*

$$({}_aI^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau$$

se denomina integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α por izquierda. *Y llamaremos derivada Riemann - Liouville de orden α por izquierda a*

$$({}_a^{RL}D^\alpha f)(t) = \left[D_a^n I^{n-\alpha} f\right](t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau$$

También definimos la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α por derecha y la derivada Riemann - Liouville de orden α por derecha

$$(I_b^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

$$({}^{RL}D_b^{\alpha} f)(t) = \left[(-D)^n I_b^{n-\alpha} f\right](t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

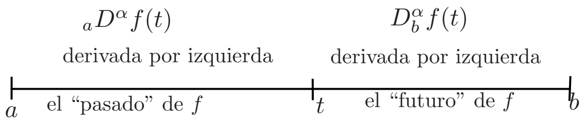
Observación 14 *Cuando α es un entero no negativo la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville coincide con la derivada entera usual ya que si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, entonces $n = \lceil \alpha \rceil = n+1$ y*

$$({}_a^{RL}D^n f)(t) = \left[D^{n+1} {}_aI^{n+1-n} f\right](t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \int_a^t (t-\tau)^{n+1-n-1} f(\tau) d\tau =$$

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \int_a^t f(\tau) d\tau = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

Observación 15 *Contrariamente al caso entero, la derivada fraccionaria de Riemann - Liouville es un operador no local, quedando definido por medio de una integral que depende de los valores que la función asuma en todo el intervalo de integración.*

Más aún, si suponemos que f es una función que depende de t, donde t es el tiempo, podríamos interpretar que la definición de derivada fraccionaria por la izquierda de f en t involucra los valores que f tomó en el intervalo $[a, t]$, esto es, involucra *el pasado de f*. Análogamente, la derivada fraccionaria por la derecha de f en t involucra los valores que f tomó en el intervalo $[t, b]$, esto es, involucra *el futuro de f*. Esto lo podemos representar como se indica en el siguiente gráfico:



Observación 16 *En la fórmula de Cauchy era necesario que $n \geq 1$ pero en la definición*

$$({}_aI^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

será suficiente que $\alpha > 0$ para que esta integral exista.

En efecto, sea $y \in (a, t)$. Consideremos dos integrales:

1. $\int_a^y (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$ existe y es finita:

   Basta observar que $f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}$ es seccionalmente continua en $[a, y]$:

   - $f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}$es continua en$(a, y)$
   - $\lim\limits_{\tau \to a^+} f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} = \lim\limits_{\tau \to a^+} f(\tau)(t-\tau)^{r}(t-\tau)^{\alpha-1-r} = c(t-a)^{\alpha-1-r}$

- $\lim_{\tau \to y^-} f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} = f(y)(t-y)^{\alpha-1}$

2. $\int_y^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau$ existe y es finita:

   En este caso, podemos afirmar que f es continua en $[y,t]$ (pues por hipótesis f es continua en todo intervalo abierto (a,t) con $t > a$ e $y \in (a,t)$). Luego f está acotada en $[y,t]$ y

$$\int_y^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau \leq \int_y^t M(t-\tau)^{\alpha-1} < \infty \quad \text{ya que } \alpha - 1 > -1$$

Observación 17 *Según la definición 14, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville no es otra cosa que la derivada entera de una integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α, con $0 < \alpha \leq 1$.*

En efecto, sea $\beta \in \mathbb{R}^+$, $n = \lceil \beta \rceil$. Luego $n-1 \leq \beta < n$ y por lo tanto $0 < n - \beta \leq 1$. Llamando $\alpha = n - \beta$,

$$({}_a^{RL}D^\beta f)(t) = \left[D_a^n I^{n-\beta} f\right](t) = \left[D_a^n I^{n-(n-\alpha)} f\right](t) = \left[D_a^n I^\alpha f\right](t)$$

Proposición 11 *Sea f una función continua para $t \geq a$. Entonces*

$$\lim_{\alpha \to 0^+} {}_aI^\alpha f(t) = f(t)$$

Demostración: Una prueba más sencilla resulta de suponer que f tiene derivadas continuas para $t \geq a$. En este caso, podemos integrar por partes

$$\begin{aligned} {}_aI^\alpha f(t) &= -\frac{(t-\tau)^\alpha f(\tau)}{\Gamma(\alpha)\alpha}\bigg|_a^t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\alpha}\int_a^t (t-\tau)^\alpha f'(\tau)d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-\tau)^\alpha f'(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Observemos que $\lim_{\alpha \to 0^+} (t-\tau)^\alpha = 1\ \forall \tau$, luego

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha f(a) = f(a) \tag{12}$$

Por otro lado,

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_a^t (t-\tau)^\alpha f'(\tau)d\tau = \int_a^t \lim_{\alpha \to 0^+} (t-\tau)^\alpha f'(\tau)d\tau = \int_a^t f'(\tau)d\tau = f(t) - f(a) \tag{13}$$

Para intercambiar el límite verificamos nuevamente las hipótesis del Teorema 6 aplicado a la función $F : (a,t) \times (0,1) \to \mathbb{R}\ /\ F(\tau,\alpha) = (t-\tau)^\alpha f'(\tau)$

1. $F(\cdot,\alpha)$ es medible por ser continua.
2. $\lim_{\alpha \to 0} (t-\tau)^\alpha f'(\tau) = f'(\tau)$

3. $|F(\tau,\alpha)| = \left|\underbrace{(t-\tau)^{\alpha}}_{>0} f'(\tau)\right| = (t-\tau)^{\alpha}\,|f'(\tau)| \leq |f'(\tau)| \max\{1,(t-\tau)\}$ que es una función integrable en (a,t). Esta acotación proviene de que, suponiendo $0<\alpha<1$,

$$\text{si } t-\tau \geq 1 \Rightarrow ln(t-\tau) \geq 0 \Rightarrow 0 < \alpha ln(t-\tau) < ln(t-\tau) \Rightarrow 1 < (t-\tau)^{\alpha} < (t-\tau)$$

$$\text{y, si } 0 < t-\tau \leq 1 \Rightarrow ln(t-\tau) \leq 0 \Rightarrow 0 > \alpha ln(t-\tau) > ln(t-\tau) \Rightarrow (t-\tau) < (t-\tau)^{\alpha} < 1$$

De (12) y (13) podemos afirmar que

$$\lim_{\alpha\to 0} {}_aI^{\alpha} f(t) = f(t)$$

Ahora, si suponemos solamente que f es continua para $t \geq a$, la prueba es un poco más compleja:

$${}_aI^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(f(\tau)-f(t))d\tau + \frac{f(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1}(f(\tau)-f(t))d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1}(f(\tau)-f(t))d\tau + \frac{f(t)(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Nombramos $I_1 := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}(f(\tau)-f(t))d\tau$ e $I_2 := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\delta}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}(f(\tau)-f(t))d\tau$

Sea $\epsilon > 0$. Siendo f continua en $[a,\infty)$ existe $\delta > 0$ (podemos suponer $t-\delta > a$) y resulta f uniformemente continua en $[t-\delta,t]$, luego $|f(\tau)-f(t)| < \epsilon \;\forall \tau \in [t-\delta,t]$. Con esto:

$$|I_2| < \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\delta}^t \left|(t-\tau)^{\alpha-1}(f(\tau)-f(t))\right| d\tau < \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1}\epsilon d\tau = \frac{\epsilon\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \quad \forall \alpha > 0$$

Luego

$$\lim_{\alpha\to 0} |I_2| = \epsilon \tag{14}$$

Por otro lado, siendo f continua en $[a,t-\delta]$, resulta acotada y por lo tanto:

$$|I_1| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta} \left|(t-\tau)^{\alpha-1}(f(\tau)-f(t))\right| d\tau <$$

$$< \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau = \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(t-a)^{\alpha}-\delta^{\alpha}\right]$$

Luego

$$\lim_{\alpha\to 0} |I_1| = 0 \tag{15}$$

Con todo esto, podemos asegurar que

$$|{}_aI^{\alpha} f(t) - f(t)| \leq |I_1| + |I_2| + \left|\frac{f(t)(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - f(t)\right|$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\left|\frac{f(t)(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-f(t)\right| = \lim_{\alpha\to 0}|f(t)|\underbrace{\left|\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-1\right|}_{\to 0} = 0 \tag{16}$$

De (14), (15) y (16) podemos decir que

$$0 \leq \lim_{\alpha\to 0}|{}_aI^{\alpha}f(t)-f(t)| \leq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\alpha\to 0}|{}_aI^{\alpha}f(t)-f(t)| = 0$$

■

Proposición 12 ${}_aI^{\alpha}({}_aI^{\beta}f(t)) = {}_aI^{\alpha+\beta}f(t)$

Demostración:

$${}_aI^{\alpha}({}_aI^{\beta}f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-\tau)^{\beta-1}\,{}_aI^{\alpha}f(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\beta-1}d\tau\int_a^{\tau}(\tau-\zeta)^{\alpha-1}f(\zeta)d\zeta =$$

$$\underbrace{=}_{\text{Fubini}} \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(\zeta)d\zeta\int_{\zeta}^t (t-\tau)^{\beta-1}(\tau-\zeta)^{\alpha-1}d\tau \tag{17}$$

Ahora bien, de (6) y (7) tenemos que:

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}(t-\tau)^{w-1}d\tau \Rightarrow h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w-1}$$

Luego,

$$\int_{\zeta}^t (t-\tau)^{\beta-1}(\tau-\zeta)^{\alpha-1}d\tau \underbrace{=}_{\tau-\zeta=u} \int_0^{t-\zeta}[(t-\tau)-u]^{\beta-1}u^{\alpha-1}du =$$

$$= h_{\alpha,\beta}(t-\zeta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-\zeta)^{\alpha+\beta-1} \tag{18}$$

De (17) y (18):

$${}_aI^{\alpha}({}_aI^{\beta}f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(\zeta)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-\zeta)^{\alpha+\beta-1}d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(\zeta)(t-\zeta)^{\alpha+\beta-1}d\zeta =_a I^{\alpha+\beta}f(t)$$

Observación 18 *Obviamente podemos intercambiar α y β y obtenemos*

$${}_aI^{\beta}({}_aI^{\alpha}f(t)) =_a I^{\beta+\alpha}f(t) =_a I^{\alpha+\beta}f(t) =_a I^{\alpha}({}_aI^{\beta}f(t))$$

Observación 19 *Integración fraccionaria de la función* $(t-a)^\alpha$

Si en (18) tomamos $\zeta = a$ *y* $\alpha := \alpha+1$ *tenemos que*

$$\int_a^t (t-\tau)^{\beta-1}(\tau-a)^\alpha d\tau = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta}$$

Luego,

$$ {}_aI^\beta((t-a)^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-\tau)^{\beta-1}(\tau-a)^\alpha d\tau = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}$$

■

Proposición 13 *El operador Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es lineal*

$$ {}_a^{RL}D^\alpha(\lambda f(t)+\mu g(t)) = \lambda\, {}_a^{RL}D^\alpha f(t) + \mu\, {}_a^{RL}D^\alpha g(t)$$

Demostración: Se deduce de la linealidad de la integral.

Proposición 14

$$ {}_a^{RL}D^\alpha({}_aI^\alpha f(t)) = f(t)$$

Nota 2 *Esto significa que el operador* derivación fraccionaria de Riemann-Liouville *es un inverso a izquierda del operador* integración fraccionaria de Riemann-Liouville *de mismo orden* α*.*

Demostración: Veamos primero el caso $\alpha = n$. El caso $n=1$ es trivial. Supongamos entonces que $n>1$. Aplicando la Observación 14

$$ {}_a^{RL}D^n({}_aI^n f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_a^t \left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\frac{1}{(n-1)!}(t-\tau)^{n-1}\right] f(\tau)d\tau = \frac{d}{dt}\int_a^t f(\tau)d\tau = f(t) \qquad (19)$$

Para comprobar que es válido derivar bajo el signo integral (que depende de t!), planteamos lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{t+h}(t+h-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau - \int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\int_a^t \frac{((t+h-\tau)^{n-1}-(t-\tau)^{n-1})f(\tau)}{h}d\tau + \int_t^{t+h}\frac{(t+h-\tau)^{n-1}f(\tau)}{h}d\tau\right] =$$

$$= \int_a^t (n-1)(t-\tau)^{n-2}f(\tau)d\tau \qquad (20)$$

En efecto, en la primera integral, es lícito intercambiar el límite con la integral ya que podemos aplicar el Teorema 6 a la función

$$F:(a,t)\times(0,1)\to\mathbb{R}/F(\tau,h) = \frac{((t+h-\tau)^{n-1}-(t-\tau)^{n-1})f(\tau)}{h}$$

Trabajamos con el límite $h\to 0^+$. El caso $h\to 0^-$ es análogo.

1. $F(\cdot,h)$ es medible por ser continua.

2. $$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} F(\tau,h) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{((t+h-\tau)^{n-1}-(t-\tau)^{n-1})}{h} f(\tau) = \\ &= \lim_{h\to 0^+} -\frac{((t-(\tau-h))^{n-1}-(t-\tau)^{n-1})}{-h} f(\tau) = f(\tau)(n-1)(t-\tau)^{n-2}\end{aligned}$$

3. $|F(\tau,h)| = \left|\frac{((t+h-\tau)^{n-1}-(t-\tau)^{n-1})f(\tau)}{h}\right|$.
   Queremos acotar por una función integrable que no dependa de h. Para esto, definimos la función $g(s)=(s)^{n-1}$. Siendo g continua y derivable en $\mathbb{R}$ podemos aplicar el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[t-\tau, t-\tau+h]$, y, para cada $h \in (0,1) \quad \exists c_h \in [t-\tau, t-\tau+h]\,/$

$$\left|\frac{((t+h-\tau)^{n-1}-(t-\tau)^{n-1})}{h}\right| = (n-1)\,|c_h|^{n-2}$$

   Ahora bien, $a<\tau<t \Rightarrow 0<t-\tau<t-a$ y siendo $0<h<1$, resulta

$$0<t-\tau<c_h<t-\tau+h<t-a+h<t-a+1$$

   Por lo tanto

$$\begin{aligned}|F(\tau,h)| = \left|\tfrac{((t+h-\tau)^{n-1}-(t-\tau)^{n-1})f(\tau)}{h}\right| &= (n-1)\,|c_h|^{n-2}\,|f(\tau)| \leq \\ &\leq (n-1)(t-a+1)^{n-2}\,|f(\tau)|\end{aligned}$$

   que es una función integrable en (a,t) ya que $n-2\geq 0$

Luego

$$\lim_{h\to 0}\int_a^t \frac{((t+h-\tau)^{n-1}-(t-\tau)^{n-1})f(\tau)}{h}d\tau = \int_a^t (n-1)(t-\tau)^{n-2}f(\tau)d\tau$$

El segundo límite es una aplicación directa del *Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral*

$$\int_t^{t+h}\frac{(t+h-\tau)^{n-1}f(\tau)}{h}d\tau = (t+h-\zeta)^{n-1}f(\zeta)\frac{t+h-t}{h} = (t+h-\zeta)^{n-1}f(\zeta)$$

con $\zeta\in[t,t+h]$, y por lo tanto

$$\lim_{h\to 0^+}\int_t^{t+h}\frac{(t+h-\tau)^{n-1}f(\tau)}{h}d\tau = \lim_{h\to 0^+}(t+h-\zeta)^{n-1}f(\zeta) = (t-t)^{n-1}f(t) = 0$$

Finalmente para obtener el resultado (19) basta repetir este procedimiento $n-1$ veces.

Ahora para el caso general, sea $n/\ n-1\leq\alpha<n$. Debido a la Proposición 12,

$${}_aI^{n-\alpha}({}_aI^{\alpha}f(t)) = {}_aI^{n}f(t)$$

Luego,

$${}_a^{RL}D^{\alpha}({}_aI^{\alpha}f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_aI^{n-\alpha}({}_aI^{\alpha}f(t))\right\} = \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_aI^{n}f(t)\right\} = f(t)$$

■

Observación 20 *De aquí en adelante notaremos* ${}_aD^\alpha$ *en vez de* ${}^{RL}_{\ a}D^\alpha$

Proposición 15 *Si la derivada fraccionaria* ${}_aD^\alpha f(t)$ *de la función* $f(t)$ *es integrable para el orden* α*, entonces*

$$ {}_aI^\alpha({}_aD^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{k-1}({}_aD^{\alpha-j}f)(a+)\frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} - \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha+1-k)}\left[{}_aI^{k-a}f(\tau)\right]_{t=a} $$

donde $({}_aD^{\alpha-j}f)(a+) = \left[{}_aD^{\alpha-j}f(t)\right]_{t=a}$ *y* $k=\lceil\alpha\rceil$

Demostración:
Razonando como en la Proposición 14, es válido escribir

$$ {}_aI^\alpha({}_aD^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}\,{}_aD^\alpha f(\tau)d\tau = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t(t-\tau)^\alpha\,{}_aD^\alpha f(\tau)d\tau\right] \quad (21) $$

Sea $k=\lceil\alpha\rceil$

$$ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t(t-\tau)^\alpha\,{}_aD^\alpha f(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t(t-\tau)^\alpha\frac{d^k}{d\tau^k}\left[{}_aI^{k-\alpha}f(\tau)\right]d\tau \quad (22) $$

Vamos a integrar por partes utilizando $u=(t-\tau)^\alpha$ y $dv=\frac{d^k}{d\tau^k}\left({}_aI^{k-\alpha}f(\tau)\right)$, para lo cual observemos que:

$$ v(\tau) = \int\frac{d^k}{d\tau^k}\left({}_aI^{k-\alpha}f(\tau)\right)d\tau = \frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\,{}_aI^{k-\alpha}f(\tau) $$

Luego,

$$ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t(t-\tau)^\alpha_a D^\alpha f(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t(t-\tau)^\alpha\frac{d^k}{d\tau^k}\left[{}_aI^{k-\alpha}f(\tau)\right]d\tau = $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(t-\tau)^\alpha\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\,{}_aI^{k-\alpha}f(\tau)\Big|_a^t - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t(-\alpha)(t-\tau)^{\alpha-1}\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left({}_aI^{k-\alpha}f(\tau)\right)d\tau = $$

$$ = -\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\,{}_aI^{k-1-(\alpha-1)}f(\tau)\right]_{\tau=a} + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left({}_aI^{k-\alpha}f(\tau)\right)d\tau = $$

$$ = -\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[{}_aD^{\alpha-1}f(t)\right]_{t=a} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left({}_aI^{k-\alpha}f(\tau)\right)d\tau $$

Aplicando este mismo razonamiento a la integral $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\,{}_aI^{k-\alpha}f(\tau)d\tau$ obtenemos

$$ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\,{}_aI^{k-\alpha}f(\tau)d\tau = $$

$$ = -\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[{}_aD^{\alpha-2}f(t)\right]_{t=a} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-2}\frac{d^{k-2}}{d\tau^{k-2}}\left({}_aI^{k-\alpha}f(\tau)\right)d\tau $$

Con esto,

$$ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t(t-\tau)^\alpha\,{}_aD^\alpha f(\tau)d\tau = $$

$$-\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[{}_aD^{\alpha-1}f(t)\right]_{t=a}-\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[{}_aD^{\alpha-2}f(t)\right]_{t=a}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-2}\frac{d^{k-2}}{d\tau^{k-2}}\,{}_aI^{k-\alpha}f(\tau)d\tau=$$

$$=\ldots=-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(t-a)^{\alpha+1-j}}{\Gamma(2+\alpha-j)}\left[{}_aD^{\alpha-j}f(t)\right]_{t=a}-\frac{(t-a)^{\alpha+1-k}}{\Gamma(\alpha+2-k)}\left[{}_aI^{k-a}f(\tau)\right]_{t=a}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1-k)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-k}\,{}_aI^{k-\alpha}f(\tau)d\tau$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1-k)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-k}\,{}_aI^{k-\alpha}f(\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1-k)}\int_a^t(t-\tau)^{(\alpha+1-k)-1}\,{}_aI^{k-\alpha}f(\tau)d\tau=$$

$$=\,{}_aI^{(\alpha+1-k)}({}_aI^{k-\alpha}f(t))=_a I^1f(t)$$

resulta

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha}\,{}_aD^{\alpha}f(\tau)d\tau=\\ =-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(t-a)^{\alpha+1-j}}{\Gamma(2+\alpha-j)}\left[{}_aD^{\alpha-j}f(t)\right]_{t=a}-\frac{(t-a)^{\alpha+1-k}}{\Gamma(\alpha+2-k)}\left[{}_aI^{k-a}f(\tau)\right]_{t=a}+\,{}_aI^1f(t)\end{gathered}\tag{23}$$

De (21) y (23)

$${}_aI^{\alpha}({}_aD^{\alpha}f)(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha}_aD^{\alpha}f(\tau)d\tau\right]=$$

$$=\frac{d}{dt}\left[-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(t-a)^{\alpha+1-j}}{\Gamma(2+\alpha-j)}\left[{}_aD^{\alpha-j}f(t)\right]_{t=a}-\frac{(t-a)^{\alpha+1-k}}{\Gamma(\alpha+2-k)}\left[{}_aI^{k-a}f(\tau)\right]_{t=a}+_a I^1f(t)\right]=$$

$$-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha+1-j)}\left[{}_aD^{\alpha-j}f(t)\right]_{t=a}-\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha+1-k)}\left[{}_aI^{k-a}f(\tau)\right]_{t=a}+f(t)$$

■

Observación 21 *Observemos que esta propiedad, si $0<\alpha<1$ resulta*

$${}_aI^{\alpha}({}_aD^{\alpha}f)(t)=f(t)-\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[{}_aI^{1-\alpha}f(t)\right]_{t=a}$$

Nota 3 *Para simplificar la notación, escribiremos directamente*

$${}_aI^{\alpha}({}_aD^{\alpha}f)(t)=f(t)-\sum_{j=1}^{k}({}_aD^{\alpha-j}f)(a+)\frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}$$

donde, entendemos que $({}_aD^{\alpha-k}f)(a+)=\left[{}_aI^{k-a}f(\tau)\right]_{t=a}$ ya que, en este caso sería $\alpha-k<0$ y la derivada fraccionaria no estaría definida.

Observación 22 *Con esta propiedad hemos demostrado que el operador integral de Riemann-Liouville en general, no es el inverso a izquierda del operador derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.*

Proposición 16 *1. Si $f(t)$ es una función continua y $\alpha > \beta \geq 0$,*

$$ {}_aD^{\alpha}({}_aI^{\beta}f(t)) = {}_aD^{\alpha-\beta}f(t) $$

2. Si $f(t)$ es una función continua y $0 \leq \alpha < \beta$,

$$ {}_aD^{\alpha}({}_aI^{\beta}f(t)) = {}_aI^{\beta-\alpha}f(t) $$

Demostración:

1. Consideremos los enteros no negativos n y m donde $0 \leq m-1 \leq \alpha < m$ y $0 \leq n \leq \alpha - \beta < n$. Obviamente, $n \leq m$, luego podemos poner $m = n + \tilde{n}$ con $\tilde{n} \in \mathbb{N}$.
   Utilizando la definición de derivada fraccionaria y la Proposición 12 obtenemos:

$$ {}_aD^{\alpha}({}_aI^{\beta}f(t)) = \frac{d^m}{dt^m}\left[{}_aI^{m-\alpha}({}_aI^{\beta}f(t))\right] = \frac{d^m}{dt^m}\left[{}_aI^{m-\alpha+\beta}f(t))\right] = \frac{d^m}{dt^m}\left[{}_aI^{\tilde{n}+n-(\alpha-\beta)}f(t))\right] = $$

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left\{\frac{d^{\tilde{n}}}{dt^{\tilde{n}}}\left[{}_aI^{\tilde{n}}({}_aI^{n-(\alpha-\beta)}f(t))\right]\right\} = \frac{d^n}{dt^n}\left[{}_aI^{n-(\alpha-\beta)}f(t))\right] = {}_aD^{\alpha-\beta}f(t) $$

2. Utilizando ahora la Proposición 12, y Proposición 14 tenemos

$$ {}_aD^{\alpha}({}_aI^{\beta}f(t)) = {}_aD^{\alpha}({}_aI^{\alpha+\beta-\alpha}f(t)) = {}_aD^{\alpha}({}_aI^{\alpha}\,{}_aI^{\beta-\alpha}f(t)) = $$

$$ = ({}_aD^{\alpha}\,{}_aI^{\alpha})({}_aI^{\beta-\alpha}f(t)) = {}_aI^{\beta-\alpha}f(t) $$

■

Veamos ahora qué resulta de *combinar* derivadas ordinarias y fraccionarias:

Corolario 3 *Sea $\beta \geq 0$, $n = \lceil \beta \rceil$ y $k \in \mathbb{N}$.*

1. Si $k \geq n$, $D^k({}_aI^{\beta}f(t)) = {}_aD^{k-\beta}f(t)$

2. Si $k < n$, $D^k({}_aI^{\beta}f(t)) = {}_aI^{\beta-k}f(t)$

Observación 23 *Derivada fraccionaria de la función $(t-a)^{\alpha}$.*
Recordemos que estamos pidiendo que $f(t)$ sea continua e integrable en todo intervalo finito (a,t) y además puede tener una singularidad de orden $r < 1$ en el punto $t = a$. Luego bastará pedir que $\alpha > -1$. Sea $n/\ n-1 \leq \alpha < n$ y $f(t) = (t-a)^{\alpha}$. Utilizando la definición 14, la observación 18 y recordando que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,

$$ {}_aD^{\beta}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}({}_aI^{n-\beta}(f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n-\beta+1)}(t-a)^{\alpha+n-\beta}\right] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}(t-a)^{\alpha-\beta} $$

Observación 24 *Esta observación nos dice que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una constante no es cero. En efecto:*

$$ {}_aD^{\beta}(C) = C\,{}_aD^{\beta}(1) = C\,{}_aD^{\beta}((t-a)^0) = \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(-\beta+1)}(t-a)^{-\beta} = \frac{C}{\Gamma(-\beta+1)(t-a)^{\beta}} $$

Proposición 17 *Si la derivada fraccionaria ${}_aD^\beta f(t)$ de la función $f(t)$ es integrable y n es un entero no negativo tal que $0 \leq n-1 \leq \beta < n$.*

1. *Si $\alpha > \beta$ entonces*

$$ {}_aI^\alpha({}_aD^\beta f(t)) = {}_a I^{\alpha-\beta} f(t) - \sum_{j=1}^{n} \left[{}_aD^{\beta-j} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} $$

2. *Si $\alpha < \beta$ entonces*

$$ {}_aI^\alpha({}_aD^\beta f(t)) = {}_aD^{\beta-\alpha} f(t) - \sum_{j=1}^{n} \left[{}_aD^{\beta-j} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} $$

Demostración:

1. Usando primero la Proposición 12, luego la Proposición 15 y la linealidad de la integral

$$ {}_aI_a^\alpha D^\beta f(t) = {}_aI_a^{\alpha-\beta} I_a^\beta D^\beta f(t) = {}_aI^{\alpha-\beta} \left\{ f(t) - \sum_{j=1}^{n} \left[{}_aD^{\beta-j} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\beta-j}}{\Gamma(\beta-j+1)} \right\} = $$

$$ {}_aI^{\alpha-\beta}(f(t)) - \sum_{j=1}^{n} \left[{}_aD^{\beta-j} f(t)\right]_{t=a} {}_aI^{\alpha-\beta} \left[\frac{(t-a)^{\beta-j}}{\Gamma(\beta-j+1)} \right] $$

con $n = \lceil \beta \rceil$

Basta probar entonces que

$$ {}_aI^{\alpha-\beta} \left[\frac{(t-a)^{\beta-j}}{\Gamma(\beta-j+1)} \right] = \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \tag{24} $$

Aplicando la Observación 19, resulta

$$ {}_aI^{\alpha-\beta} \left[(t-a)^{\beta-j} \right] = \frac{\Gamma(\beta-j+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+\beta-j+1)} (t-a)^{\alpha-j} $$

y, de la linealidad de la integral, obtenemos 24

2. Sea $\alpha < \beta$. Aplicamos primero la Proposición 14, luego la Proposición 12, y finalmente la Proposición 16 - 1

$$ {}_aI_a^\alpha D^\beta f(t) = {}_a D_a^\beta I^\beta \left({}_aI_a^\alpha D^\beta f(t)\right) = {}_aD^\beta \left({}_aI^\alpha \left({}_aI_a^\beta D^\beta f(t) \right)\right) = {}_aD^{\beta-\alpha} \left({}_aI_a^\beta D^\beta f(t) \right) \tag{25} $$

Aplicamos ahora la Proposición 15 y por último la Observación 23

$$ \begin{aligned} {}_aD^{\beta-\alpha} \left({}_aI_a^\beta D^\beta f(t) \right) = \quad & {}_aD^{\beta-\alpha} \left(f(t) - \textstyle\sum_{j=1}^{k} ({}_aD^{\beta-j} f)(a+) \dfrac{(t-a)^{\beta-j}}{\Gamma(\beta-j+1)} \right) = \\ & = {}_aD^{\beta-\alpha} (f(t)) - \textstyle\sum_{j=1}^{k} ({}_aD^{\beta-j} f)(a+) D^{\beta-\alpha} \left(\dfrac{(t-a)^{\beta-j}}{\Gamma(\beta-j+1)} \right) \\ & = {}_aD^{\beta-\alpha} (f(t)) - \textstyle\sum_{j=1}^{k} ({}_aD^{\beta-j} f)(a+) \left(\dfrac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \right) \end{aligned} \tag{26} $$

Así, de (25) y (26)

$$ {}_aI_a^{\alpha}D^{\beta}f(t) = {}_aD^{\beta-\alpha}\left(f(t)\right) - \sum_{j=1}^{k}({}_aD^{\beta-j}f)(a+)\left(\frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}\right) $$

■

Proposición 18

$$ {}_aD^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j} = 0 \quad j=1,2,...,n \quad con \quad n=\lceil\alpha\rceil $$

Demostración: A partir de la Observación 23,

$$ {}_aD^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j} = \frac{d^n}{dt^n}({}_aI^{n-\alpha}((t-a)^{\alpha-j}) = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(\alpha-j+n-\alpha+1)}(t-a)^{\alpha-j+n-\alpha}\right] = $$

$$ = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(-j+n+1)}(t-a)^{-j+n}\right] = 0 $$

ya que $0 \leq n-j \leq n-1$ y estamos derivando n veces. ■

Observación 25 *Podemos decir entonces que las funciones* $(t-a)^{\alpha-j}$ $\quad j=1,2,...,n \quad con \quad n=\lceil\alpha\rceil$ *cumplen el rol que las constantes desarrollan en la derivación entera, para el operador derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden* α.

Corolario 4 ${}_aD^{\alpha}f(t) = 0 \Longleftrightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t-a)^{\alpha-j}$, $\lceil\alpha\rceil = n$

Demostración:

$\Rightarrow$)

$$ {}_aD^{\alpha}f(t) = 0 \Rightarrow \frac{d^n}{dt^n}\left[{}_aI^{n-\alpha}f(t)\right] = 0 \Rightarrow {}_aI^{n-\alpha}f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t-a)^i $$

Para obtener $f(t)$ aplicamos el operador inverso (Proposición 14), resulta

$$ f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\, D^{n-\alpha}(t-a)^i \underbrace{=}_{\text{Obs 23}} \sum_{i=0}^{n-1} \hat{c}_i\,(t-a)^{i-n+\alpha} \underbrace{=}_{n-i=j} \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\,(t-a)^{\alpha-j} $$

$\Leftarrow$)

$$ f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t-a)^{\alpha-j} \Rightarrow {}_aD^{\alpha}f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, {}_aD^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j} \underbrace{=}_{\text{Prop 18}} 0 $$

■

La siguiente proposición es relativa a la *derivación entera* de una *derivada fraccionaria* y viceversa.

Proposición 19

1. *Si $f(t)$ es una función que admite derivada fraccionaria de orden α y $n \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD^\alpha f(t)) = {}_aD^{\alpha+n} f(t)$$

2. *Si $f(t)$ es una función derivable hasta el orden n y la derivada $n-$ésima admite derivada de Riemann-Liouville de orden α, entonces*

$${}_aD^\alpha(\frac{d^n}{dt^n} f(t)) = {}_aD^{\alpha+n} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha-n}}{\Gamma(1+j-\alpha-n)}$$

Demostración:

1. Sea $\alpha = k - \beta$ donde $k = \lceil \alpha \rceil$ y $0 < \beta \leq 1$.

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD^\alpha f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{d^k}{dt^k}\,{}_aI^{k-\alpha} f(t)\right] = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{d^k}{dt^k}\,{}_aI^{k-(k-\beta)} f(t)\right] = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{d^k}{dt^k}\,{}_aI^{\beta} f(t)\right] =$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{d^k}{dt^k}(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau)d\tau)\right] = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\,{}_aI^\beta f(t) = {}_aD^{n+k-\beta} f(t) = {}_aD^{n+\alpha} f(t)$$

2. Por la Proposición 15, tenemos que:

$${}_aI^n({}_aD^n f)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{n-1}({}_aD^{n-j}f)(a+)\frac{(t-a)^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} - \left[{}_aI^{n+1-n} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{n-n}}{\Gamma(n-n+1)} =$$

$$= f(t) - \sum_{j=1}^{n-1}({}_aD^{n-j}f)(a+)\frac{(t-a)^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} - \underbrace{\left[{}_aI^{1} f(t)\right]_{t=a}}_{=0} =$$

$$f(t) - \sum_{j=1}^{n-1}({}_aD^{n-j}f)(a+)\frac{(t-a)^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \underbrace{=}_{n-j=l}$$

$$= f(t) - \sum_{l=1}^{n-1}({}_aD^{l}f)(a+)\frac{(t-a)^{l}}{\Gamma(l+1)} \underbrace{=}_{\text{Obs 14}} f(t) - \sum_{l=1}^{n-1} f^{(l)}(a+)\frac{(t-a)^{l}}{\Gamma(l+1)} \tag{27}$$

Por otro lado, aplicando la Proposición 14 con $\alpha = n$, y la Observación 14, tenemos que ${}_aD^n({}_aI^n g(t)) = g(t)$, luego

$${}_aD^\alpha g(t) = {}_aD^{\alpha+n}({}_aI^n g(t)) \tag{28}$$

Combinando (27), (28) y la Observación 23,

$$ {}_aD^{\alpha}(\frac{d^n f(t)}{dt^n}) = {}_aD^{\alpha+n}({}_aI^n f^{(n)}(t)) = {}_aD^{\alpha+n}(f(t) - \sum_{l=1}^{n-1} f^{(l)}(a+)\frac{(t-a)^l}{\Gamma(l+1)}) = $$

$$ = {}_aD^{\alpha+n} f(t) - \sum_{l=1}^{n-1} f^{(l)}(a+)\frac{(t-a)^{l-\alpha-n}}{\Gamma(l+1-\alpha-n)} $$

■

Corolario 5 *Bajo las hipótesis de los items a) y b) de la Proposición anterior y si* $f^{(j)}(a) = 0, \quad \forall\, k = 0, 1, 2, ..., n-1$*, entonces el operador* derivada fraccionaria de Riemann-Liouville *conmuta con el operador* $\frac{d^n}{dt^n}$*, esto es,*

$$ \frac{d^n}{dt^n}({}_aD^{\alpha} f(t)) = {}_a D^{\alpha}(\frac{d^n}{dt^n} f(t)) $$

Proposición 20 *Si la derivada fraccionaria* ${}_aD^{\alpha} f(t)$ *de la función* $f(t)$ *es integrable,*

$$ {}_aD^{\alpha}({}_aD^{\beta} f(t)) = {}_aD^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^{n} ({}_aD^{\beta-j} f)(a+)\frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)} $$

donde $\lceil \beta \rceil = n$ *.*

Demostración:
Sea m tal que $m-1 \leq \alpha < m$. Haremos el caso $m-\alpha < \beta$.
Aplicando la definición de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, la Proposición 17-2 y la Proposición 19-1 tenemos:

$$ {}_aD^{\alpha}({}_aD^{\beta} f(t)) = \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aI^{m-\alpha}({}_aD^{\beta} f(t))\right\} = $$

$$ = \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD^{\alpha+\beta-m} f(t) - \sum_{j=1}^{n} ({}_aD^{\beta-j} f)(a+)\frac{(t-a)^{m-\alpha-j}}{\Gamma(1+m-\alpha-j)}\right\} = $$

$$ = {}_aD^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^{n} ({}_aD^{\beta-j} f)(a+)\frac{d^m}{dt^m}\left\{\frac{(t-a)^{m-\alpha-j}}{\Gamma(1+m-\alpha-j)}\right\} = $$

$$ = {}_aD^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^{n} ({}_aD^{\beta-j} f)(a+)\frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)} $$

■

Observación 26 *Intercambiando los roles de* α *y* β *en la Proposición anterior, tenemos:*

$$ {}_aD^{\beta}({}_aD^{\alpha} f(t)) = {}_aD^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^{m} ({}_aD^{\alpha-j} f)(a+)\frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)} $$

donde $m-1 \leq \alpha < m$.

Con esto podemos concluir que, en general, los *operadores derivada fraccionaria de Riemann-Liouville* de distintos órdenes (el caso $\alpha = \beta$ ya lo analizamos) *no conmutan*.
Sin embargo, si agregamos las siguientes condiciones:

$$_aD^{\alpha-j}f(a+) = 0, \quad \forall\, j = 1, ..., m$$

$$_aD^{\beta-j}f(a+) = 0, \quad \forall\, j = 1, ..., n$$

podemos asegurar que $_aD^{\alpha}(_aD^{\beta}f(t)) = {_aD^{\beta}}(_aD^{\alpha}f(t)) = {_aD^{\alpha+\beta}}f(t)$

5. Derivada fraccionaria de Caputo

La definición de derivada de Riemann-Liouville tuvo un papel muy importante en el desarrollo de la teoría del cálculo fraccionario y de sus aplicaciones puramente matemáticas (solución de ecuaciones diferenciales de orden entero, definición de nuevas clases de funciones, suma de series, etc.). Sin embargo, para los problemas que surgieron en aplicaciones modernas y en los que se disponía de condiciones iniciales físicas concretas, se prefirió otra definición de derivada fraccionaria, también introducida por Liouville pero utilizada por primera vez por Caputo. Esta definición tiene la ventaja de requerir únicamente el conocimiento de los valores iniciales de la función y de sus derivadas de orden entero si es aplicada en conjunción con el método de la Transformada de Laplace.

Definición 15 *Sean $\alpha > 0$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. Sea f una función derivable hasta el orden n en $[a, b]$. Definimos la* derivada fraccionaria de Caputo *de orden α como*

$$ {}_a^C D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = {}_a I^{n-\alpha}(f^{(n)}(t)) $$

Observación 27 *Según esta definición, la derivada fraccionaria de Caputo no es otra cosa que la intgral fraccionaria de orden $n - \alpha$ de la función $f^{(n)}(t)$. Vimos en la Observación 16 que esta integral era convergente si $\alpha > 0$ y f es una función integrable y continua en todo intervalo (a, t) que puede presentar una singularidad de orden $r < 1$ en $t = a$. Estas hipótesis claramente las verifica $f^{(n)}(t)$ ya que al ser f derivable hasta el orden n resulta $f^{(n)}(t)$ continua, esto es, $t = a$ es un punto regular de f.*

Proposición 21 *Sean $\alpha > 0$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. Sea f una función derivable hasta el orden n en $[a, b]$. Entonces*

$$ {}_a^C D^\alpha f(t) \to 0 \text{ si } t \to a $$

Demostración:
Siendo $f^{(n)}(t)$ continua en $[a, b]$, es acotada y

$$ \left| {}_a^C D^\alpha f(t) \right| = \left| \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right| \leq \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} M d\tau $$

Sea ahora $t > a$, fijo y pensemos en una integral impropia de 2ª especie:

$$ \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau = \lim_{c \to t^-} \int_a^c (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau = \lim_{c \to t^-} \left. -\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right|_a^c = $$

$$ = \lim_{c \to t^-} -\frac{(t-c)^{n-\alpha}}{n-\alpha} + \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha} = \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \quad \text{ya que } n - \alpha > 0 $$

Luego,

$$ \left| {}_a^C D^\alpha f(t) \right| \leq \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \to 0 \text{ si } t \to a $$

■

Observación 28 *Si $\alpha = m \in \mathbb{N}$ entonces $n = m + 1$ y*

$$ {}_a^C D^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^t (t-\tau)^0 f^{(m+1)}(\tau) d\tau = f^{(m)}(\tau)\Big|_a^t = f^{(m)}(t) - f^{(m)}(a+) $$

Proposición 22 *Sean $\alpha > 0$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. Sea f una función derivable hasta el orden n en $[a, b]$. Entonces*

$$\lim_{\alpha \to n} {}_a^C D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t)$$

Demostración:
Aplicando la Observación 27 y la Proposición 11,

$$\lim_{\alpha \to n} {}_a^C D^\alpha f(t) = \lim_{\alpha \to n} {}_a I^{n-\alpha}(f^{(n)}(t)) = f^{(n)}(t)$$

■

Observación 29 *Esta propiedad nos indica que, similarmente a lo ocurrido con la derivada de Riemann-Liouville, la derivada fraccionaria de Caputo nos da una interpolación entre los operadores de orden entero.*

Observación 30 *Vimos en la Observación 24 que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una constante no es cero. Esto no ocurre con la derivada fraccionaria de Caputo. Claramente*

$${}_a^C D^\alpha (K) = 0.$$

Proposición 23 *El operador Derivada fraccionaria de Caputo es lineal*

$${}_a^C D^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda\, {}_a^C D^\alpha f(t) + \mu\, {}_a^C D^\alpha g(t)$$

Demostración: Se deduce de la linealidad de la integral.

Proposición 24 *Relación entre las derivadas fraccionarias de Caputo y de Riemann- Liouville. Sea f una función derivable hasta el orden n en el intervalo $[a, b]$. Entonces*

$${}^{RL}{}_a D^\alpha f(t) = {}_a^C D^\alpha f(t) + \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(a+) \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)} \tag{29}$$

Demostración:
Sea $n = \lceil \alpha \rceil$. Aplicando la definición 2.1, integrando sucesivamente por partes y utilizando el resultado (20) de la Proposición 14, tenemos:

$${}^{RL}{}_a D^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right] =$$

$$= \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[- \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} f(\tau) \Big|_a^t + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} f'(\tau) d\tau \right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha} f(a) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} f'(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{(n-\alpha)...(n-\alpha-n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} (t-a)^{-\alpha} f(a) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f'(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{(n-\alpha)...(1-\alpha)}{(n-\alpha)...(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha} f(a) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f'(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f'(\tau) d\tau \qquad (30)$$

Aplicando este razonamiento a $\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f'(\tau) d\tau$ obtenemos:

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f'(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{(t-a)^{-\alpha+1}}{\Gamma(2-\alpha)} f'(a+) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(2)}(\tau) d\tau$$

Reemplazando en la expresión (30) y repitiendo este procedimiento n veces, se obtiene la expresión (29). ∎

Corolario 6 *Bajo las mismas hipótesis de la Proposición anterior,*

$${}_a^C D^\alpha f(t) = {}^{RL}{}_a D^\alpha \left[f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(a+) \frac{(t-a)^j}{j!} \right]$$

Demostración:
Es una aplicación directa de la Proposición 22 y la Observación 23. En efecto,

$${}^{RL}{}_a D^\alpha \left(\frac{(t-a)^j}{j!}\right) = \frac{\Gamma(j+1)(t-a)^{j-\alpha}}{j!\Gamma(1+j-\alpha)} = \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(1+j-\alpha)}$$

∎

A partir de la Proposición 22 podemos plantear las siguientes equivalencias que son muy importantes en la formulación de problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales con derivadas fraccionarias.

Proposición 25 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = \lceil \alpha \rceil$ .Sea f una función derivable hasta el orden n en el intervalo $[a,b]$. Entonces la condición fraccionaria*

$${}_a^{RL} D^\alpha f(a+) = 0$$

equivale a las condiciones enteras

$$f^{(j)}(a+) = 0, \quad j = 0, 1, ..., n-1$$

Demostración:
$\Leftarrow$) Si $f^{(j)}(a+) = 0, \quad j = 0, 1, ..., n-1$, en la Proposición 22 resulta

$${}^{RL}{}_a D^\alpha f(t) = {}_a^C D^\alpha f(t)$$

si $t \to a$, ${}_a^C D^\alpha f(t) \to 0$ (por Proposición 21), de donde obtenemos la condición fraccionaria ${}_a^{RL} D^\alpha f(a+) = 0$.
$\Rightarrow$) Si ${}_a^{RL} D^\alpha f(a+) = 0$, multiplicando sucesivamente a ambos miembros de la identidad (29) por $(t-a)^{\alpha-j} \quad j = n-1, ..., 0$

$${}^{RL}{}_a D^\alpha f(t)(t-a)^{\alpha-j} = {}_a^C D^\alpha f(t)(t-a)^{\alpha-j} + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a+) \frac{(t-a)^{k-\alpha}(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(k+1-\alpha)}$$

y tomando límite cuando $t \to a+$ se obtiene

$$0 = 0 + f^{(j)}(a+) \quad j = n-1, ..., 0$$

■

Como anticipamos antes, esta equivalencia nos permitirá emplear condiciones iniciales enteras (las cuales podemos interpretar físicamente) teniendo en cuenta que por cada condición fraccionaria de orden α tendremos n condiciones enteras.

Proposición 26 ${}_a^C D^\alpha (t-a)^k = 0 \quad \forall\, \alpha > 0,\, n-1 \leq \alpha < n \quad y \quad k < n,\, k \in \mathbb{N}_0$.

Demostración:
Es evidente ya que $\dfrac{d^n}{dt^n}(t-a)^k = 0$ por ser $k < n$ y aplicamos la definición 15. ■

También vale pena resaltar que el papel que juega la función de Mittag-Leffler respecto a la derivada fracccionaria de Caputo es parecido al de la función exponencial con respecto a la derivación clásica.

Proposición 27 ${}_a^C D^\alpha E_{\alpha,1}(\lambda(t-a)^\alpha) = \lambda E_{\alpha,1}(\lambda(t-a)^\alpha), \quad \alpha > 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración:
Sea $\alpha > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Aplicando en primer lugar la convergencia uniforme de la serie sobre compactos, luego haciendo la sustitución $\tau = (t+a)s + a$ y aplicando finalmente la Proposición 5,

$${}_a^C D^\alpha E_{\alpha,1}(\lambda(t-a)^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{(\tau-a)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k(\alpha k(\alpha k-1)...(\alpha k-n+1))}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\alpha k-n} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k-n+1)} \int_0^{\frac{t-a}{t+a}} (t+a)^{\alpha k-\alpha}(\frac{t-a}{t+a} - s)^{n-\alpha-1}(s)^{\alpha k-n} ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k-n+1)} (t+a)^{\alpha k-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha k+1-n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\alpha k-\alpha+1)} \left(\frac{t-a}{t+a}\right)^{\alpha k-\alpha} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k-\alpha+1)} (t-a)^{\alpha k-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \frac{(t-a)^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha(k-l)+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \frac{(t-a)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} =$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{(t-a)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} = \lambda E_{\alpha,1}(\lambda(t-a)^\alpha)$$

■

Veamos otra diferencia entre la derivada fraccionaria de Caputo y la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville:

Proposición 28

$$ {}_a^C D^{\alpha}({}_a^C D^m f(t)) = {}_a^C D^{\alpha+m} f(t) \quad m = 0, 1, 2, ... ; \quad n-1 < \alpha < n $$

(mientras que en el caso de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville teníamos $\frac{d^n}{dt^n}({}_aD^{\alpha}f(t)) = {}_aD^{\alpha+n}f(t)$ *)*

Más aún

$$ {}_a^C D^{\alpha}({}_a^C D^m f(t)) = {}_a^C D^m({}_a^C D^{\alpha} f(t)) = {}_a^C D^{\alpha+m} f(t) $$
$$ si\ f^{(j)}(a) = 0, \quad j = n, n+1, ...m, \quad m = 0, 1, 2, ... ; \quad n-1 < \alpha < n $$

(mientras que en la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville teníamos $\frac{d^n}{dt^n}({}_aD^{\alpha}f(t)) = {}_aD^{\alpha}(\frac{d^n}{dt^n}f(t))$ *si* $f^{(j)}(a) = 0, \quad \forall\, k = 0, 1, 2, ..., n-1$*)*

Demostración:
Sea $n = \lceil \alpha \rceil$. Aplicando la Proposición 20 y la Observación 28,

$$ {}_a^C D^{\alpha}({}_a^C D^m f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} \left[{}_a^C D^m f(\tau)\right] d\tau = $$
$$ = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n}(f^{(m)}(\tau) - f^{(m)}(a+)) d\tau = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau \tag{31} $$

Por otro lado, siendo $n + m = \lceil \alpha + m \rceil$

$$ {}_a^C D^{\alpha+m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n+m-(\alpha+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(\alpha+m)-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau = $$
$$ = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau \tag{32} $$

De (31) y (32) tenemos la primera parte de la tesis.

Para la segunda parte llamemos $g(t) = {}_a^C D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} f(\tau) d\tau$
Por la Observación 28,

$$ {}_a^C D^m({}_a^C D^{\alpha} f(t)) = g^{(m)}(t) - g^{(m)}(a+) $$

donde

$$ g^{(m)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{(n-\alpha-(m+1))} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad \text{y} \quad g^{(m)}(a+) = 0 $$

resultado que se obtiene aplicando sucesivamente el resultado (20) de la Proposición 14.
Integrando por partes,

$$ g^{(m)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m-\alpha)} \frac{-(t-\tau)^{(n-\alpha-m)}}{n-\alpha-m} f^{(n)}(\tau) \bigg|_a^t + \frac{1}{\Gamma(n-m-\alpha)} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{(n-\alpha-m)}}{n-\alpha-m} f^{(n+1)}(\tau) d\tau = $$
$$ = \frac{(t-a)^{(n-\alpha-m)}}{\Gamma(n-m-\alpha+1)} f^{(n)}(a+) + \frac{1}{\Gamma(n-m-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{(n-\alpha-m)} f^{(n+1)}(\tau) d\tau = ... $$

$$... = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(n-\alpha-m+j)}}{\Gamma(n-m-\alpha+j+1)} f^{(n+j)}(a+) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{(n-\alpha-1)} f^{(n+m)}(\tau) d\tau$$

de donde podemos concluir que

$${}_a^C D^\alpha ({}_a^C D^m f(t)) = {}_a^C D^m ({}_a^C D^\alpha f(t)) = {}_a^C D^{\alpha+m} f(t)$$

si $f^{(n+j)}(a+) = 0 \quad \forall j = 0, ...m-1$, o bien si

$$f^{(j)}(a+) = 0 \quad \forall j = n, ..., n+m-1$$

∎

Veamos por último un enfoque que nos presenta a las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y de Caputo como una generalización del concepto de *derivación en sentido generalizado* o bien *derivación en el sentido de las distribuciones*. Para esto necesitaremos el concepto de convolución

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Consideremos la función

$$\chi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} H(t) \quad \alpha > 0$$

siendo H la función de Heaviside. Podemos escribir entonces,

$${}_a I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = f(t) * \chi_\alpha(t)$$

.

Nota 4 *La función χ_α es localmente integrable en $\mathbb{R}$ y por lo tanto es una distribución de orden 0.*

Veamos algunas propiedades que verifica la distribución χ_α,

Proposición 29

$$\partial^k \chi_k = \delta \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{33}$$

donde $\delta(t)$ es la función Delta de Dirac.

Demostración:
Lo probamos por inducción.
Si $k = 1$, por la Proposición 1

$$\partial \chi_1 = \partial H = \delta$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\partial^{k+1}(\chi_{k+1}(\varphi)) = \partial^k(\partial(\chi_{k+1}(\varphi))) = \partial^k(-\chi_{k+1}(\varphi')) = \partial^k(\chi_k(\varphi)) \underbrace{=}_{hip} \delta$$

ya que

$$-\chi_{k+1}(\varphi') = \int_0^\infty \frac{t^k}{\Gamma(k+1)}\varphi'(t)dt = -\left.\frac{t^k}{\Gamma(k+1)}\varphi(t)\right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}\varphi(t)dt = 0 + \chi_k(\varphi)$$

■

Nuestro objetivo es ahora poder definir χ_α cuando $\alpha \leq 0$. Observemos que si quisiéramos considerar $\alpha = -k,\ k \in \mathbb{N}$ estaríamos en problemas, ya que estos son polos de la función *Gamma* y no podemos evaluar $\Gamma(-k)$. Sin embargo, la siguiente propiedad nos permitirá dar una definición adecuada:

Proposición 30 $\partial^k \chi_{\alpha+k} = \chi_\alpha \, \forall \, \alpha > 0, \forall k \in \mathbb{N}$

Demostración: Es análogo a lo hecho en la Proposición anterior.

Definición 16 *Sea $\alpha \leq 0$ y $k = \lceil \alpha \rceil$. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Definimos la distribución χ_α como*

$$\chi_\alpha(\varphi) = \partial^k \chi_{\alpha+k}(\varphi) = (-1)^k \chi_{\alpha+k}(\partial^k \varphi)$$

Observación 31

$$\chi_0 = \partial \chi_1 = \partial H = \delta$$

$$\chi_{-k} = \partial^{k+1}\chi_{-k+k+1} = \partial^{k+1}\chi_1 = \partial^k(\partial H) = \partial^k \delta = \delta^{(k)} \tag{34}$$

Recordemos que la función *Delta de Dirac* juega un papel muy importante en la convolución: es el elemento neutro. Sea f una función localmente integrable (i.e., f es una distribución), por la Proposición 3 resulta

$$f(t) * \delta^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) * \delta(t) = f^{(k)}(t) \tag{35}$$

De (34) y (35)

$$f(t) * \chi_0(t) = f(t) * \delta(t) = f(t)$$

$$f(t) * \chi_{-1}(t) = f(t) * \delta'(t) = f'(t)$$

$$\vdots$$

$$f(t) * \chi_{-k}(t) = f(t) * \delta^{(k)}(t) = f^{(k)}(t)$$

donde estas derivadas están dadas en el sentido de las distribuciones.

Luego, una posible definición derivada fraccionaria de orden α, $\alpha > 0$, con $f(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})_{[a,\infty)}$, sería

$${}_a\tilde{D}^\alpha f(t) = f(t) * \chi_{-\alpha}(t) = f(t) * \partial^k \chi_{-\alpha+k}(t) \tag{36}$$

donde esta convolución de distribuciones está bien definida debido a la Proposición 2.

Ahora bien, a partir de la Proposición 3 podemos concluir que

$${}_a\tilde{D}^\alpha f(t) = f(t) * \partial^k \chi_{-\alpha+k}(t) = \partial^k (f(t) * \chi_{-\alpha+k}(t)) = \frac{d^k}{dt^k}({}_aI^{k-\alpha} f(t)) \tag{37}$$

donde la última igualdad es válida si f es una función que verifica las hipótesis de la definición 14, que no es otra cosa que la definición de derivada fraccionaria de Riemann- Liouville, mientras que

$$_a\tilde{D}^{\alpha}f(t) = f(t) * \partial^k \chi_{-\alpha+k}(t) = \partial^k f(t) * \chi_{-\alpha+k}(t) = \, _aI^{k-\alpha} f^{(k)}(t)$$

donde la última igualdad es válida si f es derivable hasta el orden k que es la definición 15 de derivada fraccionaria de Caputo.

Nota 5 *Esto nos permite afirmar que las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y de Caputo coinciden en el sentido de las distribuciones.*

Observemos que esto no contradice la Proposición 24, ya que en (36) y (37) f *es una función cuyo soporte está contenido en* $[a, \infty)$ *y por lo tanto* $f^{(j)}(a^+) = 0$, $\forall j = 0, 1, ..., k-1$.

Agradecimientos:
Quiero agradecer en primer lugar a mi famila, en especial a mi marido por el apoyo en todos estos años y por la paciencia ante los “cambios de humor” que tenía antes de enfrentar cada examen.
Gracias a mis compañeros y amigos en el estudio, desde la “camada del 2002” hasta ahora, por hacer mis días más divertidos, por su generosidad.
Gracias a las directoras de los departamentos de Matemática y Formación Básica, María del Carmen y María Inés, como así también a Raúl y Susuki, por atender mis pedidos y favores reiterados basados en “tengo que estudiar”.
Gracias Gargui, Elina y Pepa por motivarme y alentarme a finalizar esta etapa y por estar comnigo cada vez que lo necesité.
Por último, gracias Eduardo por tu tiempo, tu paciencia y predisposición estos últimos meses, y también gracias Domingo por confiar en mi para continuar con mis estudios de postgrado.

Bibliografía:

- Arafet Padilla P., Domínguez Abreu H., Chang Mumañ F., *Introducción al cálculo fraccionario*, Facultad de Ing. Eléctrica, Universidad de Oriente, Venezuela, 2008.
- Conway J.G., *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag, 1978.
- Duistermaat J., Kolk J., *Distributions: Theory and Applications*, Springer, Berlin , 2006.
- Erdélyi A. (ed.), *Higher Transcendental Functions, Vol. 1*, McGraw- Hill, New York, 1955.
- Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, 2006.
- Mainardi F., Mura A., Pagnini G., *The M Wright function in time-fractional diffusion processes: a tutorial survey*, International Journal of Differential Equations, (2010), Article ID 104505, 29 pages, doi:10.1155/2010/104505, Electronic Journal, Hindawi Publishing Corporation, special issue for Fractional Differential Equations.
- Pierantozzi T., *Estudio de Generalizaciones Fraccionarias de las Ecuaciones Estándar de Difusión y de Ondas*, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad COmplutense de Madrid, 2006.
- Podlubny I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- Royden H., *Real Analysis (2º ed.)*, The Macmillan Company, New York, 1968.
- Vo-Khac Khoan, *Distributions Analyse de Fourier Operàteurs aux Dèrivèes Partielles, Tome I*, Libraire Vuibert, Paris, 1963.
- Weber H., Ulrich H., *Laplace-Transformation, 8ed.*, Teubner, 2007.