UNIVERSIDAD NACIONAL

DE ROSARIO

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

TESIS DOCTORAL

Soluciones explícitas a diferentes problemas asociados a la Ecuación de Difusión Fraccionaria.

Autor: Sabrina D. Roscani

Director: Eduardo A. Santillan Marcus

UNR Universidad Nacional de Rosario

Esta Tesis fue realizada durante el período Abril 2011–Octubre 2015 con Becas de postgrado tipo I y II otorgadas por el CONICET. Además fue parcialmente financiada por los proyectos

- ING349 FCEIA-UNR: *Problemas de frontera libre con ecuaciones diferenciales fraccionarias.*Director del Proyecto: Eduardo A. Santillan Marcus.
- Proyecto PIP 112-200801-00460 CONICET: *Inecuaciones variacionales y problemas de frontera libre para la ecuación de calor-difusión.* Director: Domingo Tarzia.
- PIP 112-201101-00534 CONICET-Univ. Austral: *Inecuaciones variacionales, control óptimo y problemas de frontera libre: teoría, análisis numérico y aplicaciones.* Director: Domingo A. Tarzia.

Algunos de los resultados que aparecen en esta Tesis fueron publicados anteriormente en las siguientes revistas internacionales con referato:

Capítulo 2:

- D. Goos, G. Reyero, S. Roscani, E. Santillan Marcus, "*On the Initial-Boundary-Value Problem for the Time- Fractional Diffusion Equation on the Real Positive Semi-axis*". Aceptado para su publicación en el International Journal of Differential Equations.

Capítulo 3:

- S. Roscani, "*Hopf Lemma for the Fractional Diffusion Operator and its Application to a Fractional Free–Boundary Problem*", Journal of Mathematical Analysis and Applications (2015), DOI:10.1016/j.jmaa.2015.08.070.

Capítulo 4:

- S. Roscani, E. Santillan Marcus, "*A new equivalence of Stefan's problems for the Time Fractional Diffusion Equation* ", Fractional Calculus & Applied Analysis Vol. 17, No 2 (2014), pp. 371–381 , DOI: 10.2478/s13540-014-0175-3.

- S. Roscani, E. Santillan Marcus, "*Two equivalent Stefan's Problems for the Time Fractional Diffusion Equation*", , Fractional Calculus & Applied Analysis Vol. 16, No 4 (2013), pp. 802–815, DOI: 10.2478/s13540-013-0050-7.

Resumen

En esta tesis se estudian diversos problemas asociados a la Ecuación de Difusión Fraccionaria (EDF). En la primera mitad se estudia el problema de valores iniciales con condición de Dirichlet en el primer cuadrante, y el problema de valores iniciales con condición de Neumann en el primer cuadrante. En ambos casos, se obtienen soluciones explícitas y se brinda una prueba de que las soluciones obtenidas son, efectivamente, soluciones de los problemas propuestos, donde el mayor énfasis reside en probar que las funciones propuestas verifican la Ecuación de Difusión Fraccionaria. (Esta ecuación, como veremos, se rige por un operador integral que agrega una singularidad a la función a la cual se le aplica).

En la segunda mitad, comenzamos estudiando el problema de frontera móvil para la EDF. Se recopilan los conocimientos sobre principios del máximo conocidos hasta ahora (contamos con una especie de principio del máximo débil, pero no con el fuerte) y se prueba el Lema de Hopf para el operador diferencial asociado a la EDF.

Inmediatamente se considera el problema de Stefan asociado a la EDF y se utiliza el Lema de Hopf "fraccionario" para probar la propiedad de monotonía que verifica la frontera libre cuando consideramos estos problemas. Una vez enfocados en la frontera, brindamos una condición integral que verifica la misma (derivada de la condición fraccionaria de Stefan), y a partir de ésta, obtenemos la unicidad de solución bajo ciertas condiciones.

Finalmente, resolvemos explícitamente tres problemas de Stefan fraccionarios, uno con condición de Dirichlet, otro con condición de Neumann y un tercero con condición convectiva y damos condiciones bajo las cuales estos tres problemas son equivalentes.

Veremos que, si hacemos tender $\alpha \nearrow 1$, la EDF se transforma en la Ecuación del Calor. Luego, a lo largo de todo el trabajo, se analiza el límite cuando $\alpha \nearrow 1$ de las distintas soluciones obtenidas, recuperando las soluciones de los respectivos problemas clásicos asociados a la ecuación del calor.

Contenido

1 Introducción **9**

1.1 Un poco de historia 9

1.2 Definiciones básicas y propiedades 12

1.2.1 Las funciones especiales relacionadas al Cálculo Fraccionario 12

1.2.2 Integrales y derivadas fraccionarias de Riemann–Liouville 15

1.2.3 Derivada Fraccionaria de Caputo 23

2 La Ecuación de Difusión Fraccionaria.
Problemas de valores iniciales y de contorno en el primer cuadrante **27**

2.1 La Ecuación de Difusión Fraccionaria 27

2.1.1 Deducción de la Ecuación del Calor 27

2.1.2 La ecuación de Difusión Fraccionaria 30

2.2 Algunos resultados relativos a la función de Wright 31

2.2.1 Comportamiento asintótico 32

2.2.2 Acotaciones y convergencia 34

2.3 El Problema de Valores Iniciales y de Contorno en el Primer Cuadrante para la Ecuación de Difusión Fraccionaria 37

2.3.1 El Problema de Valores Iniciales y de Contorno para la Ecuación de Difusión Fraccionaria en el Primer Cuadrante con condición de Dirichlet 37

2.3.2 El Problema de Valores Iniciales y de Contorno para la Ecuación de Difusión Fraccionaria en el Primer Cuadrante con condición de Flujo Nula 50

2.3.3 El Problema de Valores Iniciales y de Contorno para la Ecuación de Difusión Fraccionaria en el Primer Cuadrante con condición de Neumann 53

2.3.4 Unicidad 57

3 El Problema de Stefan a Una Fase para la Ecuación de Difusión Fraccionaria 61

3.1 Introducción 61

3.2 El problema de Frontera Móvil para la EDF 62

3.3 El problema de Stefan para la EDF. Dependencia monótona de los datos 71

4 Soluciones explícitas 81

4.1 Tres problemas equivalentes 81

4.2 Convergencia 90

5 Conclusiones 93

Capítulo 1

Introducción

1.1 Un poco de historia

¿Alguna vez nos planteamos en nuestro transcurso por los cursos de matemática qué significaría hacer $D^{1/2}f(x)$*?*

La notación de Leibnitz $D^{(n)}f(x)$ o $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, empujó en 1695 a L'Hôpital a preguntarle "*¿Qué sucede si* n *es* $1/2$ *?*". Leibnitz respondió: " *Usted puede ver por eso, señor, que uno puede expresar por una serie infinita una cantidad como* $d^{1/2}xy$ *o* $d^{1:2}xy$ *. Aunque las series infinitas y geométricas son relaciones distantes, las series infinitas admiten sólo el uso de exponentes que son enteros y no hacen, todavía, el uso de exponentes fraccionarios.*" Después en la misma carta, Leibnitz continua profetizando: "*Esta es una aparente paradoja que algún día mostrará sus útiles consecuencias*".

En 1730, Euler escribió: "*Si* n *es un entero positivo, 'dn' puede ser encontrada con derivación continuada. De tal manera, sin embargo no es evidente si* n *es una fracción; pero con la ayuda de la interpolación uno puede expedir el asunto*".

Pero quizás el verdadero "big bang" de la diferenciación y la integración fraccionaria se da en 1738, en su publicación [15], donde se puede ver cómo Euler deriva e integra con orden $1/2$ una función potencial. Una interpretación minuciosa de este trabajo realizada por Igor Podlubny se puede ver en [40].

Casi un siglo después, en 1822, Fourier sugiere la utilización de la siguiente igualdad para realizar la derivada de orden p de una función suficientemente buena:

$$\frac{d^p}{dx^p}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^p d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)cos(\lambda x - t\lambda + p\frac{\pi}{2})dt,$$

pero el primero en presentar una aplicación fue Abel en 1823 [1, 2], quien, al plantear el *problema de la tautócrona*[1], se encuentra con la siguiente expresión

$$k = \int_0^x (x-t)^{-1/2}f(t)dt$$

que, salvo por una constante multiplicativa, se corresponde hoy en día con la integral fraccionaria de orden 1/2 de Riemann-Liouville de la función $f(x)$.

Abel escribió el lado derecho de la ecuación como $\sqrt{\pi}\frac{d^{-1/2}}{dx^{-1/2}}f(x)$. Luego operó en ambos lados de la ecuación con $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$ y obtuvo:

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}k = \sqrt{\pi}f(x).$$

La solución de Abel fue catalogada como “elegante”, lo que atrajo la atención de Liouville, quien después de una década volvió a trabajar en el Cálculo Fraccionario, y en 1832 hizo el primer gran intento de definir una derivada fraccionaria.
Basándose en la definición de la función Gamma, Liouville, [31, 32] propone la siguiente definición de derivada fraccionaria:

$$D^p x^{-a} = \frac{(-1)^p\Gamma(a+p)}{\Gamma(a)}x^{-a-p-}, \quad a > 0$$

para funciones del tipo x^{-a} con $a > 0$.

Otra vez estamos bajo una definición que se aplica sólo a un conjunto restringido de funciones. La atención se desplazó entonces hacia la integral fraccionaria, pensando que quizás de ésta se deduciría la definición de derivada como la de su operador inverso izquierdo, en analogía al caso entero. En esos mismos escritos de 1832, Liouville obtuvo la siguiente fórmula:

$$\left(D^{-p}f\right)(x) = \frac{1}{(-1)^p\Gamma(p)}\int_0^\infty t^{p-1}f(x-t)dt, \quad \Re(p) > 0$$

[1]En 1673 el físico-matemático Cristian Huygens, publicó en su Tratado Sobre la Teoría de Relojes de Péndulo su descubrimiento de que “El tiempo que tarda una partícula de masa m en deslizarse sobre un arco de cicloide entre dos puntos distintos, es independiente del punto en el que inicie su movimiento”. Este descubrimiento se conoce como el problema de la tautócrona.

que hoy en día, eliminado el factor $(-1)^p$, es conocida como la definición de Liouville por la derecha de la integral fraccionaria de orden p.

Cabe mencionar también un escrito del gran matemático Riemann fechado en 1847, y de publicación póstuma en 1876 [41]. Buscando una generalización de una serie de Taylor obtuvo la expresión

$$D^{-p}f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_c^x (x-t)^{p-1}f(t)dt + \Phi(x)$$

para la integral de orden fraccionario.

Debido a la ambigüedad del extremo inferior de integración c, Riemann consideró oportuno añadir una función complementaria $\Phi(x)$ de naturaleza indeterminada, preocupándose por una medida de desviación para el caso ${}_cD_x^{-p}f(x)$ y ${}_{c'}D_x^{-p}f(x)$ cuando $c \neq c'$.

Alrededor de los años 1870, dos grandes matemáticos, Grünwald y Letnikov estudiaron el problema de la diferenciación no entera, generalizando la definición de derivada de orden entero, basada en el concepto de cociente incremental, utilizando la siguiente fórmula

$$\left(D^p f\right)(x) = {}_{h\to 0}\frac{(\nabla_h^p f)(x)}{h^p}$$

donde $(\nabla_h^p f)(x) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{p}{j} f(x-jh)$, con $[n] = p$. Esta fórmula es utilizada en la actualidad debido a que es una de las más adecuadas para la realización de cálculos numéricos.

En 1884, Laurent [29], partiendo de la fórmula integral de Cauchy (conocida recién a partir del año 1825),

$${}_cI^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_c^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau,$$

define la integral de oreden fraccionario como

$${}_cI_x^p f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_c^x (x-t)^{p-1}f(t)dt, \quad p \in \mathbb{R}^+.$$

Cuando $x > c$ recuperamos la definición de integral fraccionaria de Riemann, pero sin la función complementaria; mientras que para $c = -\infty$ obtenemos la definición de la integral fraccionaria de Liouville.

Llegando finalmente al siglo XX, nos encontramos en 1967 con la definición de derivada fraccionaria dada por Caputo [8], que es la primera que permite la formulación de condiciones iniciales para Problemas de Valores Iniciales para ecuaciones diferenciales fraccionarias, involucrando sólo el valor límite del orden de derivación entero en el extremo inferior (tiempo inicial) $t = a$.

La derivada de Caputo de orden $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha < n$ y extremo a, está dada por

$$ {}_a^C D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. $$

Esta definición de derivada fraccionaria es la elegida para el análisis y resolución de los problemas abordados esta tesis, pero antes, veremos algunas definiciones básicas y propiedades del cálculo fraccionario.

1.2 Definiciones básicas y propiedades

Las demostraciones que no se encuentran en esta sección pueden consultarse en [39] o en [42].

1.2.1 Las funciones especiales relacionadas al Cálculo Fraccionario

Definición 1. *Sea $A = \{z \in \mathbb{C} / \Re(z) > 0\}$. Definimos la **función Gamma** como*

$$ \begin{aligned} &\Gamma : A \to \mathbb{C} \\ &z \to \Gamma(z) = \textstyle\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \end{aligned} \tag{1.1} $$

Nota 1. *La función Gamma así definida es una función entera en su dominio, más aún, se prolonga analíticamente a una función que seguiremos llamando $\Gamma(z)$ sobre el dominio $\Omega = \mathbb{C} - \{z = -n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ dada por*

$$ \Gamma : \Omega \to \mathbb{C} /\ \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. $$

Definición 2. *Sea $\Theta = \big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \ /\ \Re(z) > 0,\ \Re(w) > 0\big\}$. Definimos la **función Beta** como*

$$ B : \Theta \to \mathbb{C} \ /\ B(z,w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau. $$

Proposición 1. *Si* $h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau, \quad t \geq 0$, *entonces*

1. $h_{z,w}(t) = \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} t^{z+w-1}$.

2. *Si* $t = 1$, $B(z,w) = \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$.

Corolario 1. $B(z,w) = B(w,z) \quad \forall\, z, w \in \theta$

Observación 1. *Gracias a la Proposición* 1 *y al principio de identidad para funciones analíticas, podemos extender a la función Beta analíticamente al dominio* Ω *a partir de la extensión de la función Gamma.*

Proposición 2. *Propiedades de la función Gamma*

i. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \forall\, z \in \Omega$.

ii. $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\, n^z}{z(z+1)...(z+n)}$.

iii. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sen(\pi z)} \qquad \forall\, z/z \neq 0, \pm1, \pm2, ...$

iv. $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\, 2^{1-2z}\Gamma(2z)$.

Corolario 2. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\, \forall n \in \mathbb{N}_0$. *En particular,*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Definición 3. *Dado* $z \in \mathbb{C}$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}/\Re(\alpha) > 0$. *Llamaremos* ***función de Mittag-Leffler*** *a la definida por:*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}. \tag{1.2}$$

Observación 2. *Utilizando la siguiente propiedad de la función Gamma (ver [14]),*

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b}\left[1 + \frac{1}{2}z^{-1}(a-b)(a+b-1) + O(z^{-2})\right], \qquad |z| \to \infty \tag{1.3}$$

se puede ver que la serie (1.2) converge en $\mathbb{C}$, *y por lo tanto la función de Mittag Leffler así definida, es una función entera.*

Observación 3. *La función de Mittag-Leffler proporciona una generalización de la función exponencial,* $E_1(z) = e^z$.

Otros casos particulares son

$$E_2(z^2) = cosh(z)\,; \quad E_2(-z^2) = cos(z)$$

$$E_{1/2}(\pm z^{1/2}) = e^z \left[1 - erf(\pm z^{1/2})\right] = e^z erfc(\mp z^{1/2})$$

donde el valor principal de la raíz cuadrada de z se asume en el plano complejo cortado a lo largo del eje real negativo, y las funciones erf y $erfc$ se definen como

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du \quad y \quad erfc(z) = 1 - erf(z). \tag{1.4}$$

Una generalización de esta función fue propuesta por Agarwal en el año 1953 y consiste en sustituir la constante 1 en el argumento de la función Gamma, por un nuevo parámetro complejo β.

Definición 4. *Llamaremos función de Mittag-Leffler generalizada o de dos parámetros a*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad z \in \mathbb{C},\, \Re(\alpha) > 0,\, \beta \in \mathbb{C}.$$

Observación 4.

1. *Claramente, se cumple que $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$.*

2. *Es fácil ver que*

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+2}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}.$$

La siguiente función juega un papel fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias, en particular en la ecuación de difusión fraccionaria. Su nombre es en honor a E. Maitland Wright, el eminente matemático británico que introdujo e investigó esta función desde 1933 [57, 58] llamándola originalmente *función de Bessel generalizada* .

Definición 5. *Llamaremos* ***función de Wright*** *a la función definida por*

$$\mathcal{W}(z,\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \beta)} \qquad z \in \mathbb{C},\, \alpha > -1,\, \beta \in \mathbb{C}.$$

Observación 5. *Como ocurrió con la función de Mittag–Leffler, la función de Wright es también una generalización de la función exponencial, $\mathcal{W}(z,0,1) = e^z$.*
Su relación con la función de Bessel, $J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$, está dada por

$$\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \mathcal{W}(-\frac{z^2}{4}, 1, \nu+1) = J_\nu(z).$$

Pero el caso particular que es de nuestro mayor interés es el que involucra a la función $f(z) = e^{-\frac{z^2}{4}}$*, que es parte del núcleo de la ecuación del calor.*
Si tomamos $\alpha = -\frac{1}{2}$ *y* $\beta = \frac{1}{2}$*, aplicando la Propiedad (2–iii) y el Corolario 2,*

$$\mathcal{W}\left(-z, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!\Gamma\left(-\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!\Gamma\left(1 - \left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k \Gamma\left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\right) sen\left(\pi\left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\right)\right)}{\pi k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) cos\left(\pi(\frac{k}{2}\right)}{\pi k!}.$$

Siendo $cos(\pi(\frac{k}{2})) = 0$ *si* $k = 2n+1$ *y* $cos(\pi(\frac{k}{2})) = (-1)^n$ *si* $k = 2n$ *,resulta*

$$\mathcal{W}\left(-z, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^{2n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)(-1)^n}{\pi (2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}(-z^2)^n 2^{-2n}}{\pi\, n!} = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}.$$

Luego,

$$\mathcal{W}(-z, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}. \tag{1.5}$$

Observación 6. *Utilizando la Propiedad (2–iii), tenemos otra representación:*

$$\mathcal{W}(z, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \beta)} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \Gamma(1 - \alpha k - \beta) sen\, \pi(\alpha k + \beta)}{k!}.$$

1.2.2 Integrales y derivadas fraccionarias de Riemann–Liouville

La derivada de Riemann–Liouville aparece como el resultado de unificar nociones de integración y derivación de orden entero. Sea $f \in L^1[a, b]$, luego

$$({}_aI^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

existe, es finita y tiende a 0 cuando $t \to a$.

Podemos considerar la integral doble

$$({}_aI^2 f)(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) d\tau \int_\tau^t d\tau_1 = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Integrando nuevamente se obtiene:

$$({}_aI^3 f)(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_3) d\tau_3 = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} (\tau_1 - \tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_a^t (t - \tau)^2 f(\tau) d\tau.$$

Es fácil probar por inducción que para el caso general tenemos la *fórmula de Cauchy*

$$({}_aI^n f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.6}$$

Supongamos ahora que n es un natural fijo, $k \geq n$ y queremos hallar la derivada $(k-n)-$ésima de la función $f(t)$. Podríamos pensar que derivar $(k-n)$ veces es equivalente a integrar primero n veces y luego derivar k veces, vale decir:

$$f^{(k-n)} = D^k \left[({}_aI^n f)(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Esto nos induce a presentar las siguientes definiciones.

Definición 6. *Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $n-1 < \alpha \leq n$. Sea $f \in L^1[a,b]$. La integral*

$${}_aI^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

se denomina integral fraccionaria de Riemann–Liouville de orden α.
Si $\alpha = 0$, definimos ${}_aI^0 f(t) = f(t)$, el operador identidad.

Observación 7. *La definición anterior es una buena definición ya que este operador se puede ver como la convolución de las siguientes funciones:*

$$\chi(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \textit{si } 0 < t < b-a \\ 0 & \textit{si no.} \end{cases} \quad \textit{y} \quad \tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \textit{si } a < t < b \\ 0 & \textit{si no.} \end{cases}$$

y podemos usar un resultado clásico de la teoría de integración de Lebesgue (ver [6] pág. 66), que nos asegura que la convolución de dos funciones en L^1 es una función de L^1.

Proposición 3. *El conjunto de operadores $\left\{{}_aI^\alpha : L^1[a,b] \to L^1[a,b];\, \alpha \geq 0\right\}$ junto con la operación composición forman un semigrupo donde el operador ${}_aI^0$ es el elemento neutro.*

Proposición 4. *Sea $f \in L^1[a,b]$. Entonces*

$$\lim_{\alpha \searrow 0} {}_aI^\alpha f(t) = f(t) \quad \textit{c.t.p en } [a,b].$$

Demostración. Ver Teorema 2.7 en [46].

Definición 7. *Notaremos con $AC^n[a,b]$ al conjunto de funciones derivables con derivada continua hasta el orden $(n-1)$, tal que la derivada $(n-1)$ es absolutamente continua, esto es, funciones $f \in \mathcal{C}^{(n-1)}[a,b]$ para las cuales existe c.t.p. una función $g \in L^1[a,b]$ tal que*

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Claramente, $f^{(n-1)}$ es derivable c.t.p. y notaremos $g(t) = f^{(n)}(t)$.

Proposición 5. *El espacio de funciones $AC^n[a,b]$ está constituido sólo por funciones $f(t)$ que pueden ser representadas de la siguiente manera*

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}\varphi(\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t-a)^k = {}_aI^n\varphi(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t-a)^k. \tag{1.7}$$

donde $\varphi(\cdot) \in L^1(a,b)$, c_k constantes arbitrarias.

Demostración. Sea $f \in AC^n[a,b]$. Por definición, $f \in \mathcal{C}^{(n-1)}(a,b)$ y existe una función integrable a la que llamaremos $f^{(n)}$ tal que

$$f^{(n-1)}(t) = c + \int_a^t f^{(n)}(\tau)d\tau.$$

En particular,

$$f^{(n-1)}(t) = f(a) + {}_aI^1 f^{(n)}(t). \tag{1.8}$$

Integrando $n-1$ veces (1.8) entre a y t,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k + {}_aI^n f^{(n)}(t). \tag{1.9}$$

Finalmente, reemplazando la fórmula de Cauchy (1.6) en (1.9), resulta que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)d\tau. \tag{1.10}$$

La recíproca es trivial derivando $(n-1)$–veces y utilizando la Definición 7.

∎

Observación 8. *Según la Definición 7 y la caracterización dada en la Proposición 5, si $f \in AC^n[a,b]$ entonces*

$$f(t) = {}_aI^n f^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k. \tag{1.11}$$

Definición 8. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $n-1 < \alpha \leq n$. Sea $f \in AC^n[a,b]$. Llamaremos derivada de Riemann–Liouville de orden α a*

$$ {}_a^{RL}D^\alpha f(t) = \left[D_a^n I^{n-\alpha} f\right](t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau $$

Si $\alpha = 0$, definimos ${}_a^{RL}D^0 f(t) = f(t)$, el operador identidad.

Observación 9. *Contrariamente al caso entero, la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville es un operador no local, quedando definido por medio de una integral que depende de los valores que la función asuma en todo el intervalo de integración.*

Ejemplo 1. *Integración y derivación fraccionaria de la función $(t-a)^\beta$.*

Sea $\beta > -1$. Teniendo en cuenta la Proposición 1, resulta

$$ \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta}. $$

Luego,

$$ {}_aI^\alpha((t-a)^\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (t-a)^{\beta+\alpha}. $$

De este resultado se desprende que, si $(n-1) < \alpha \leq n$, y $\beta = \alpha - j$ para $j = 1, ..., n$,

$$ {}_a^{RL}D^\alpha (t-a)^{\alpha-j} = \frac{d^n}{dt^n} ({}_aI^{n-\alpha}((t-a)^{\alpha-j}) = \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(\alpha-j+n-\alpha+1)} (t-a)^{\alpha-j+n-\alpha} \right] $$

$$ = \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(-j+n+1)} (t-a)^{-j+n} \right] = 0. $$

Si $\beta \neq \alpha - j$, $j = 1, ..., n$,

$$ {}_a^{RL}D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{d^n}{dt^n} ({}_aI^{n-\alpha}(f(t)) = \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} (t-a)^{\beta+n-\alpha} \right] = \frac{\Gamma(\beta+1)(t-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}. $$

Luego

$$ {}_a^{RL}D^\alpha (t-a)^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} & si\ \beta \neq \alpha - j, j = 1, ..., n \\ 0 & si\ \beta = \alpha - j, j = 1, ..., n. \end{cases} $$

Podemos decir entonces que las funciones $(t-a)^{\alpha-j}$, $j = 1, 2, ..., n$ cumplen el rol que las constantes desarrollan en la derivación entera, para el operador derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α.

Más aún, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una constante no es cero. En efecto:

$$ {}_a^{RL}D^\alpha(C) = C\, {}_a^{RL}D^\alpha(1) = C\, {}_a^{RL}D^\alpha((t-a)^0) = \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(-\alpha+1)} (t-a)^{-\alpha} = \frac{C}{\Gamma(-\alpha+1)(t-a)^\alpha}. $$

Proposición 6. *El operador Derivada fraccionaria de Riemann–Liouville es lineal*

$$ {}_{a}^{RL}D^{\alpha}(\lambda f(t)+\mu g(t)) = \lambda\, {}_{a}^{RL}D^{\alpha}f(t) + \mu\, {}_{a}^{RL}D^{\alpha}g(t) $$

Teorema 1. *Sea $\alpha > 0$ y $f \in AC^n[a,b]$. Entonces ${}_{a}^{RL}D^{\alpha}f$ existe para casi todo punto y puede represntarse de la siguiente manera*

$$ {}_{a}^{RL}D^{\alpha}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau. \tag{1.12} $$

Demostración. Sea $f \in AC^n[a,b]$. Por Observación 8,

$$ f(t) = {}_{a}I^{n} f^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k. $$

Aplicando la Definición 8, la Proposición 6, la Proposición 3 y el Ejemplo 1,

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{RL}D^{\alpha}f(t) &= \left[D^n\, {}_{a}I^{n-\alpha} f\right](t) = D^n\, {}_{a}I^{n-\alpha}\left[{}_{a}I^{n} f^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] \\ &= D^n\left[{}_{a}I^{n-\alpha}\, {}_{a}I^{n} f^{(n)}(t)\right] + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\, {}_{a}^{RL}D^{\alpha}\left[(t-a)^k\right] \\ &= D^n\, {}_{a}I^{n}\left[{}_{a}I^{n-\alpha} f^{(n)}(t)\right] + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} \\ &= {}_{a}I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha}. \end{aligned} \tag{1.13} $$

Como $f^{(n)} \in L^1(a,b)$ y $n-\alpha > 0$, la Observación 7 nos asegura que ${}_{a}I^{n-\alpha} f^{(n)}(t)$ existe c.t.p, y con esto resulta la tesis.

∎

Observación 10. *La caracterización* (1.12) *permite apreciar con claridad que este tipo de derivada presenta singularidades de orden $\alpha - k$ para $k = 0, ..., n-1$.*

Observación 11. *Cuando α es natural, la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville coincide con la derivada entera usual ya que*

$$ \left({}_{a}^{RL}D^{n} f\right)(t) = \left[D^n\, {}_{a}I^{n-n} f\right](t) = \left[D^n\, {}_{a}I^{0} f\right](t) = f^{(n)}(t). $$

Proposición 7. *El operador derivación fraccionaria de Riemann–Liouville es un inverso a izquierda del operador integración fraccionaria de Riemann–Liouville de mismo orden α. Esto es, si $f \in L^1[a,b]$, entonces*

$$ {}_a^{RL}D^{\alpha}\, {}_aI^{\alpha} f(t) = f(t) \quad c.t.p. $$

Demostración. Sea $f \in L^1[a,b]$. Dado $\alpha > 0$ tal que $(n-1) < \alpha \leq n$. Debido al Teorema Fundamental del Cálculo resulta que

$$ D^n I^n(f) = f. $$

Luego, aplicando la Proposición 3 resulta

$$ {}_a^{RL}D^{\alpha}\, {}_aI^{\alpha} f(t) = D^n({}_aI^{n-\alpha}({}_aI^{\alpha} f(t)) = D^n({}_aI^n f(t)) = f(t) \quad c.t.p. $$

∎

Proposición 8. *Si ${}_a^{RL}D^{\alpha} f \in L^1[a,b]$, entonces*

$$ {}_aI^{\alpha}({}_a^{RL}D^{\alpha} f)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{n-1} ({}_a^{RL}D^{\alpha-j} f)(a+) \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} - \frac{(t-a)^{\alpha-n}}{\Gamma(\alpha+1-k)}\, {}_aI^{n-a} f(a^+). $$

En particular, si $0 < \alpha < 1$,

$$ {}_aI^{\alpha}({}_a^{RL}D^{\alpha} f)(t) = f(t) - \frac{{}_aI^{1-\alpha} f(a^+)}{\Gamma(\alpha)(t-a)^{1-\alpha}}. $$

Observación 12. *De la proposición anterior se desprende que el operador integral de Riemann–Liouville en general, no es el inverso a izquierda del operador derivada fraccionaria de Riemann–Liouville.*

Proposición 9. *Sean $n-1 < \alpha \leq n$, $m-1 < \beta \leq m$. Entonces:*

1. *Si $k \in \mathbb{N}$ y $f \in AC^{n+k}[a,b]$ entonces $\frac{d^k}{dt^k}({}_a^{RL}D^{\alpha} f(t)) = {}_a^{RL}D^{\alpha+k} f(t)$.*
2. *Si $k \in \mathbb{N}$ y $f \in AC^{n+k}[a,b]$ entonces ${}_a^{RL}D^{\alpha}\left(\frac{d^k}{dt^k} f(t)\right) = {}_a^{RL}D^{\alpha+k} f(t) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha-k}}{\Gamma(1+j-\alpha-k)}$.*
3. *Si $f \in AC^m[a,b]$ y ${}_aD^{\beta} f \in AC^n[a,b]$ entonces*
${}_a^{RL}D^{\alpha}\left({}_a^{RL}D^{\beta} f(t)\right) = {}_a^{RL}D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^{m} ({}_a^{RL}D^{\beta-j} f)(a+) \frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}$.

Observación 13. *Intercambiando los roles de α y β en la Proposición anterior, tenemos:*

$$ {}_a^{RL}D^{\beta}\left({}_a^{RL}D^{\alpha} f(t)\right) = {}_a^{RL}D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^{n} ({}_a^{RL}D^{\alpha-j} f)(a+) \frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)}. $$

Con esto podemos concluir que, en general, los *operadores derivada fraccionaria de Riemann–Liouville* de distintos órdenes (el caso $\alpha = \beta$ ya lo analizamos) *no conmutan*.

Si $f^{(j)}(a) = 0, \quad \forall\, k = 0, 1, 2, ..., n-1$, entonces el operador *derivada fraccionaria de Riemann–Liouville* conmuta con el operador $\frac{d^n}{dt^n}$.

O bien, si resulta que:

$$ {}_a^{RL}D^{\alpha-j}f(a+) = 0, \quad \forall\, j = 1, ..., m, $$
$$ {}_a^{RL}D^{\beta-j}f(a+) = 0, \quad \forall\, j = 1, ..., n, $$

podemos asegurar que ${}_a^{RL}D^{\alpha}({}_a^{RL}D^{\beta}f(t)) = {}_a^{RL}D^{\beta}({}_a^{RL}D^{\alpha}f(t)) = {}_a^{RL}D^{\alpha+\beta}f(t)$.

Ejemplo 2. *Consideremos la función $f(x) = x^{-1/2}$ y sean $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$.*
Por lo visto en el Ejemplo 1, resulta que

$$ {}_0^{RL}D^{\alpha_1}f(x) = {}_0^{RL}D^{\alpha_2}f(x) = 0 $$

mientras que,

$$ {}_0^{RL}D^{\alpha_1+\alpha_2}f(x) = {}_0^{RL}D^{1}f(x) = f'(x) = -\frac{1}{2x^{3/2}}. $$

Hasta aquí, el operador derivada fraccionaria de Riemann–Liouville se comporta de una forma "aceptable". Sin embargo, no todas las propiedades de la derivada tal cual la conocemos tienen una propiedad análoga correspondiente al operador fraccionario.

Veremos a continuación cómo la regla del producto y la regla de la cadena no son sencillas de aplicar cuando trabajamos con derivada fraccionaria de Riemann–Liouville.

Teorema 2. *Las siguientes fórmulas son válidas*

1. ***Fórmula de Leibnitz para la derivada entera de orden** n. Si $f,\ g \in \mathcal{C}^n[a,b]$, entonces*

$$ D^n[f.g] = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (D^j f)(D^{n-j}g). $$

2. ***Fórmula de Leibnitz para el operador de Riemann–Liouvillle de orden** α. Sea $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$, y supongamos que f y g son dos funciones analíticas en un entorno del punto a. Entonces*

$$ {}_a^{RL}D^{\alpha}[f.g](x) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\alpha}{j} (D^j f)(x) {}_a^{RL}(D^{\alpha-j}g)(x) + \sum_{j=n}^{\infty} \binom{\alpha}{j} (D^j f)({}_aI^{j-\alpha}g)(x). $$

Se puede ver la demostración de este teorema en [11].

Con respecto a la regla de la cadena, presentamos el siguiente teorema.

Teorema 3. *Las siguientes fórmulas son válidas*

1. ***Fórmula de Faá di Bruno****. Si f y $g \in \mathcal{C}^n[a,b]$, entonces*

$$D^n[f(g(\cdot))](x) = \sum (D^k f)(g(x)) \prod_{j=1}^{n} (D^j g(x))^{b_j}.$$

donde la suma se realiza sobre todas las particiones de $\{1,2,...,n\}$ y, para cada partición, k es el número de bloques y b_j es el número de bloques con exactamente j elementos.

2. ***Fórmula de Faá di Bruno para el operador de Riemann–Liouvillle de orden α.*** *Sea $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$, y supongamos que f y g verifican todas las condiciones de derivabilidad que sean necesarias. Entonces*

$${}_{a}^{RL}D^{\alpha}[f(g(\cdot))](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{k!(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum_{l=1}^{k} (D^l f)(g(x)) \sum_{\{a_1,a_2,...,a_k\} \in A_{k,i}} \prod_{r=1}^{k} \frac{1}{a_r!} \left(\frac{D^r g(x)}{r!} \right)^{a_r}$$

$$+ \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(g(x)).$$

donde $\{a_1,a_2,...,a_k\} \in A_{k,i}$ significa que

$$a_1,...,a_k \in \mathbb{N}_0, \quad \sum_{r=1}^{k} r a_r = k \quad y \quad \sum_{r=1}^{k} a_r = l.$$

Una prueba del item 1. puede encontrarse en [27], y una prueba del item 2. puede encontrarse en [39].

Teorema 4. *Sea $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$. Si $f \in \mathcal{C}^n[a,b]$, entonces valen los siguientes límites puntualmente en $(a,b]$:*

1. $\lim\limits_{\alpha \nearrow n} {}_{a}^{RL}D^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t)$

2. $\lim\limits_{\alpha \searrow n-1} {}_{a}^{RL}D^{\alpha} f(t) = f^{(n-1)}(t)$.

Demostración. 1. Sea $t > a$. Reemplazando con la igualdad (1.12) donde ahora $f^{(n)}$ es la derivada n–ésima ya que $f \in \mathcal{C}^n[a,b]$, utilizando las Proposiciones 3, 4 y 6, y teniendo en cuenta que $\lim\limits_{y \nearrow z} \frac{1}{\Gamma(y)} = 0 \, \forall \, z \in \mathbb{Z}_0^-$,

$$\lim_{\alpha \nearrow n} {}_{a}^{RL}D^{\alpha} f(t) = \lim_{\alpha \nearrow n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} + {}_{a}I^{(n-\alpha)} f^{(n)}(t) \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \lim_{\alpha \nearrow n} \frac{1}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} + \lim_{\alpha \nearrow n} {}_{a}I^{(n-\alpha)} f^{(n)}(t) = f^{(n)}(t).$$

2. Como en el item anterior, teniendo en cuenta ahora que, si $\alpha \searrow n-1$ entonces $\alpha + 1 - n \searrow 0$, y que $\Gamma(n-\alpha) \to 1$, si $\alpha \searrow n-1$,

$$\lim_{\alpha \searrow n-1} {}_{a}^{RL}D^{\alpha} f(t) = \lim_{\alpha \searrow n-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} + {}_{a}I^{(n-\alpha)} f^{(n)}(t) \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \lim_{\alpha \searrow n-1} \frac{1}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} + \lim_{\alpha \searrow n-1} {}_{a}I^{(n-\alpha-1)} I^{1} f^{(n)}(t)$$

$$= f^{(n-1)}(a) + I^{1} f^{(n)}(t) = f^{(n-1)}(t).$$

∎

1.2.3 Derivada Fraccionaria de Caputo

La definición de derivada de Riemann–Liouville tuvo un papel muy importante en el desarrollo de la teoría del cálculo fraccionario y de sus aplicaciones puramente matemáticas (solución de ecuaciones diferenciales de orden entero, definición de nuevas clases de funciones, suma de series, etc.). Sin embargo, para los problemas que surgieron en aplicaciones modernas y en los que se disponía de condiciones iniciales físicas concretas, se prefirió otra definición de derivada fraccionaria, también introducida por Liouville pero utilizada por primera vez por Caputo [8]. Esta definición tiene la ventaja de requerir únicamente el conocimiento de los valores iniciales de la función y de sus derivadas de orden entero si es aplicada en conjunción con el método de la Transformada de Laplace.

Definición 9. *Sean $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 < \alpha \leq n$ y $f \in W^{n}(a,b) = \left\{ f \in \mathcal{C}^{n}(a,b] \,|\, f^{(n)} \in L^{1}[a,b] \right\}$. Definimos la derivada fraccionaria de Caputo de orden α como*

$${}_{a}^{C}D^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, & n-1 < \alpha < n \\ f^{(n)}(t), & \alpha = n. \end{cases}$$

Observación 14. *Claramente se desprende de esta definición que la derivada fraccionaria de Caputo es la intgral fraccionaria de orden* $n-\alpha$ *de la función* $f^{(n)}(t)$,

$$ {}_a^C D^\alpha f(t) = {}_a I^{n-\alpha} f^{(n)}(t). $$

Nota 2. *Reconsiderando la igualdad (1.12)*

$$ {}_a^{RL} D^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau $$

podemos ver la relación que hay entre la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville y la de Caputo:

$$ {}_a^{RL} D^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} + {}_a^C D^\alpha f(t). \tag{1.14} $$

Más aún, podemos decir que la derivada fraccionaria de Caputo es una derivada de Riemann–Liouville a la que le han quitado sus singularidades.

Proposición 10. *Sean* $\alpha > 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $-1 < \alpha \leq n$. *Sea* $f \in W^n(a,b)$. *Entonces*

$$ \lim_{\alpha \nearrow n} {}_a^C D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t). $$

Demostración. Basta aplicar la Proposición 4. ∎

Observación 15. *Contrariamente a lo que ocurría con la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville, la derivada fraccionaria de Caputo de una constante es cero.*

$$ {}_a^C D^\alpha (K) = 0. $$

Proposición 11. *El operador Derivada fraccionaria de Caputo es lineal*

$$ {}_a^C D^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda\, {}_a^C D^\alpha f(t) + \mu\, {}_a^C D^\alpha g(t) $$

Ejemplo 3. *Derivada de Caputo de la función* $(t-a)^\beta$:

Sea $\alpha > 0$ *tal que* $n-1 < \alpha \leq n$. *Sea* $\beta > n-1$.

Observemos que, si $\beta = j$, $j = 0, ..., n-1$,

$$ {}_a^C D^\alpha (t-a)^j = {}_a I^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt}(t-a)^j \right) = 0. $$

Ahora bien, sea $\beta \neq j$, $j = 0, ..., n-1$, $\beta > 0$.

$$\begin{aligned} {}_a^C D^\alpha (t-a)^\beta &= {}_a I^{n-\alpha} (\frac{d^n}{dt}(t-a)^\beta) = {}_a I^{n-\alpha} \left(\beta(\beta-1)...(\beta-n+1)(t-a)^{\beta-n} \right) \\ &= {}_a I^{n-\alpha} \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n} \right). \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta que

$${}_a I^\alpha ((t-a)^\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (t-a)^{\beta+\alpha},$$

resulta

$${}_a^C D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} \frac{\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n+n-\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.15}$$

Podemos decir entonces que las funciones $(t-a)^j$, $j = 0, 1, ..., n-1$ cumplen el rol que las constantes desarrollan en la derivación entera, para el operador derivada fraccionaria de Caputo de orden α.

Además, comparando con los resultados obtenidos en el Ejemplo 1, resulta que las derivadas de Riemann–Liouville y la de Caputo coinciden para $\beta > 0$ y $\alpha > \beta$, y esto acuerda con la igualdad (1.14) ya que $\frac{d^j}{dt^j}(t-a)^\beta \Big|_{t=a} = 0$ para $j = 0, ..., n-1$.

La siguiente proposición muestra que la función de Mittag–Leffler es la "exponencial" de la derivada fracccionaria de Caputo.

Proposición 12. ${}_a^C D^\alpha E_{\alpha.1}(\lambda(t-a)^\alpha) = \lambda E_{\alpha.1}(\lambda(t-a)^\alpha)$, $\quad \alpha > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\alpha > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Como vimos en la Definición 4 la función de Mittag–Leffler está dada por la siguiente serie

$$E_{\alpha,1}(\lambda(t-a)^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda(t-a)^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad \alpha > 0,\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esta serie converge uniformemente sobre conjuntos compactos, luego es lícito derivar e integrar término a término.

Haciendo la sustitución $\tau = (t+a)s + a$ y aplicando finalmente la Proposición 1, resulta

$${}_a^C D^\alpha E_{\alpha.1}(\lambda(t-a)^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{(\tau-a)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} \right) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k (\alpha k(\alpha k-1)...(\alpha k-n+1))}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\alpha k-n} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k - n + 1)} \int_0^{\frac{t-a}{t+a}} (t+a)^{\alpha k - \alpha} \left(\frac{t-a}{t+a} - s \right)^{n-\alpha-1} s^{\alpha k - n} ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k - n + 1)} (t+a)^{\alpha k - \alpha} \frac{\Gamma(\alpha k + 1 - n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\alpha k - \alpha + 1)} \left(\frac{t-a}{t+a} \right)^{\alpha k - \alpha}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k - \alpha + 1)} (t-a)^{\alpha k - \alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \frac{(t-a)^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha(k-l)+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \frac{(t-a)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{(t-a)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \lambda E_{\alpha.1}(\lambda (t-a)^{\alpha}).$$

■

Veamos otra diferencia entre la derivada fraccionaria de Caputo y la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville:

Proposición 13.

$${}_a^C D^{\alpha}({}_a^C D^m f(t)) = {}_a^C D^{\alpha+m} f(t) \quad m = 0, 1, 2, ... ; \quad n-1 < \alpha < n$$

(mientras que en el caso de la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville teníamos $\frac{d^n}{dt^n}({}_a D^{\alpha} f(t)) = {}_a D^{\alpha+n} f(t)$ *)*
Más aún

$${}_a^C D^{\alpha}({}_a^C D^m f(t)) = {}_a^C D^m({}_a^C D^{\alpha} f(t)) = {}_a^C D^{\alpha+m} f(t)$$

$$si\ f^{(j)}(a) = 0, \quad j = n, n+1, ...m, \quad m = 0, 1, 2, ... ; \quad n-1 < \alpha < n$$

(mientras que en la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville teníamos $\frac{d^n}{dt^n}({}_a D^{\alpha} f(t)) = {}_a D^{\alpha}(\frac{d^n}{dt^n} f(t))$ *si* $f^{(j)}(a) = 0, \quad \forall\, k = 0, 1, 2, ..., n-1$*).*

Capítulo 2

La Ecuación de Difusión Fraccionaria. Problemas de valores iniciales y de contorno en el primer cuadrante

2.1 La Ecuación de Difusión Fraccionaria

2.1.1 Deducción de la Ecuación del Calor

La ecuación unidimensional del calor, estudiada inicialmente por Fourier en los comienzos del siglo XIX, se ha convertido a lo largo de los años en el paradigma para el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico.

Veamos a continuación cómo a partir de consideraciones físicas relacionadas a la teoría de conducción del calor nos permiten plantear una ecuación que describirá la evolución de la temperatura en el tiempo, cuya solución es una distribución de temperatura. (Véase [7, 47, 56])

Definición 10. *Una unidad de calor es la cantidad necesaria para alcanzar en una unidad de agua, una unidad de temperatura.*

Por ejemplo, una *caloría* es la cantidad necesarria de calor para alcanzar en un gramo de agua, un grado centígrado. Un BTU (British Termal Unit) es la cantidad necesaria para alcanzar en una libra de agua, un grado Fahrenheit. Esta unidad es mucho más grande, de hecho, 1 BTU= 252 *cal*, aproximadamente.

Esta definición supone que la cantidad necesaria de calor para alcanzar la temperatura deseada es independiente de la temperatura inicial. Para poder realizar un modelo, haremos más supuestos. Veamos a continuación dos postulados acerca de la naturaleza del calor.

Postulado A (Absorción) La cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un objeto de masa m en una cantidad Δu es proporcional a la masa y a la variación de la temperatura

$$cm\Delta u. \tag{2.1}$$

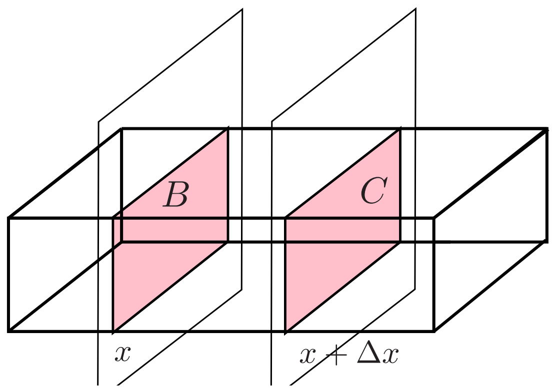
Aquí c es la constante de proporcionalidad y suponemos que varía según varíe el material.

Definición 11. *Llamaremos a la constante c dada en (2.1), calor específico del material.*

Por ejemplo, $c = 1$ para el agua, $c = 0.03$ para el plomo y $c = 0.06$ para la plata, aproximadamete.

Postulado B (Conducción) Consideremos una barra recta de material homogéneo, extremos aislados, longitud Δx y cuyas secciones transversales son constantes de área A. La cantidad de calor que fluye a través de un área por unidad de tiempo es proporcional a la tasa de cambio de la temperatura respecto de la distancia perpendicular al área, al área y a la longitud de tiempo durante la cual ocurre el flujo.

$$\Delta Q = -lA\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta t. \tag{2.2}$$



El flujo se toma en la dirección creciente de x cuando $\Delta u/\Delta x < 0$ y en dirección opuesta cuando Δu y Δx son positivos.

Definición 12. *La constante de proporcionalidad en (2.2) l, se denomina conductividad térmica del material.*

En particular si el gradiente de temperatura $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ es de 1 centígrado por centímetro, entonces l es el número de calorías del flujo de calor a través de $1cm^2$ de sección transversal en $1seg$.
Para el agua $l = 0.0014$, para el plomo 0.083 y plata $l = 1.006$, aproximadamente.

Observación 16. *El Postulado B se conoce también como la Ley de Fourier, que establece que el flujo de transferencia de calor por conducción en un medio isótropo*[1] *es proporcional y de sentido contrario al gradiente de temperatura en esa dirección.*

$$q = -k\nabla u. \tag{2.3}$$

En efecto, si tomamos límite cuando los incrementos de las variables tienden a cero en la ecuación (2.2), resulta

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x,t) = -lA\frac{\partial u}{\partial x}(x,t).$$

Poniendo $\frac{\partial Q}{\partial t} = q$ *(q es el flujo de transferencia del calor) y $k = lA$, obtenemos la ecuación (2.3).*

De acuerdo con la ecuación (2.2), podemos decir que la cantidad de calor que fluye de izquierda a derecha a través del plano B es

$$-lA\Delta t \left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{x}$$

De manera similar, la cantidad de flujo que fluye de izquierda a derecha a través del plano C es

$$-lA\Delta t \left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{x+\Delta x}$$

La cantidad neta de calor que se acumula en el cuerpo entre los planos B y C es la cantidad que entra por B menos la cantidad que sale por C

$$-lA\Delta t \left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{x} + lA\Delta t \left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{x+\Delta x} = lA\Delta t \left[\left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{x} \right]$$

Esta cantidad de calor acumulado eleva o baja la temperatura del material, luego aplicando el postulado A tenemos que

[1] Es aquel medio en el cual las propiedades físicas no dependen de la dirección en la que son examinadas.

$$lA\Delta t\left[\left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{x+\Delta x}-\left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{x}\right]=mc\Delta u=\rho A\Delta xc\Delta u \tag{2.4}$$

puesto que la masa de un cuerpo se calcula como volumen por densidad (ρ).

Dividiendo ambos lados de (2.4) por A, Δx , Δt y haciendo que Δx y Δt tiendan a cero, obtenemos

$$l\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)=\rho c\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$$

y poniendo $a=\frac{l}{\rho c}$,

$$a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}u(x,t). \tag{2.5}$$

Llamaremos a a $difusividad$ del material.

2.1.2 La ecuación de Difusión Fraccionaria

Retomemos la Ley de Fourier (2.3). Debido al caracter local de esta propiedad, la vamos a notar con el supraíndice l,

$$q^l(x,t)=-k\frac{\partial}{\partial x}u(x,t). \tag{2.6}$$

Podemos escribir a la ecuación del calor en términos del flujo de la siguiente manera:

$$a\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{k}q^l(x,t)\right)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \tag{2.7}$$

Siguiendo el planteo propuesto en [16], en vez de considerar el flujo instantáneo q^l, vamos a considerar la siguiente expresión

$$q^t=\frac{\partial}{\partial t}\,{}_0I^{\alpha}q^l=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}q^l(x,\tau)d\tau \tag{2.8}$$

donde ${}_0I^{\alpha}$ es el operador integral de Riemann–Liouville.

Físicamente podríamos pensar que estamos estableciendo un nuevo flujo que está dado en función de una derivada en el tiempo de una suma ponderada de flujos locales retrocediendo en el tiempo.

Reemplazando (2.8) en (2.7), resulta

$$a\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{k}q^t(x,t)\right)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$
$$a\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\,{}_0I^{\alpha}q^l(x,t)\right)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \tag{2.9}$$

Vamos a buscar una forma equivalente para (2.9), suponiendo que es posible intercambiar el orden de derivación y teniendo en cuenta que el flujo local en el instante $t=0$ es nulo, esto es $q^l(x,0)\equiv 0$.

Integrando (2.9) entre 0 y t,

$$-a\left[\frac{\partial}{\partial x}\,{}_0I^{\alpha}\left(\frac{1}{k}q^l(x,t)\right)-\frac{\partial}{\partial x}\,{}_0I^{\alpha}\left(\frac{1}{k}q^l(x,0)\right)\right]=u(x,t)-u(x,0)$$

$$-a\frac{\partial}{\partial x}\,{}_0I^{\alpha}\left(\frac{1}{k}q^l(x,t)\right)=u(x,t)-u(x,0).$$

Con el objetivo de despejar q^l, aplicamos derivada de Caputo ${}_0^CD_t^{\alpha}$ a ambos miembros. Observemos que estamos derivando en función del tiempo y, recordando que ${}_0^CD_t^{\alpha}(K)=0$, resulta

$$-a\,{}_0^CD_t^{\alpha}I^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{k}q^l(x,t)\right)={}_0^CD_t^{\alpha}u(x,t).$$

Ahora bien, como hemos considerado $q^l(x,0)\equiv 0$ y $\alpha\in(0,1)$, resulta que el el operador derivada de Caputo coincide con el de Riemann–Liouville y podemos aplicar la Proposición 7 que nos asegura que ${}_0^CD^{\alpha}$ es inverso a izquierda del operador integral ${}_0I^{\alpha}$, luego

$$a\left(-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{k}q^l(x,t)\right)={}_0^CD_t^{\alpha}u(x,t) \tag{2.10}$$

y reemplazando nuevamente (2.6) en (2.10), obtenemos la Ecuación de Difusión Fraccionaria (EDF)

$$a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)={}_0^CD_t^{\alpha}u(x,t). \tag{2.11}$$

2.2 Algunos resultados relativos a la función de Wright

Como vimos en la Definición 5, la función de Wright está dada por la siguiente serie

$$\mathcal{W}(z,\alpha,\beta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)}\quad z\in\mathbb{C},\ \alpha>-1,\ \beta\in\mathbb{C}. \tag{2.12}$$

Es sencillo ver que esta función es una función entera si $\alpha>0$, pero E. M. Wright probó que la función es entera aún cuando $\alpha>-1$ ([58]).

Esta serie converge uniformemente sobre conjuntos compactos, luego podemos calcular su derivada derivando término a término,

$$\frac{d}{dz}\mathcal{W}(z,\alpha,\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\frac{(z)^n}{n!\Gamma(\alpha n+\beta)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(\alpha n+\beta)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z)^n}{n!\Gamma(\alpha(n+1)+\beta)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z)^n}{n!\Gamma(\alpha n+(\alpha+\beta))}=\mathcal{W}(z,\alpha,\alpha+\beta). \tag{2.13}$$

Definición 13. *Llamaremos función de Mainardi al siguiente caso particular de la función de Wright:*

$$\mathcal{M}_\nu(z) = \mathcal{W}(-z, -\nu, 1-\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!\Gamma\left(-\nu n + 1 - \nu\right)}, \quad z \in \mathbb{C},\, 0 < \nu < 1. \tag{2.14}$$

2.2.1 Comportamiento asintótico

Teorema 5. *Si* $-1 < \rho < 0$*,* $y = -z$*,* $|arg\, y| \leq \min\{\frac{3}{2}\pi(1+\rho), \pi\} - \epsilon$*,* $\epsilon > 0$*, entonces*

$$\mathcal{W}(z, \rho, \beta) = I(Y), \quad Y \to \infty,$$

donde

$$I(Y) = Y^{1/2-\beta} e^{-Y} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} A_m Y^{-m} + O(Y^{-M}) \right\} \quad y \quad Y = (1+\rho)\left((-\rho)^{-\rho} y\right)^{\frac{1}{1+\rho}}.$$

Los coeficientes A_m*,* $m = 0, 1, \ldots$ *están definidos mediante la expansión asintótica*

$$\frac{\Gamma(1-\beta-\rho t)}{2\pi(-\rho)^{-\rho t}(1+\rho)^{(1+\rho)(t+1)}\Gamma(t+1)} = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m A_m}{\Gamma\left((1+\rho)t + \beta + \frac{1}{2} + m\right)} + O\left(\frac{1}{\Gamma\left((1+\rho)t + \beta + \frac{1}{2} + M\right)}\right),$$

válida para $\arg t$*,* $\arg(-\rho t)$ *y* $\arg(1-\beta-\rho t)$ *entre* $-\pi$ *y* π*, cuando* t *tiende a infinito.*

Se puede ver la prueba de este teorema en [58], y será de gran utilidad ya que nos permite enunciar los siguientes corolarios, cuyos resultados serán utilizados en los próximos capítulos.
El siguiente corolario fue probado por Mainardi ([37]).

Corolario 3. *La función de Mainardi presenta el siguiente comportamiento asintótico en el infinito*

$$\mathcal{M}_\nu\left(\frac{x}{\nu}\right) \sim a(\nu) x^{(\nu-1/2)/(1-\nu)} exp\left[-b(\nu) x^{1/(1-\nu)}\right], \tag{2.15}$$

$$donde \quad a(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\nu)}} > 0 \ y \qquad b(\nu) = \frac{1-\nu}{\nu}.$$

Corolario 4.

$$\lim_{x\to\infty} \mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) = 0 \quad y \quad \lim_{x\to\infty} \mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1 + \frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

Corolario 5.

$$\lim_{x\to\infty} \mathcal{M}_{\alpha/2}(x) = 0.$$

Corolario 6. *Si* $0 < \alpha < 1$ *y* $x \in \mathbb{R}^+$, *existe* $R > 0$ *tal que,*

$$\left|\mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right)\right| < P\left(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)\exp\left\{-bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}\right\} \qquad \forall\, x > R,$$

donde $P(x)$ *es un polinomio de grado menor o igual que* 1 *y* $b = (1-\frac{\alpha}{2})(\frac{\alpha}{2})^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} > 0$.

Demostración. Consideremos la función $\mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right)$. Es lícito aplicar el Teorema 5. En este caso tenemos

$$Y = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} x\right)^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}} = bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}} \qquad \text{y} \qquad b = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} > 0.$$

Luego

$$\mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right) = (bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha-1/2}\exp\left\{-bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}\right\}\left\{\sum_{m=0}^{M-1} A_m (bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{-m} + O\left((bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{-M}\right)\right\}.$$

Dado que $x > 0$,

$$\frac{\mathcal{W}(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha)}{(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha-1/2}\exp\left\{-bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}\right\}} - \sum_{m=0}^{M-1} A_m (bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{-m} = O\left((bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{-M}\right).$$

Pero esto significa que existe un $R > 0$ tal que

$$\left|\frac{\frac{\mathcal{W}(-x,-\frac{\alpha}{2},1-\alpha)}{(bs^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha-1/2}\exp\left\{-bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}\right\}} - \sum_{m=0}^{M-1} A_m (bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{-m}}{(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{-M}}\right| \leq C, \qquad \text{si } x > R.$$

Esta expresión es válida para $M \geq 1$. En particular, si tomamos $M = 1$,

$$\left|\frac{\frac{\mathcal{W}(-x,-\frac{\alpha}{2},1-\alpha)}{(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha-1/2}\exp\left\{-bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}\right\}} - A_0}{(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{-1}}\right| \leq C \qquad \text{si } x > R,$$

o equivalentemente

$$(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha-1/2}\left(-C(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{-1} + A_0\right) \leq \frac{\mathcal{W}(-x,-\frac{\alpha}{2},1-\alpha)}{\exp\left\{-bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}\right\}} \leq (bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha-1/2}\left(C(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{-1} + A_0\right).$$

Luego

$$\left|\mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right)\right| \leq (bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha-1/2}\left(C(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{-1} + |A_0|\right)\exp\left\{-bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}\right\}, \qquad \text{si } x > R. \tag{2.16}$$

Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, entonces $(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha-1/2} < (bR^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha-1/2}$ para todo $x > R$. Si $\alpha = \frac{1}{2}$, $(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha-1/2} = 1$. Y por último, si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, tomando R suficientemente grande de manera que $bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}} > 1$, sigue que $(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha-1/2} < (bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})$ cualquiera sea $x > R$. Luego, existen dos constantes B_0 y B_1 que dependen de α tales que

$$(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha-1/2} < B_0 + B_1(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}).$$

Por último,

$$(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha-1/2}\left(C(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{-1} + |A_0|\right) < \left(B_0 + B_1(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})\right)\left(C(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{-1} + |A_0|\right) =$$

$$= P_1\left((bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}})^{-1}\right) + P_2\left(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) \leq \tilde{C} + P_2\left(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = P\left(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}\right), \tag{2.17}$$

donde P es un polinomio de grado menor o igual que 1.

De (2.16) y (2.17) resulta la tesis

$$\left|\mathcal{W}(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha)\right| < P\left(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)\exp\left\{-bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}\right\}, \quad \text{si } x > R.$$

■

Corolario 7. *Si $0 < \alpha < 1$ y $x \in \mathbb{R}^+$, existe $R > 0$ tal que,*

$$\left|\mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right| < K\exp\{-bx\}, \quad \forall\, x > R \qquad \text{donde } b = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}.$$

2.2.2 Acotaciones y convergencia

Lema 1. *Si $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{M}_{\alpha/2}(x)$ es una función positiva y estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$.*

Demostración. Sea $\mathcal{M}_{\alpha/2}(x) = \mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Por Teorema 8 (pág. 122) en [48] sabemos que

$$x^{\beta-1}\mathcal{W}\left(-x^{-\sigma}, -\sigma, \beta\right) > 0, \ \text{si} \quad x > 0,\ \beta > 0,\ 0 < \sigma < 1.$$

Luego,

$$\mathcal{W}\left(-x^{-\sigma}, -\sigma, \beta\right) > 0, \quad \text{si} \quad x > 0,\ \beta > 0,\ 0 < \sigma < 1 \tag{2.18}$$

En nuestro caso,

$\sigma = \frac{\alpha}{2} \in (0,1), \quad \beta = 1 - \frac{\alpha}{2} > 0$, y $g(x) = x^{-\sigma}$ es una función inyectiva en $\mathbb{R}^+$, luego

$$\mathcal{M}_{\alpha/2}(x) > 0 \quad \text{si } x > 0.$$

Por otro lado, $\mathcal{M}_{\alpha/2}(0) = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} > 0 \quad , \lim_{x\to\infty} \mathcal{M}_{\alpha/2}(x) = 0 \quad$ y

$$\left(\mathcal{M}_{\alpha/2}(x)\right)' = -\mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right) < 0 \quad \text{pues es lícito aplicar (2.18) nuevamente.}$$

De aquí resulta que $\mathcal{M}_{\alpha/2}$ es decreciente, como queríamos ver. ∎

Corolario 8. *Si* $x > 0$, $\mathcal{M}_{\alpha/2}(x) < \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}$.

Demostración. Basta observar que $\mathcal{M}_{\alpha/2}(0) = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}$ y aplicamos el Lema 1. ∎

Corolario 9. *Si* $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)$ *es una función positiva y estrictamente decreciente en* $\mathbb{R}^+$ *tal que* $0 < \mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) \leq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$.

Demostración. Aplicando (2.13) y Lema 1 resulta

$$\left(\mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right)' = -\mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}\right) = -\mathcal{M}_{\alpha/2}(x) < 0 \quad \forall\, x > 0.$$

Luego $\mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$. Aplicando Corolario 4 y siendo $\mathcal{W}\left(0, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) = 1$, resulta que

$$0 < \mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) \leq 1, \, \forall\, x \in \mathbb{R}_0^+.$$

∎

Un caso particular muy interesante de la función de Wright es el siguiente. Teniendo en cuenta el Corolario 4, la ecuación (1.5) y la Definición (1.4),

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}\left(-x, -\frac{1}{2}, 1\right) &= \mathcal{W}\left(-x, -\frac{1}{2}, 1\right) - \mathcal{W}\left(-\infty, -\frac{1}{2}, 1\right) = \int_\infty^x \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}\left(-\xi, -\frac{1}{2}, 1\right)\right) d\xi \\
&= \int_\infty^x -\mathcal{W}\left(-\xi, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) d\xi = \int_x^\infty \mathcal{W}\left(-\xi, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) d\xi = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2/4} d\xi \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2}^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} d\xi = erfc\left(\frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathcal{W}\left(-x, -\frac{1}{2}, 1\right) = erfc\left(\frac{x}{2}\right) \tag{2.19}$$

y

$$1-\mathcal{W}\left(-x,-\frac{1}{2},1\right)=erf\left(\frac{x}{2}\right). \tag{2.20}$$

Esto nos lleva a enunciar el siguiente Lema.

Lema 2. *Si $x \in \mathbb{R}_0^+$ y $\alpha \in (0,1)$ entonces valen los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{\alpha \nearrow 1} \mathcal{M}_{\alpha/2}(x) = M_{1/2}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}$.

2. $\lim\limits_{\alpha \nearrow 1} \left[1-\mathcal{W}\left(-x,-\frac{\alpha}{2},1\right)\right] = erf\left(\frac{x}{2}\right)$.

Demostración. 1. Recordemos que $\mathcal{M}_{\alpha/2}(z)=\mathcal{W}\left(-z,\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2}\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k!\Gamma(-\frac{\alpha}{2}k+1-\frac{\alpha}{2})}$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $\alpha > \frac{1}{2}$. Separaremos esta serie en términos pares e impares y veremos que cada una está acotada por una serie convergente que no depende de α. Para los términos pares,

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!\Gamma(-\frac{\alpha}{2}2k+1-\frac{\alpha}{2})}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^{2k}}{(2k)!\left|\Gamma(-\frac{\alpha}{2}2k+1-\frac{\alpha}{2})\right|} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^{2k}}{(2k)!\left|\Gamma(1-\alpha(k+\frac{1}{2}))\right|}.$$

Observemos que:

$$(2k)! = (2k)...(k+1)\Gamma(k+1). \tag{2.21}$$

La función Gamma es creciente en $(\frac{3}{2},+\infty)$ y $\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$, luego si $k\geq 3$,

$$0<\Gamma\left(\alpha\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\leq \Gamma(k+1) \quad \text{y por lo tanto} \quad \frac{1}{\Gamma(k+1)} \leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)}. \tag{2.22}$$

De (2.21), (2.22) y aplicando la identidad $\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}=\frac{\sin(\pi x)}{\pi}$, válida para todo $x\in\mathbb{R}$,

$$\frac{|z|^{2k}}{(2k)...(k+1)\Gamma(k+1)\left|\Gamma(1-\alpha(k+1))\right|} \leq \frac{|z|^{2k}}{(2k)...(k+1)\left|\Gamma(\alpha(k+\frac{1}{2}))\Gamma(1-\alpha(k+\frac{1}{2}))\right|}$$

$$= \left|\frac{|z|^{2k}\sin(\pi\alpha(k+1))}{(2k)...(k+1)\pi}\right| \leq \frac{|z|^{2k}k!}{\pi(2k)!} \quad \forall\, k\geq 3.$$

Y por lo tanto,

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!\Gamma(-\frac{\alpha}{2}2k+1-\frac{\alpha}{2})}\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{2}\frac{z^{2k}}{(2k)!\Gamma(-\frac{\alpha}{2}2k+1-\frac{\alpha}{2})}\right| + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{|z|^{2k}k!}{\pi(2k)!} \tag{2.23}$$

que es una serie absolutamente convergente en $\mathbb{C}$.

Con respecto a los términos impares, razonando en la misma forma, ahora con $k\geq 2$,

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{-z^{2k+1}}{(2k+1)!\Gamma(-\frac{\alpha}{2}2(k+1)+1-\frac{\alpha}{2})}\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)!\left|\Gamma(-\frac{\alpha}{2}2(k+1)+1-\frac{\alpha}{2})\right|}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)!\,|\Gamma(1-\alpha(k+1))|} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)...(k+1)\Gamma(k+1)\,|\Gamma(1-\alpha(k+1))|}$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)...(k+1)\Gamma(\alpha(k+1))\,|\Gamma(1-\alpha(k+1))|} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)...(k+1)\pi}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^{2k+1}k!}{(2k+1)!\pi} \tag{2.24}$$

que es una serie absolutamente convergente en $\mathbb{C}$.

De (2.23), (2.24) y teniendo en cuenta la igualdad (1.5),

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} \mathcal{M}_{\alpha/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{\alpha \nearrow 1} \frac{z^{2k}}{(2k)!\Gamma(-\frac{\alpha}{2}2k+1-\frac{\alpha}{2})} + \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{\alpha \nearrow 1} \frac{-z^{2k+1}}{(2k+1)!\Gamma(1-\alpha(k+1))}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!\Gamma(-k+\frac{1}{2})} + \sum_{k=0}^{\infty} 0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

Más aún, la convergencia es uniforme sobre compactos respecto de la variable z.

2. . Aplicando (2.13) y el apartado 1 de este Lema,

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} \left[1 - \mathcal{W}\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] = \lim_{\alpha \nearrow 1} \int_0^x \mathcal{M}_{\alpha/2}(t)dt = \int_0^x \lim_{\alpha \nearrow 1} \mathcal{M}_{\alpha/2}(t)dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{4}} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2} e^{-u^2} du = erf\left(\frac{x}{2}\right).$$

■

2.3 El Problema de Valores Iniciales y de Contorno en el Primer Cuadrante para la Ecuación de Difusión Fraccionaria

2.3.1 El Problema de Valores Iniciales y de Contorno para la Ecuación de Difusión Fraccionaria en el Primer Cuadrante con condición de Dirichlet

En adelante, llamaremos D^{α} al operador derivada fraccionaria de Caputo de extremo $a = 0$, ${}_0^C D_t^{\alpha}$ respecto de la variable temporal. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} D^{\alpha} c(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < \infty,\ 0 < t < T,\ 0 < \alpha < 1, \\ c(x,0) = f(x), & 0 < x < \infty, \\ c(0,t) = g(t), & 0 < t < T, \end{cases} \tag{2.25}$$

donde f es una función continua y acotada en $\mathbb{R}_0^+$ y g es una función continua en $[0,T)$.
Observemos que, debido a la linealidad del operador Derivada de Caputo, es válido el principio de superposición para la resolución de este problema. Por lo tanto, resolver (2.25) es equivalente a resolver los siguientes problemas auxiliares:

$$\begin{cases} D^\alpha c_1(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 c_1}{\partial x^2}(x,t), & 0<x<\infty,\ 0<t<T,\ 0<\alpha<1, \\ c_1(x,0) = f(x), & 0<x<\infty, \\ c_1(0,t) = 0, & 0<t<T, \end{cases} \tag{2.26}$$

y

$$\begin{cases} D^\alpha c_2(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}(x,t), & 0<x<\infty,\ 0<t<T,\ 0<\alpha<1, \\ c_2(x,0) = 0, & 0<x<\infty, \\ c_2(0,t) = g(t), & 0<t<T. \end{cases} \tag{2.27}$$

En [26], se resuelve el problema (2.26) sin dar condiciones sobre el dato inicial f, pero se puede adaptar el análisis exhaustivo hecho para el problema de Cauchy en [12] y asegurar que la siguiente función

$$c_1(x,t) = \int_0^\infty \frac{1}{2\lambda t^{\alpha/2}} \left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{|x-\xi|}{t^{\alpha/2}}\right) - \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{|x+\xi|}{t^{\alpha/2}}\right)\right] f(\xi) d\xi \tag{2.28}$$

es efectivamente una solución de (2.26) si pedimos que el dato inicial f sea una función continua y acotada en $\mathbb{R}_0^+$. En particular,

$$c_{1_0}(x,t) = \frac{1}{2\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^\infty \left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{|x-\xi|}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right) - \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f_0\, d\xi \tag{2.29}$$

es una solución del problema (2.26) cuando consideramos la condición inicial identicamente constante $f(x) \equiv f_0$.

Trabajemos un poco con la función (2.29).

$$\begin{aligned} c_{1_0}(x,t) &= \tfrac{1}{2\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^\infty \left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\tfrac{|x-\xi|}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right) - \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\tfrac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f_0 d\xi \\ &= \tfrac{f_0}{2}\left[\int_0^x \tfrac{1}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}} \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\tfrac{x-\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right) d\xi + \int_x^\infty \tfrac{1}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}} \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\tfrac{\xi-x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right) d\xi - \int_0^\infty \tfrac{1}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}} \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\tfrac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right) d\xi\right] \\ &= \tfrac{f_0}{2}\left[-\mathcal{W}\left(-\tfrac{x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}, -\tfrac{\alpha}{2}, 1\right) + 1 - \mathcal{W}\left(-\infty, -\tfrac{\alpha}{2}, 1\right) + \mathcal{W}\left(-\infty, -\tfrac{\alpha}{2}, 1\right) - \mathcal{W}\left(-\tfrac{x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}, -\tfrac{\alpha}{2}, 1\right) + 2\right] \\ &= f_0\left[1 - \mathcal{W}\left(-\tfrac{x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}, -\tfrac{\alpha}{2}, 1\right)\right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la linealidad del operador derivada de Caputo, podemos concluir que

$$c_{2_0}(x,t) = g_0\, \mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) \tag{2.30}$$

es una solución de la ecuación de difusión fraccionaria.

Más aún,

$$c_{2_0}(0,t) = g_0\, \mathcal{W}\left(0, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) = g_0 \quad \text{y} \quad c_{20}(x,0) = \lim_{t \searrow 0} g_0\, \mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) = 0.$$

Luego, (2.30) es una solución del problema (2.27) para la condición de borde idénticamente constante $g(t) \equiv g_0$.

En general, podemos afirmar que

$$c_{AB}(x,t) = A + (B-A)\mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) \tag{2.31}$$

es una solución del problema

$$\begin{cases} D^{\alpha} c(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t) & 0 < x < \infty,\ 0 < t < T,\ 0 < \alpha < 1 \\ c(x,0) = A & 0 < x < \infty \\ c(0,t) = B & 0 < t < T \end{cases} \tag{2.32}$$

Ahora bien. Consideremos el problema

$$\begin{cases} D^{\alpha}v(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) & 0 < x < \infty,\ 0 < t < T,\ 0 < \alpha < 1 \\ v(x,0) = 0 & 0 < x < \infty \\ v(0,t) = 1 & 0 < t < T \end{cases} \tag{2.33}$$

cuya solución, según (2.31) está dada por

$$v(x,t) = \mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right). \tag{2.34}$$

Observemos que podemos escribir a v de la siguiente manera:

$$v(x,t) = \mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda \tau^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) d\tau = \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda \tau^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda \tau^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2} d\tau$$
$$= \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda (t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda (t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2} d\tau.$$

Consideremos las funciones

$$K(x,t) = \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2} \quad \text{y} \quad \mathbf{1}_{[0,t_0]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < t_0 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Podemos expresar a v como la siguiente convolución en la variable t:

$$v(x,t) = K(x,t) * \mathbf{1}_{[0,t]}.$$

Y esta nueva forma de expresar v nos induce a proponer a la siguiente función

$$c_2(x,t) = K(x,t) * g(t)1_{[0,t]} = \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda (t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda (t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2} g(\tau) d\tau. \tag{2.35}$$

como solución del problema (2.27).

Con el propósito de probar esta afirmación, enunciamos el siguiente Lema.

Lema 3. *Sea $K(t-\tau)f(\tau)$ una función que verifica las siguientes propiedades:*

$$K(t-\tau)f(\tau) \quad \textit{es } \tau - \textit{integrable en } [0,t], \tag{2.36}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}K(t-\tau)f(\tau)\right| \le g(\tau) \in L^1[0,t], \tag{2.37}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \eta}K(\eta-\tau)\frac{f(\tau)}{(t-\eta)^{\alpha}}\right| \in L^1(\Omega),\ \textit{donde}\ \Omega=\{(\eta,\tau)\in\mathbb{R}^2:\eta\in(0,t),\,0\le\tau\le\eta\} \tag{2.38}$$

$$\lim_{\tau\nearrow\eta}K(\eta-\tau)f(\tau)=h(\eta)\,\in\,L^1(0,t). \tag{2.39}$$

Entonces

$$D^{\alpha}\left(\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau\right)=\int_0^t\left(D^{\alpha}K(t-\tau)\right)f(\tau)d\tau+_0 I^{1-\alpha}\left(h(t)\right).$$

Demostración. Debido a las hipótesis (2.37) y (2.39), podemos aplicar derivación bajo el signo integral cuando el parámetro aparece en el extremo de integración

$$\frac{d}{dt}\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau=\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}K(t-\tau)f(\tau)d\tau+\lim_{\tau\nearrow t}K(t-\tau)f(\tau).$$

Reemplazando en la definición de derivada fraccionaria,

$$D^{\alpha}\left(\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau\right)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\frac{\partial}{\partial\eta}\int_0^{\eta}K(\eta-\tau)f(\tau)d\tau}{(t-\eta)^{\alpha}}d\eta$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{1}{(t-\eta)^{\alpha}}\left[\int_0^{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}K(\eta-\tau)f(\tau)d\tau+\lim_{\tau\nearrow\eta}K(\eta-\tau)f(\tau)\right]d\eta. \tag{2.40}$$

Es lícito aplicar Fubini debido a la hipótesis (2.38), lo que nos permite deducir que

$$\int_0^t\frac{f(\tau)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\tau}^t\frac{\frac{\partial}{\partial\eta}K(\eta-\tau)}{(t-\eta)^{\alpha}}d\eta d\tau+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\lim_{\tau\nearrow\eta}K(\eta-\tau)f(\tau)}{(t-\eta)^{\alpha}}d\eta.$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\tau}^t\frac{\frac{\partial}{\partial\eta}K(\eta-\tau)}{(t-\eta)^{\alpha}}d\eta=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t-\tau}\frac{\frac{\partial}{\partial s}K(s)}{(t-\tau-s)^{\alpha}}ds=\,D^{\alpha}K(t-\tau)$$

y

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\lim_{\tau\nearrow\eta}K(\eta-\tau)f(\tau)}{(t-\eta)^{\alpha}}d\eta=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{h(\eta)}{(t-\eta)^{\alpha}}d\eta=_0 I^{1-\alpha}\left(h(t)\right).$$

Luego,

$$D^{\alpha}\left(\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau\right)=\int_0^t\left(D^{\alpha}K(t-\tau)\right)f(\tau)d\tau+\,_0I^{1-\alpha}\left(h(t)\right).$$

■

Nuestro objetivo ahora es probar que el núcleo

$$\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}g(\tau) \tag{2.41}$$

verifica las hipótesis del Lema 3.

- Hipótesis (2.36):

$$\int_0^t \left| \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}} \frac{\alpha}{2} g(\tau) \right| d\tau = \int_{\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}}^{\infty} \mathcal{M}_{\alpha/2}(y) \left| g(t-(x/\lambda y))^{2/\alpha}) \right| dy. \tag{2.42}$$

Sabemos que:

$$\int_0^\infty y^n \mathcal{M}_{\alpha/2}(y) dy = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}n+1\right)} \quad \text{para todo } \alpha \in (0,2), \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{(ver [18]).} \tag{2.43}$$

La función de Mainardi es positiva en $\mathbb{R}^+$(por Lema 1). (2.44)

Por hipótesis, g es una función acotada en $[0,t]$, esto es

$$|g(\tau)| \leq M \quad \forall \tau \in [0,t]. \tag{2.45}$$

Luego (2.42) es convergente y el núcleo (2.41) es $\tau - integrable$ en $[0,t]$.

- Hipótesis (2.37):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\right]$$

$$= \mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right)\left(\frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\right)^2 - \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{(\alpha/2+1)\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+2}} \tag{2.46}$$

Aplicando el Corolario 6, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\tau \in (t-\delta, t)$, resulta

$$\left| \mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right)\left(\frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\right)^2 g(\tau) \right|$$

$$\leq \left(\frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\right)^2 \left(c + d\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) exp\left\{-b\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)^{2/2-\alpha}\right\} |g(\tau)|, \tag{2.47}$$

$b > 0$, c, d constantes.

Observemos que (2.47) es una función integrable. En efecto, haciendo la sustitución

$$\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}} = r \tag{2.48}$$

y teniendo en cuenta que

$$exp\{-x\} \le \frac{n!}{x^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x > 0, \tag{2.49}$$

resulta que

$$\int_{t-\delta}^{t} \left(\frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\right)^2 \left(c + d\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) exp\left\{-b\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)^{2/2-\alpha}\right\} |g(\tau)|\, d\tau$$

$$= \int_{\frac{x}{\lambda\delta^{\alpha/2}}}^{\infty} \frac{\alpha}{2} r \left(\frac{r\lambda}{x}\right)^{2/\alpha} (c+dr)\, exp\left\{-br^{2/2-\alpha}\right\} \left| g\left(t - \left(\frac{x}{\lambda r}\right)^{2/\alpha}\right)\right| d\tau$$

$$\le M \int_{\frac{x}{\lambda\delta^{\alpha/2}}}^{\infty} (c+dr)\, r^{1+2/\alpha} exp\left\{-br^{2/2-\alpha}\right\} dr \le M \int_{\frac{x}{\lambda\delta^{\alpha/2}}}^{\infty} \frac{(c+dr)\, r^{1+2/\alpha}}{b^n r^{2n/2-\alpha}} n!\, dr. \tag{2.50}$$

Es sencillo ver que, para todo $\alpha \in (0,1)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que (2.50) resulta convergente. Por ejemplo, si $\alpha = 1/4$ basta tomar $n = 10$.
Luego, el primer término de la suma (2.46) está acotado por una función integrable.

Consideremos ahora el segundo término de la suma (2.46). Haciendo nuevamente la sustitución (2.48) y teniendo en cuenta que la función de Mainardi es positiva en $\mathbb{R}^+$, tenemos que

$$\int_0^t \left| \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) \frac{(\alpha/2+1)\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+2}} g(\tau)\right| d\tau$$

$$\le M \int_{x/\lambda t^{\alpha/2}}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2}+1\right) \mathcal{M}_{\alpha/2}(r) \left(\frac{\lambda r}{x}\right)^{2/\alpha} dr \le MC_{x,\lambda,\alpha} \int_0^{\infty} \mathcal{M}_{\alpha/2}(r) r^{2/\alpha} dr \tag{2.51}$$

Ahora bien, para todo $\alpha \in (0,1)$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \frac{\alpha}{2} < 1$. Luego,

$$MC_{x,\lambda,\alpha} \int_1^{\infty} \mathcal{M}_{\alpha/2}(r) r^{2/\alpha} dr \le MC_{x,\lambda,\alpha} \int_1^{\infty} \mathcal{M}_{\alpha/2}(r) r^{k} dr.$$

Siendo $\mathcal{M}_{\alpha/2}$ positiva y aplicando (2.43), resulta

$$MC_{x,\lambda,\alpha} \int_1^{\infty} \mathcal{M}_{\alpha/2}(r) r^{k} dr \le MC_{x,\lambda,\alpha} \int_0^{\infty} \mathcal{M}_{\alpha/2}(r) r^{k} dr = MC_{x,\lambda,\alpha} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}k+1\right)}. \tag{2.52}$$

Dado que $\int_0^1 \mathcal{M}_{\alpha/2}(r) r^k dr < \infty$, de (2.51) y (2.52) resulta que el núcleo (2.41) verifica la hipótesis (2.37).

- Hipótesis (2.38):

  Tenemos que probar que

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\right]\frac{g(\tau)}{(t-\eta)^{\alpha}} \in L^1(\Omega),$$

  donde $\Omega = \{(\eta,\tau) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 < \eta < t, \, 0 < \tau < \eta\}$.

  O equivalentemente que

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)\right]\left(\frac{\alpha x}{2\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2+1}}\right)\frac{g(\tau)}{(t-\eta)^{\alpha}}$$
$$-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2+2}}\frac{g(\tau)}{(t-\eta)^{\alpha}} = I + II \in L^1(\Omega).$$

  Recurriremos al Teorema de Tonelli[2] (ver [6], p. 55).

Razonando como en el item anterior, aplicando el Corolario 6, la desigualdad (2.49) y el Corolario 8, probamos la primera hipótesis del Teorema de Tonelli, esto es

$$\int_0^{\eta} |I + II| \, d\tau < \infty \, \forall \, \eta \in (0,t). \tag{2.53}$$

Para probar la segunda hipótesis del Teorema de Tonelli, consideremos δ suficientemente pequeño según el Corolario 6,

$$\int_0^t \int_0^{\eta} |I+II| \, d\tau d\eta = \int_0^t \int_0^{\eta-\delta} |I+II| \, d\tau d\eta + \int_0^t \int_{\eta-\delta}^{\eta} |I+II| \, d\tau d\eta. \tag{2.54}$$

Sea M la constante definida en (2.45) y C es una constante que puede depender de δ, α, x o n.

Observemos que

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)\right]. \tag{2.55}$$

Además, debido al Lema 1

$$-\frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right) > 0. \tag{2.56}$$

[2]Teorema de Tonelli: Supongamos que

$$\int_{\Omega_1} |F(x,y)| dy < \infty \quad p.c.t. \, x \in \Omega_2$$

y que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)| dy < \infty.$$

Entonces $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

$$\begin{array}{rcl}\int_0^t\int_0^{\eta-\delta}|I|\,d\tau d\eta & \leq & \int_0^t \frac{M}{(t-\eta)^\alpha}\int_0^{\eta-\delta}\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)\right]\left(\frac{\alpha x}{2\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2+1}}\right)\right|d\tau d\eta\\ & = & \int_0^t \frac{M}{(t-\eta)^\alpha}\int_0^{\eta-\delta}\left|-\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)\right|\left(\frac{\alpha x}{2\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2+1}}\right)d\tau d\eta\\ & \leq & \int_0^t \frac{M}{(t-\eta)^\alpha\delta^{\alpha/2+1}}\int_0^{\eta-\delta}-\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)d\tau d\eta\\ & = & \int_0^t \frac{M}{(t-\eta)^\alpha\delta^{\alpha/2+1}}\left[-\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)\Big|_0^{\eta-\delta}\right]d\eta\\ & = & \int_0^t \frac{M}{(t-\eta)^\alpha\delta^{\alpha/2+1}}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda\eta^{\alpha/2}}\right)-\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda\delta^{\alpha/2}}\right)\right]d\eta\\ & \leq & \frac{2M}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\delta^{\alpha/2+1}}\int_0^t\frac{1}{(t-\eta)^\alpha}d\eta<\infty\end{array}$$

ya que hemos aplicado el Corolario 8 y que $\alpha\in(0,1)$. Luego,

$$\int_0^t\int_0^{\eta-\delta}|I|\,d\tau d\eta<\infty. \tag{2.57}$$

Por último observemos que

$$\int_0^t\int_0^{\eta-\delta}|II|\,d\tau d\eta\leq\int_0^t\int_0^{\eta-\delta}\left|\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2+2}}\frac{g(\tau)}{(t-\eta)^\alpha}\right|d\tau d\eta.$$

En el item anterior probamos que

$$\int_0^\eta\left|\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{(\alpha/2+1)\alpha x}{2\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2+2}}g(\tau)\right|d\tau<\infty.$$

Dado que $\alpha\in(0,1)$, resulta que

$$\int_0^t\int_0^{\eta-\delta}|II|\,d\tau d\eta<\infty. \tag{2.58}$$

De (2.57) y (2.58),

$$\int_0^t\int_0^{\eta-\delta}|I+II|\,d\tau d\eta<\infty \tag{2.59}$$

Para probar que

$$\int_0^t\int_{\eta-\delta}^\eta|II|\,d\tau d\eta<\infty$$

se puede proceder acotando como en el item 2.

Por lo tanto

$$\int_0^t\int_0^\eta|I+II|\,d\tau d\eta<\infty \tag{2.60}$$

De (2.59) y (2.60), podemos aplicar Tonelli y resulta que

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\right]\frac{g(\tau)}{(t-\eta)^\alpha}\in L^1(\Omega),$$

- Hipótesis (2.39):

  Veamos que

$$\lim_{\tau \nearrow \eta} \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{\alpha x}{2\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2+1}}g(\tau)=0. \tag{2.61}$$

  Aplicando (2.43) y (2.45), resulta

$$\lim_{\tau \nearrow \eta} \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{\alpha x}{2\lambda(\eta-\tau)^{\alpha/2+1}}g(\tau)=\lim_{s\searrow 0}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda s^{\alpha/2}}\right)\frac{\alpha x}{2\lambda s^{\alpha/2+1}}g(\eta-s)$$

$$=\lim_{y\to\infty}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda}y^{\alpha/2}\right)\frac{\alpha x y^{\alpha/2+1}}{2\lambda}g\left(\eta-\frac{1}{y^{\alpha/2+1}}\right)=0.$$

Es lícito entonces aplicar el Lema 3 al núcleo (2.35), de donde resulta que

$$\begin{array}{rcl} D^{\alpha}c_2(x,t) & = & D^{\alpha}\left(\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau\right)\\ & = & \int_0^t D^{\alpha}\left(\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)\right)d\tau+\,I_t^{1-\alpha}(0)\\ & = & \int_0^t D^{\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right)g(\tau)d\tau\\ & = & \int_0^t D^{\alpha+1}\left(-\mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right)g(\tau)d\tau \end{array} \tag{2.62}$$

Observemos que, como $\mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda 0^+},-\frac{\alpha}{2},1\right)=0$, la derivada de Caputo conmuta y resulta que

$$D^{\alpha+1}\left(-\mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(D^{\alpha}\mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right).$$

Pero siendo $\mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)$ solución de (2.33), resulta que

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(D^{\alpha}\mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{(\partial x)^2}\mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)=$$

$$=\frac{\partial}{(\partial x)^2}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right)=\frac{\partial}{(\partial x)^2}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2} \tag{2.63}$$

Reemplazando (2.63) en (2.62), resulta que

$$D^{\alpha}c_2(x,t)=\int_0^t\frac{\partial}{(\partial x)^2}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{\partial}{(\partial x)^2}\int_0^t\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau=\frac{\partial}{(\partial x)^2}c_2(x,t). \tag{2.64}$$

Y por lo tanto $c_2(x,t)$ verifica la ecuación de difusión fraccionaria.

Proposición 14. *Valen los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\searrow 0}\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}d\tau=1.$

2. $\lim_{t \searrow 0} \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}} \frac{\alpha}{2} d\tau = 0.$

Demostración. 1. Si en (2.43), tomamos $n = 0$, resulta que $\int_0^\infty \mathcal{M}_{\alpha/2}(u)du = 1$.

Por otro lado, haciendo la sustitución (2.48), resulta que

$$\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}} \frac{\alpha}{2} d\tau = \int_{x/\lambda t^{\alpha/2}}^\infty \mathcal{M}_{\alpha/2}(u)du. \tag{2.65}$$

Aplicando estos resultados y el Corolario 8,

$$\left|\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}} \frac{\alpha}{2} d\tau - 1\right| = \left|\int_{x/\lambda t^{\alpha/2}}^\infty \mathcal{M}_{\alpha/2}(u)du - \int_0^\infty \mathcal{M}_{\alpha/2}(u)du\right|$$

$$\leq \int_0^{x/\lambda t^{\alpha/2}} \mathcal{M}_{\alpha/2}(u)du \leq \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}} \to 0 \quad \text{si} \quad x \searrow 0.$$

2. Aplicando (2.65), tenemos

$$\lim_{t \searrow 0} \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}} \frac{\alpha}{2} d\tau = \lim_{1/t \to \infty} \int_{x/\lambda t^{\alpha/2}}^\infty \mathcal{M}_{\alpha/2}(u)du = 0$$

■

Verifiquemos ahora las condiciones de borde.

- La condición inicial es

$$c_2(x,0) = \lim_{t \searrow 0} c_2(x,t) = 0. \tag{2.66}$$

  Teniendo en cuenta la Proposición 14 y (2.45),

$$\lim_{t \searrow 0} \left|\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}} \frac{\alpha}{2} g(\tau) d\tau\right|$$

$$\leq \lim_{t \searrow 0} \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}} \frac{\alpha}{2} \left|g(\tau)\right| d\tau$$

$$\leq \lim_{t \searrow 0} M \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}} \frac{\alpha}{2} d\tau = 0.$$

- La condición de Dirichlet es

$$c_2(0,t) = \lim_{x \searrow 0} c_2(x,t) = g(t) \tag{2.67}$$

  Observemos que

$$\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}} \frac{\alpha}{2} g(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}} \frac{\alpha}{2} \left[g(\tau) - g(t) + g(t)\right] d\tau =$$

$$= \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\left[g(\tau)-g(t)\right]d\tau$$
$$+\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(t)d\tau.$$

Si aplicamos la Proposición 14 al segundo miembro de la suma,

$$\lim_{x\searrow 0}\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(t)d\tau$$
$$= g(t)\lim_{x\searrow 0}\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}d\tau = g(t).$$

Sea

$$I = \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\left[g(\tau)-g(t)\right]d\tau. \tag{2.68}$$

Si probamos que $\lim_{x\searrow 0} I = 0$ habremos probado (2.67).

Sea $\delta > 0$ a determinar.

$$I = \int_0^{t-\delta} \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\left[g(\tau)-g(t)\right]d\tau$$
$$+\int_{t-\delta}^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\left[g(\tau)-g(t)\right]d\tau = I_1 + I_2 \tag{2.69}$$

Aplicando el Corolario 8,

$$|I_1| = \left|\int_0^{t-\delta} \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\left[g(\tau)-g(t)\right]d\tau\right|$$
$$\leq \int_0^{t-\delta}\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}|g(\tau)-g(t)|d\tau \leq \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{x}{\lambda\delta^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\int_0^{t-\delta}|g(\tau)-g(t)|d\tau$$
$$\leq \left(\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{\alpha}{2\lambda\delta^{\alpha/2+1}}\int_0^t |g(\tau)-g(t)|d\tau\right)x = C_{t,\delta,\alpha}x < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{si} \quad x < \frac{\epsilon}{2C_{t,\delta,\alpha}}. \tag{2.70}$$

Para acotar I_2, vamos a utilizar el hecho de que g es continua en t. Luego, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|g(\tau) - g(t)| < \frac{\epsilon}{2}$ si $|t-\tau| < \delta$. Utilizando además la igualdad (2.65) resulta,

$$|I_2| \leq \frac{\epsilon}{2}\int_{t-\delta}^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}d\tau = \frac{\epsilon}{2}\int_{x/\lambda\delta^{\alpha/2}}^\infty \mathcal{M}_{\alpha/2}(u)du < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.71}$$

De (2.70) y (2.71), resulta que $|I| < \epsilon$, cualquiera sea $\epsilon > 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x\searrow 0}\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\left[g(\tau)-g(t)\right]d\tau = 0.$$

Estamos en condiciones entonces de enunciar el siguiente teorema.

Teorema 6. *Si f es una función continua y acotada en $\mathbb{R}_0^+$ y g es una función continua en $[0,T)$ entonces*

$$c(x,t) = \int_0^\infty \frac{1}{2\lambda t^{\alpha/2}} \left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{|x-\xi|}{\lambda t^{\alpha/2}}\right) - \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{|x+\xi|}{\lambda t^{\alpha/2}}\right)\right] f(\xi) d\xi$$

$$+ \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}} \frac{\alpha}{2} g(\tau) d\tau. \tag{2.72}$$

es una solución del problema

$$\begin{cases} D^\alpha c(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t) & 0 < x < \infty,\ 0 < t < T,\ 0 < \alpha < 1 \\ c(x,0) = f(x) & 0 < x < \infty \\ c(0,t) = g(t) & 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.73}$$

Teorema 7. *El límite cuando $\alpha \nearrow 1$ de la solución del problema*

$$\begin{cases} D^\alpha c_2(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}(x,t) & 0 < x < \infty,\ 0 < t < T,\ 0 < \alpha < 1 \\ c_2(x,0) = 0 & 0 < x < \infty \\ c_2(0,t) = g(t) & 0 < t < T, \end{cases} \tag{2.74}$$

es la solución clásica del problema análogo asociado a la ecuación del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t) & 0 < x < \infty,\ 0 < t < T \\ w(x,0) = 0 & 0 < x < \infty \\ w(0,t) = g(t) & 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.75}$$

Demostración. Se puede ver en [7] que la solución del problema (2.75) está dada por la función

$$w(x,t) = \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi}} \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{3/2}} g(\tau) d\tau \tag{2.76}$$

Llamemos c_2^α a la solución del problema (2.74) dada por el Teorema 6,

$$c_2^\alpha(x,t) = \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}} \frac{\alpha}{2} g(\tau) d\tau.$$

Calculemos el límite cuando $\alpha \nearrow 1$. Aplicando el Teorema de la convergencia dominada y el Lema 2,

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\nearrow 1} c_2^{\alpha}(x,t) &= \lim_{\alpha\nearrow 1}\left\{\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\tfrac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\tfrac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\tfrac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau\right\}\\
&= \int_0^t \lim_{\alpha\nearrow 1}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\tfrac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\tfrac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\tfrac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau\\
&= \int_0^t \tfrac{e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi}}\tfrac{x}{\lambda(t-\tau)^{3/2}}g(\tau)d\tau\\
&= w(x,t).
\end{aligned}$$

■

2.3.2 El Problema de Valores Iniciales y de Contorno para la Ecuación de Difusión Fraccionaria en el Primer Cuadrante con condición de Flujo Nula

Consideremos el problema en el primer cuadrante con condición de flujo nula,

$$\begin{cases} D^{\alpha}c_3(x,t)=\lambda^2\dfrac{\partial^2 c_3}{\partial x^2}(x,t) & 0<x<\infty,\, 0<t<T,\, 0<\alpha<1\\ \dfrac{\partial c_3}{\partial x}(0,t)=0 & 0<t<T\\ c_3(x,0)=f(x) & 0<x<\infty. \end{cases} \tag{2.77}$$

Con el objetivo de resolver este problema, consideremos el siguiente problema auxiliar en el semiplano superior,

$$\begin{cases} D^{\alpha}z(x,t)=\lambda^2\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t) & -\infty<x<\infty,\, 0<t<T,\, 0<\alpha<1\\ z(x,0)=\tilde{f}(x) & -\infty<x<\infty \end{cases} \tag{2.78}$$

donde $\tilde{f}$ es una extensión par de f.

La solución de este problema expresada en términos de una convolución que involucra la función de Mainardi está dada en [36], y es válido el análisis hecho en [12] nuevamente para probar que la siguiente expresión es una solución del problema de Cauchy si pedimos al dato inicial que sea una función continua y acotada en $\mathbb{R}$.

Sea entonces

$$c_3(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{|x-\xi|}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\tilde{f}(\xi)d\xi=\frac{1}{2\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\int_0^{\infty}\left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{|x-\xi|}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right]f(\xi)d\xi \tag{2.79}$$

solución de (2.78). Nuestro objetivo en adelante, es probar que

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\partial}{\partial x}c_3(x,t)=0. \tag{2.80}$$

Ahora bien.

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_3}{\partial x}(0,t) &= \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{2\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{|x-\xi|}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f(\xi)d\xi \\ &= \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{2\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_0^x \left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x-\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f(\xi)d\xi \right. \\ &\qquad \left. +\int_x^\infty \left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{\xi-x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f(\xi)d\xi\right\}.\end{aligned} \tag{2.81}$$

Debido a la continuidad de la función de Mainardi, al Corolario 6 y siendo f acotada, podemos aplicar derivación bajo en signo integral con parámetro en el extremo de integración. Luego,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x-\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f(\xi)d\xi \\ &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x-\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f(\xi)d\xi + \lim_{\xi\nearrow x}\left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x-\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f(\xi)\end{aligned} \tag{2.82}$$

y

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\int_x^\infty \left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{\xi-x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f(\xi)d\xi \\ &= -\int_\infty^x \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\xi-x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f(\xi)d\xi - \lim_{\xi\searrow x}\left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\xi-x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f(\xi).\end{aligned} \tag{2.83}$$

Trabajando un poco con estas expresiones,

$$\begin{aligned}&\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x-\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f(\xi)d\xi = \\ &= -\frac{1}{\lambda t^{\alpha/2}}\int_0^x \left[\mathcal{W}\left(-\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)+\mathcal{W}\left(-\frac{x-\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)\right] f(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el integrando está formado por funciones continuas, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, y resulta que:

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^x \left[\mathcal{W}\left(-\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)+\mathcal{W}\left(-\frac{x-\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)\right] f(\xi)d\xi\right| \\ &= \left|\left[\mathcal{W}\left(-\frac{x+\theta}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)+\mathcal{W}\left(-\frac{x-\theta}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)\right] f(\theta)x\right| \quad \theta\in[0,x].\end{aligned}$$

Y de aquí,

$$\lim_{x\searrow 0}\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x-\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f(\xi)d\xi = 0. \tag{2.84}$$

Por otro lado,

$$\int_x^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{\xi-x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right]f(\xi)d\xi=$$

$$=\int_x^\infty -\frac{1}{\lambda t^{\alpha/2}}\left[\mathcal{W}\left(-\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)-\mathcal{W}\left(-\frac{\xi-x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)\right]f(\xi)d\xi=$$

$$=\int_0^\infty -\frac{1}{\lambda t^{\alpha/2}}\left[\mathcal{W}\left(-\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)-\mathcal{W}\left(-\frac{\xi-x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)\right]f(\xi)d\xi-$$

$$-\int_0^x -\frac{1}{\lambda t^{\alpha/2}}\left[\mathcal{W}\left(-\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)-\mathcal{W}\left(-\frac{\xi-x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)\right]f(\xi)d\xi.$$

Aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada, calculamos el límite cuando x tiende a cero en la primer integral,

$$\lim_{x\searrow 0}\int_0^\infty -\frac{1}{\lambda t^{\alpha/2}}\left[\mathcal{W}\left(-\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)-\mathcal{W}\left(-\frac{\xi-x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)\right]f(\xi)d\xi=$$

$$=\int_0^\infty \lim_{x\searrow 0}-\frac{1}{\lambda t^{\alpha/2}}\left[\mathcal{W}\left(-\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)-\mathcal{W}\left(-\frac{\xi-x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)\right]f(\xi)d\xi=$$

$$=\int_0^\infty -\frac{1}{\lambda t^{\alpha/2}}\left[\mathcal{W}\left(-\frac{\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)-\mathcal{W}\left(-\frac{\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)\right]f(\xi)d\xi=0.$$

Para la segunda integral podemos proceder aplicando Teorema de Valor Medio como en el caso anterior. Luego, estamos en condiciones de afirmar que

$$\frac{\partial c_3}{\partial x}(0,t)=0.$$

Teorema 8. *Sea f una función continua y acotada en $\mathbb{R}_0^+$, entonces*

$$c(x,t)=\frac{1}{2\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\int_0^\infty\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{|x-\xi|}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right]f(\xi)d\xi$$

es una solución del problema

$$\begin{cases} D^\alpha c(x,t)=\lambda^2\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t), & 0<x<\infty,\ 0<t<T,\ 0<\alpha<1,\\ \dfrac{\partial c}{\partial x}(0,t)=0, & 0<t<T,\\ c(x,0)=f(x), & 0<x<\infty.\end{cases}$$

2.3.3 El Problema de Valores Iniciales y de Contorno para la Ecuación de Difusión Fraccionaria en el Primer Cuadrante con condición de Neumann

En esta sección, vamos a resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} D^\alpha c(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < \infty,\ 0 < t < T,\ 0 < \alpha < 1, \\ c(x,0) = f(x), & 0 < x < \infty, \\ \dfrac{\partial c}{\partial x}(0,t) = g(t), & 0 < t < T, \end{cases} \tag{2.85}$$

donde f es una función continua y acotada en $\mathbb{R}_0^+$ y g es continua en $[0,T)$.

Como hicimos en secciones anteriores, consideremos los siguientes problemas auxiliares:

$$\begin{cases} D^\alpha c_4(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 c_4}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < \infty,\ 0 < t < T,\ 0 < \alpha < 1, \\ c_4(x,0) = f(x), & 0 < x < \infty, \\ \dfrac{\partial c_4}{\partial x}(0,t) = 0, & 0 < t < T, \end{cases} \tag{2.86}$$

y

$$\begin{cases} D^\alpha c_5(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 c_5}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < \infty,\ 0 < t < T,\ 0 < \alpha < 1, \\ c_5(x,0) = 0, & 0 < x < \infty, \\ \dfrac{\partial c_5}{\partial x}(0,t) = g(t), & 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.87}$$

Por Teorema 8, la solución de (2.86) está dada por

$$c_4(x,t) = \frac{1}{2\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^\infty \left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}} \right) + \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{|x-\xi|}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \right] f(\xi) d\xi$$

.

Recurriendo a los resultados que obtuvimos en la sección anterior, vamos a proponer como solución de (2.87) a la siguiente función:

$$c_5(x,t) = -\int_x^\infty \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}} \right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}} \frac{\alpha}{2} g(\tau) d\tau d\xi. \tag{2.88}$$

Lema 4. *Sea $c(x,t)$ una solución de la ecuación de difusión fraccionaria $D^\alpha c(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t)$ tal que:*

(i) *Para cada (x,t), la función $F(x,t) = \displaystyle\int_x^\infty c(\xi,t)d\xi$ está bien definida,* (2.89)

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\partial c}{\partial x}(x,t) = 0\,,$ (2.90)

$$(iii) \quad \left|\frac{\partial}{\partial \tau} c(\xi,\tau)\right| \le g(\xi) \in L^1(x,\infty)\,, \tag{2.91}$$

$$(iv) \quad \frac{\frac{\partial}{\partial \tau} c(\xi,\tau)}{(t-\tau)^\alpha} \in L^1((x,\infty)\times(0,t))\,. \tag{2.92}$$

Entonces $\int_x^\infty c(\xi,t)d\xi$ *es solución de la ecuación de difusión fraccionaria.*

Demostración. $F(x,t) = \int_x^\infty c(\xi,t)d\xi$ está bien definida por hipótesis (2.89). Las hipótesis (2.90), (2.91) y (2.92) nos permiten deducir las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} D^\alpha F(x,t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\partial/\partial\tau F(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\int_x^\infty c(\xi,\tau)d\xi\right)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha}\int_x^\infty \frac{\partial}{\partial\tau}c(\xi,\tau)d\xi d\tau = \int_x^\infty \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\partial/\partial\tau c(\xi,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau \\ &= \int_x^\infty D^\alpha c(\xi,t)d\xi = \int_x^\infty \lambda^2\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(\xi,t)d\xi = -\lambda^2\left.\frac{\partial c}{\partial x}(\xi,t)\right|_\infty^x \\ &= -\lambda^2\frac{\partial c}{\partial x}(x,t) + \lambda^2\lim_{x\to\infty}\frac{\partial c}{\partial x}(x,t) = \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int_x^\infty c(\xi,t)d\xi\right) = \lambda^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t). \end{aligned}$$

∎

Veamos que (2.88) está bajo las hipótesis del Lema 4.

- Hipótesis (2.89).

  Utilizando la estimación (2.45) y el Corolario 7,

$$\begin{aligned} |c_5(x,t)| &\le \int_x^\infty M\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}d\tau d\xi \\ &= \int_x^\infty M\int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}\left(-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right)d\tau d\xi \\ &= M\int_x^\infty \mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda(t)^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)d\xi < \infty \end{aligned} .$$

- Hipótesis (2.90).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t \lim_{x\to\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\right]g(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t \lim_{x\to\infty}\left[-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)\frac{x}{\lambda^2(t-\tau)^{\alpha+1}}+\right.$$

$$\left.+\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{1}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\right]\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau.$$

Aplicando los Corolarios 5 y 6, resulta que
$\lim\limits_{x\to\infty}\left[-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)\frac{x}{\lambda^2(t-\tau)^{\alpha+1}}+\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{1}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\right]$
$=0.$

Luego,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau=0 \tag{2.93}$$

- Hipótesis (2.91).

  Aplicando derivación bajo el signo integral con el parámetro en un extremo de integración,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau\right|$$
$$=\left|\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\right]g(\tau)d\tau+\lim_{\tau\nearrow t}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\right|$$
$$\leq M\left|\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\right]d\tau+0\right|=$$
$$=M\left|\int_0^t\frac{\partial}{\partial \tau}\left[-\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\right]d\tau\right|=$$
$$=M\left|-\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}\Bigg|_0^t\right|=M\,\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}$$

  Luego, teniendo en cuenta el Lema 1 y que $t\in(0,T)$, resulta que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau\right|\leq M\,\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda T^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda T^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2},$$

  que es una función integrable en $(0,+\infty)$ respecto de la variable x debido a (2.43).

- Hipótesis (2.92).

  Para probar que

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\tau \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(\tau-\eta)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(\tau-\eta)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\eta)d\eta\frac{1}{(t-\tau)^\alpha}\in L^1((x,\infty)\times(0,t))$$

  se procede análogamente a lo hecho cuando verificamos la Hipótesis (2.38).

Estamos en condiciones entonces de afirmar que (2.88) es solución de la ecuación de difusión fraccionaria.

Verifiquemos las condiciones de borde:

- La condición inicial es

$$c_5(x,0) = \lim_{t\searrow 0} -\int_x^\infty \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau d\xi.$$

Vimos en la verificación de la Hipótesis (2.89) que

$$\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{\xi}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{\xi}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau \leq MW\left(-\frac{\xi}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)$$

que es una función integrable en $(0,\infty)$. Luego, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada y calcular el siguiente límite

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\searrow 0}\left|\int_x^\infty \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{\xi}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{\xi}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau d\xi\right| \\
&= \left|\int_x^\infty \lim_{t\searrow 0}\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{\xi}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{\xi}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau d\xi\right| \\
&\leq \int_x^\infty \left|\lim_{t\searrow 0} M\mathcal{W}\left(-\frac{\xi}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right| d\xi = 0
\end{aligned}$$

- Para la condición de Neumann procedemos como en (2.67) y obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}c_5(0,t) &= \lim_{x\searrow 0}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\int_x^\infty \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{\xi}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{\xi}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau d\xi\right) \\
&= \lim_{x\searrow 0}\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau = g(t).
\end{aligned}$$

Teorema 9. *Si f una función continua y acotada en $\mathbb{R}_0^+$ y g es una función continua en $[0,T)$ entonces*

$$\begin{aligned}
c(x,t) = \frac{1}{2\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\int_0^\infty &\left[\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x+\xi}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right) + \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{|x-\xi|}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] f(\xi) \\
&- \int_x^\infty \int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau d\xi
\end{aligned} \tag{2.94}$$

es una solución del problema

$$\begin{cases}
D^\alpha c(x,t) = \lambda^2\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t), & 0<x<\infty,\ 0<t<T,\ 0<\alpha<1, \\
c(x,0) = f(x), & 0<x<\infty, \\
\frac{\partial}{\partial x}c(0,t) = g(t), & 0<t<T.
\end{cases} \tag{2.95}$$

Teorema 10. *El límite cuando $\alpha \nearrow 1$ de la solución del problema*

$$\begin{cases} D^{\alpha}c_5(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < \infty,\ 0 < t < T,\ 0 < \alpha < 1, \\ c_5(x,0) = 0, & 0 < x < \infty, \\ \frac{\partial}{\partial x}c_5(0,t) = g(t), & 0 < t < T, \end{cases} \tag{2.96}$$

es la solución clásica del problema análogo asociado a la ecuación del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}w(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < \infty,\ 0 < t < T, \\ w(x,0) = 0, & 0 < x < \infty, \\ \frac{\partial}{\partial x}w(0,t) = g(t), & 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.97}$$

Demostración. Se puede ver en [7] que la solución del problema (2.97) está dada por

$$w(x,t) = -\int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} g(\tau)d\tau. \tag{2.98}$$

Llamemos c_5^{α} a la solución del problema (2.96) dada por el Teorema 9,

$$c_5^{\alpha}(x,t) = -\int_x^{\infty}\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau d\xi.$$

Calculemos el límite cuando $\alpha \nearrow 1$. Aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada, el Lema 2 y finalmente el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\nearrow 1} c_5^{\alpha}(x,t) &= \lim_{\alpha\nearrow 1}\left\{-\int_x^{\infty}\int_0^t \mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau d\xi.\right\} \\ &= -\int_x^{\infty}\int_0^t \lim_{\alpha\nearrow 1}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2}}\right)\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\alpha/2+1}}\frac{\alpha}{2}g(\tau)d\tau d\xi \\ &= -\int_x^{\infty}\int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi}}\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{3/2}}g(\tau)d\tau \\ &= -\int_0^t\int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi}}\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{3/2}}g(\tau)d\tau \\ &= -\int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}g(\tau)d\tau = w(x,t). \end{aligned}$$

■

2.3.4 Unicidad

Consideremos el problema de contorno

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & a < x < b,\ 0 < t < T,\ 0 < \alpha < 1 \\ u(x,0) = u_0(x) & a \le x \le b \\ u(a,t) = u_a(t), \quad u(b,t) = u_b(t), & t \in (0,T). \end{cases} \tag{2.99}$$

Definición 14. *Una solución de (2.99) es una función* $u = u(x,t)$ *definida en* $\overline{\Omega}_T = [a,b] \times [0,T]$ *que pertenece al espacio* $CW_T(a,b) = C(\overline{\Omega}_T) \cap W_t^1((0,T)) \cap C_x^2(a,b)$ *(donde* $W^1(a,b) = \{f \in \mathcal{C}^1(a,b) \,|\, f' \in L^1[a,b]\}$*), que satisface las condiciones en (2.99).*

Si el problema (2.99) posee una solución clásica, entonces u_0, u_a y u_b deben pertenecer a los espacios $C([a,b])$, $C(0,T)$ respectivamente.

Los siguientes resultados (Teorema 11, 12, 13 y Corolario 10) son una simple adaptación a nuestra notación de los resultados obtenidos por Y. Luchko en [34].

Teorema 11. *Sea* $f \in W_t^1(0,T) \cap C([0,T])$ *una función que asume su máximo en el intervalo* $[0,T]$ *en el punto* $t_0 \in (0,T]$*. Entonces*

$$(D^\alpha f)(t_0) \geq 0 \quad \forall \, \alpha \in (0,1).$$

Teorema 12. *Sea* $u \in CW_T(a,b)$ *una solución clásica de (2.99) . Entonces*

$$u(x,t) \leq 0 \, \forall \, (x,t) \in \overline{\Omega}_T \quad \text{o } u \text{ alcanza su máximo positivo sobre } \partial_p(\Omega_T),$$

donde $\partial_p(\Omega_T) := \{(x,0)/\, a \leq x \leq b\} \cup \{(a,t)/\, 0 < t \leq T\} \cup \{(b,t)/\, 0 < t \leq T\}$ *es la frontera parabólica de* Ω_T*. En otras palabras,*

$$u(x,t) \leq \max\{0, \max_{(x,t)\in\partial_p(\Omega_T)} u(x,t)\} \quad \forall \, (x,t) \in \overline{\Omega}_T.$$

Teorema 13. *Sea* $u \in CW_T(a,b)$ *una solución clásica de (2.99) . Entonces*

$$||u||_\infty \leq \max\{M_0, M_1\}$$

donde $M_0 := ||u_0||_\infty$ *y* $M_1 := \max\{||v_a||_\infty, ||v_b||_\infty\}$.

Corolario 10. *El problema (2.99) admite a lo sumo una solución clásica.*

Lema 5. *Si* u *y* v *son dos soluciones de dos problemas de contorno de tipo (2.99) donde las funciones dato en el borde verifican*

$$u_0(x) \leq v_0(x) \quad \forall x \in [a,b], \quad u_a(t) \leq v_a(t) \quad \forall \, t \in (0,T) \quad y \quad u_b(t) \leq v_b(t) \quad \forall \, t \in (0,T).$$

Entonces $u(x,t) \leq v(x,t) \; \forall \, (x,t) \in \overline{\Omega}_T$.

Demostración. Basta observar que $u - v$ es solución del problema

$$\begin{cases} D^\alpha w(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) & a < x < b,\, 0 < t < T,\, 0 < \alpha < 1 \\ w(x,0) = (u_0 - v_0)(x) & a \le x \le b \\ w(a,t) = (u_a - v_a)(t), \quad w(b,t) = (u_b - v_b)(t), & t \in (0,T) \end{cases}$$

donde las funciones dato son todas no positivas, luego $\max\limits_{(x,t)\in\partial\Omega_p} \{w(x,t)\} \le 0$, y aplicamos el Teorema 12. ■

Teorema 14. *El problema*

$$\begin{cases} D^\alpha u(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & -\infty < x < \infty,\, 0 < t < T,\, 0 < \alpha < 1, \\ u(x,0) = u_0(x), & -\infty < x < \infty, \\ u \text{ acotada}, & \end{cases} \tag{2.100}$$

admite a lo sumo una solución.

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones de (2.100), digamos u_1 y u_2. Siendo u acotada, existe un $M > 0$ tal que $|u(x,t)| \le M$.

Sea $v = u_1 - u_2$. Entonces v es solución del problema

$$\begin{cases} D^\alpha v(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t), & -\infty < x < \infty,\, 0 < t < T,\, 0 < \alpha < 1, \\ v(x,0) = 0, & -\infty < x < \infty, \\ |v(x,t)| \le 2M, & -\infty < x < \infty,\, 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.101}$$

Ahora bien, consideremos la función $w_A(x,t) = \dfrac{2M}{A^2}\left(\dfrac{2}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + x^2\right)$.

Teniendo en cuenta que $D^\alpha(t^\beta) = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}t^{\beta-\alpha}$ si $\beta > -1$, es fácil ver que w_A es solución de la ecuación de difusión fraccionaria.

Comparemos v y w_A en el rectángulo $R_A = \{(x,t) / -A \le x \le A, 0 \le t \le T\}$.

$$|v(x,0)| = 0 \le \frac{2M}{A^2}x^2 = w_A(x,0). \tag{2.102}$$

$$|v(A,t)| \le 2M. \tag{2.103}$$

$$w_A(A,t) = \frac{2M}{A^2}\left(\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + A^2\right) = 2M\left(\frac{2}{A^2\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + 1\right) > 2M. \tag{2.104}$$

Aplicando el Lema 5, resulta

$$|v(x,t)| \le w_A(x,t) \quad \forall\,(x,t) \in R_A. \tag{2.105}$$

Pero (2.105) es válido para todo $A > 0$. Fijando (x, t) y haciendo tender A a infinito tenemos que $|v(x, t)| = 0$, con lo que resulta que $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $0 < t < T$. ∎

Capítulo 3

El Problema de Stefan a Una Fase para la Ecuación de Difusión Fraccionaria

3.1 Introducción

Los problemas de frontera libre unidimensionales para la ecuación del calor son problemas relacionados a procesos de fusión y solidificación, que presentan una condición de calor latente en la interface que conecta la velocidad de la frontera libre y el flujo del calor de temperaturas en ambas fases.
Este tipo de problemas ha sido estudiado en profundidad en los últimos 50 años (ver [4, 7, 10, 13, 20, 28, 35, 45, 49, 52, 53]) y, la difusión como flujo de calor se expresa en término de un flujo de temperatura local e instantáneo.

Voller et al. [16] plantean, como hemos visto en la sección 2.1.2, que si consideramos un flujo no local formado por promedios con peso de gradientes de temperatura a través del tiempo, derivamos en sub o super difusión según la derivada fraccionaria en el tiempo sea considerada de orden menor o mayor que uno respectivamente, a la que llamaremos difusión anómala.

Es conocida la relación existente entre difusión y movimiento Browniano, donde el "time scaling" de este tipo de problemas en proporcional a $t^{1/2}$. ¿Qué pasa cuando este exponente es distinto de 1/2? Metzler & Klafter [38] han probado que la difusión anómala se puede modelar en término de derivadas fraccionarias, considerando procesos de caminos aleatorios no-Brownianos.

Existen ya muchos trabajos que nos brindan motivaciones físicas para estudiar este tipo de difusión. En [38] se presentan situaciones físicas donde se presenta difusión anómala en ciertos flujos en medios porosos y conducción en semiconductores amorfos.
En [21] se ha observado comportamiento anómalo en simulaciones de gas en vidrios de polímeros.

En la rama de la biología, se han planteado modelos de difusión anómala de morfogenes en [59], y se propone un modelo fraccionario en el tiempo para estudiar la influencia de la fisión celular en el transporte de células durante el desarrollo de un tumor en [24].

Respecto de la formulación de problemas de frontera libre frccionarios, se ha observado que el movimiento de la frontera de la humedad en la difusión horizontal en un ladrillo poroso puede ser tanto sub como super difusivo. Otros experimentos han mostrado que el crecimiento de la helada en una placa refrigerada puede ser superdifusiva ([50]).

3.2 El problema de Frontera Móvil para la EDF

Consideremos el siguiente problema de frontera móvil para la EDF.

$$\begin{cases} (i) & D^\alpha u(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & s_1(t) < x < s_2(t),\ 0 < t \leq T,\ 0 < \alpha < 1 \\ (ii) & u(s_1(t),t) = g(t) & 0 < t \leq T \\ (iii) & u(s_2(t),t) = h(t) & 0 < t \leq T \\ (iv) & u(x,0) = f(x) & a \leq x \leq b \end{cases} \tag{3.1}$$

donde:

(H1) La curva s_1 es una función Lipschitz continua superiormente en $[0,T]$, es decir que existe una constante $c > 0$ tal que $f(t_2) - f(t_1) \geq -c(t_2 - t_1)$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$.

(H2) La curva s_2 es una función Lipschitz continua inferiormente en $[0,T]$, es decir que existe una constante $c > 0$ tal que $f(t_2) - f(t_1) \leq -c(t_2 - t_1)$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$.

(H3) $s_1(0) = a$, $s_2(0) = b$, donde $a \leq b$, y la ecuación (iv) no se considera si $a = b$.

(H4) $s_1(t) < s_2(t)\, \forall t \in (0,T]$.

(H5) f es una función no negativa en $[a,b]$.

(H6) g y h son funciones no negativas en $[0,T]$.

Siguiendo la notación clásica asociada al operador diferencial parabólico, definimos las siguientes dos regiones:

$\Omega_T = \{(x,t)/s_1(t) < x < s_2(t),\, 0 < t \leq T\}$, y la frontera parabólica

$\partial_p\Omega_T = \{(s_1(t),t), 0 < t \leq T\} \cup \{(s_2(t),t), 0 < t \leq T\} \cup \{(x,0), a \leq x \leq b\}$.

Definición 15. *Diremos que una función $u = u(x,t)$ es solución del problema* (3.1) *si*

1. *u está definida en $[a_0, b_0] \times [0,T]$, donde $a_0 = \min\{s_1(t),\, t \in [0,T]\}$ y $b_0 = \max\{s_2(t),\, t \in [0,T]\}$.*

2. *$u \in CW_{\Omega_T} = \mathcal{C}(\Omega_T) \cap W_t^1((0,T)) \cap \mathcal{C}_x^2(\Omega_T)$, donde $W_t^1((0,T)) := \{f(x,\cdot) \in C^1((0,T))$ tal que $f_t(x,\cdot) \in L^1(0,T)$ para cada $x \in [a_0,b_0]\}$.*

3. *u es continua en $\Omega_T \cup \partial_p\Omega_T$, excepto quizás en los puntos $(a,0)$ y $(b,0)$, donde pediremos que*
$$0 \leq \liminf_{(x,t)\to(a,0)} u(x,t) \leq \limsup_{(x,t)\to(a,0)} u(x,t) < +\infty$$
y
$$0 \leq \liminf_{(x,t)\to(b,0)} u(x,t) \leq \limsup_{(x,t)\to(b,0)} u(x,t) < +\infty.$$

4. *u verifica las condiciones en* (3.1).

Observación 17. *Hemos pedido que u esté definida en $[a_0,b_0] \times [0,T]$debido a la naturaleza de la derivada fraccionaria de Caputo $D^\alpha u(x,t)$, que involucra los valores de $u_t(x,\tau)$ para todo τ en $[0,t]$. (ver Figura 1).*

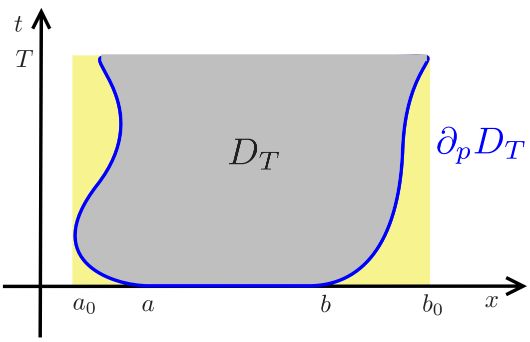


Figura 3.1: Área de definición de u.

Ejemplo 4. *Este tipo de problemas no ha sido estudiado en profundidad hasta ahora, pero teniendo en cuenta los resultados obtenidos en [43] y [44], es fácil ver que*
$$u(x,t) = B + \frac{C-B}{1-\mathcal{W}\left(-1,-\frac{\alpha}{2},1\right)}\left[1-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{t^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right],$$

donde $\mathcal{W}\left(\cdot\,,-\frac{\alpha}{2},1\right)$ *es la función de Wright de parámetros* $-\frac{\alpha}{2}$ *y* 1 *dada en la Definición 5, es una solución de*

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & 0 < x < t^{\alpha/2},\, 0 < t \leq T,\, 0 < \alpha < 1 \\ u(0,t) = B & 0 < t \leq T \\ u(t^{\alpha/2},t) = C & 0 < t \leq T. \end{cases} \tag{3.2}$$

De aquí en adelante consideraremos $\lambda = 1$ y llamaremos L^α al operador asociado a la EDF

$$L^\alpha := \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} - D^\alpha. \tag{3.3}$$

Proposición 15. *Si* u *es una función tal que* $L^\alpha[u] > 0$ *en* Ω_T*, entonces* u *no puede asumir su máximo en* Ω_T.

Demostración. Supongamos que existe un punto $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ (esto es $s_1(t_0) < x_0 < s_2(t_0)$, $0 < t_0 \leq T$), donde u asume su máximo. Debido al Principio de extremo para la derivada de Caputo (ver Teorema 11), tenemos que $D^\alpha u(x_0,t_0) \geq 0$. Por otro lado, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0$, ya que $u \in \mathcal{C}_x^2(\Omega_T)$. Luego $L^\alpha[u](x_0,t_0) \leq 0$, lo que es una contradicción. ∎

Corolario 11. *Si* u *es una función tal que* $L^\alpha[u] < 0$ *en* Ω_T*, entonces* u *no puede asumir su mínimo en* Ω_T.

Nota 3. *El siguiente teorema es una adaptación al problema de frontera móvil* (3.1) *del resultado obtenido en [33] para el problema de valores iniciales y de contorno asociado a la ecuación de difusión fraccionaria generalizada, y es una especie de Principio del Máximo débil con el que contamos para este tipo de operadores. El Principio del Máximo fuerte no tiene aún su versión "fraccionaria".*

Teorema 15. *Sea* $u \in CW_{\Omega_T}$ *una solución de (3.1). Luego*

$$u(x,t) \leq 0\,\forall\,(x,t) \in \overline{\Omega}_T \quad \text{o bien } u \text{ alcanza su máximo positivo en } \partial_p\Omega_T.$$

Demostración. Si $u \leq 0$ en $\overline{\Omega}_T$ está probado. Si no, supongamos que existe un (x_0,t_0), con $s_1(t_0) < x_0 < s_2(t_0)$ y $0 < t_0 \leq T$, tal que $u(x_0,t_0) > \max_{\partial_p\Omega_T} u(x,t) = M \geq 0$.
Sea $\epsilon = u(x_0,t_0) - M > 0$ y consideremos la función auxiliar

$$w(x,t) = u(x,t) + \frac{\epsilon}{2}\frac{T-t}{T}, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_T. \tag{3.4}$$

Observemos que

$$w(x,t) \leq u(x,t) + \frac{\epsilon}{2} \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega}_T, \tag{3.5}$$

y además, para cualquier $(x,t) \in \partial_p \Omega_T$, se tiene que

$w(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) + \frac{\epsilon}{2}\frac{T-t_0}{T} \geq u(x_0,t_0) = \epsilon + M \geq \epsilon + u(x,t) \geq \epsilon + w(x,t) - \dfrac{\epsilon}{2} = \dfrac{\epsilon}{2} + w(x,t).$

Por lo tanto

$$w(x,t) < w(x_0,t_0) \; \forall (x,t) \in \partial_p \Omega_T. \tag{3.6}$$

Luego, w asume su máximo en Ω_T.

Por otro lado, teniendo en cuenta que $D^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma 1+\beta-\alpha} t^{\beta-\alpha}$ y la linealidad del operador de Caputo, resulta que

$$L^\alpha[w] = L^\alpha[u] + \frac{\epsilon}{2}\frac{t^{1-\alpha}}{T} > 0 \quad \forall\,(x,t) \in \Omega_T.$$

Pero entonces, por Proposición 15, w no puede asumir su máximo en Ω_T, lo que es una contradicción. ■

Teorema 16. *Sea $u \in CW_{\Omega_T}$ una solución de* (3.1). *Luego,*

$$u(x,t) \geq 0 \,\forall\,(x,t) \in \overline{\Omega_T} \quad \text{o bien } u \text{ alcanza su mínimo negativo en } \partial_p \Omega_T.$$

Teorema 17. *El problema de frontera móvil* (3.1) *admite a lo sumo una solución.*

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones u_1 y u_2 del problema (3.1). Luego $u_2 - u_1$ es solución del siguiente problema

$$\begin{cases} (i) & {}_0D^\alpha u(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & s_1(t) < x < s_2(t),\, 0 < t \leq T,\, 0 < \alpha < 1 \\ (ii) & u(s_1(t),t) = 0 & 0 < t \leq T \\ (iii) & u(s_2(t),t) = 0 & 0 < t \leq T \\ (iv) & u(x,0) = 0 & a \leq x \leq b. \end{cases} \tag{3.7}$$

Aplicando los Teoremas 15 y 16, teniendo en cuenta que $\max_{\partial_p \Omega_T} u = \min_{\partial_p \Omega_T} u = 0$, resulta $u_2 - u_1 \equiv 0$.

■

Nota 4. *Eberhard Frederich Ferdinand Hopf (1902-1983) fue un destacado matemático austríaco que hizo contribuciones significativas en el campo de las ecuaciones diferenciales, topología y teoría ergódica. Uno de sus trabajos más destacados es la formulación del principio del máximo fuerte* *en ecuaciones diferenciales parciales para el operador elíptico ([22]).*

En su trabajo [23], prueba un teorema que involucra el signo de la derivada exterior de una función que es solución de una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico en una región determinada.

Este teorema fue probado más adelante para el operador parabólico por A. Friedman [17] y R. Viborni [54] separadamente.

Se puede encontrar una adaptación de este resultado en [7], quien lo denomina Lema de Hopf, y el próximo teorema pretende generalizar este resultado para el operador asociado a la ecuación de difusión fraccionaria

Teorema 18. *Sea $u \in CW_{\Omega_T}$ una solución del problema* (3.1) *que satisface las hipótesis* $(H1)-(H6)$.

1. *Si existen $t_0 > 0$ y $\delta > 0$ tales que*

$$u(s_2(t_0), t_0) = M = \sup_{\partial_p \Omega_T} u, \tag{3.8}$$

$$|s_1(t_0) - s_2(t_0)| \geq \delta \; y \;\; u(x, t_0) < M \, \forall x \in \, (s_2(t_0) - \delta, s_2(t_0)), \tag{3.9}$$

   entonces

$$\liminf_{x \nearrow s_2(t_0)} \frac{u(x, t_0) - u(s_2(t_0), t_0)}{x - s_2(t_0)} > 0. \tag{3.10}$$

   Si u_x existe en $(s_2(t_0), t_0)$, entonces

$$u_x(s_2(t_0), t_0) > 0. \tag{3.11}$$

2. *Si existen $t_0 > 0$ y $\delta > 0$ tales que*

$$u(s_2(t_0), t_0) = m = \inf_{\partial_p \Omega_T} u, \tag{3.12}$$

$$\text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } |s_1(t_0) - s_2(t_0)| \geq \delta \;\; y \; u(x, t_0) > m \, \forall x \in \, (s_2(t_0) - \delta, s_2(t_0)), \tag{3.13}$$

   entonces

$$\limsup_{x \nearrow s_2(t_0)} \frac{u(x, t_0) - u(s_2(t_0), t_0)}{x - s_2(t_0)} < 0. \tag{3.14}$$

   Si u_x existe en $(s_2(t_0), t_0)$, entonces

$$u_x(s_2(t_0), t_0) < 0. \tag{3.15}$$

Demostración. Vamos a probar el apartado 1. Para probar el apartado 2 se procede análogamente. Consideremos la función

$$w_\alpha(x,t) = \epsilon\left[1 - \exp\{-\mu(x - s_2(t_0))\}\frac{E_\alpha(\mu A t^\alpha)}{E_\alpha(\mu A t_0^\alpha)}\right] + M \tag{3.16}$$

donde A, μ y ϵ son constantes a determinar y E_α es la función de Mittag-Leffler dada en la definición 3

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha > 0. \tag{3.17}$$

Notemos que $w_\alpha = M$ sobre la curva

$$\exp\{-\mu(x - s_2(t_0))\}\frac{E_\alpha(\mu A t^\alpha)}{E_\alpha(\mu A t_0^\alpha)} = 1. \tag{3.18}$$

Observemos que la curva (3.18) es la gráfica de la función

$$f(t) = \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{E_\alpha(\mu A t^\alpha)}{E_\alpha(\mu A t_0^\alpha)}\right) + s_2(t_0), \quad t \in (0, t_0] \tag{3.19}$$

Claramente $f(t_0) = s_2(t_0)$ y es fácil ver que

$$f \text{ es creciente si } \mu > 0. \tag{3.20}$$

Nuestro próximo objetivo es probar que existe $t_1 < t_0$ tal que $f(t) < s_2(t)$ $\forall t \in (t_1, t_0)$.

Por $(H2)$, s_2 es una función Lipschitz continua inferiormente, luego, existe una constante $L > 0$ tal que

$$s_2(t) \geq L(t - t_0) + s_2(t_0) \quad \forall\ 0 \leq t \leq t_0. \tag{3.21}$$

Teniendo en cuenta que la serie $E_\alpha(\mu A t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu A t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$ converge uniformemente sobre conjuntos compactos y que $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ $\forall\, z \in \mathbb{C}$, resulta que

$$[E_\alpha(\mu A t^\alpha)]' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu A)^k \alpha k t^{\alpha k - 1}}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu A)^{k+1} t^{\alpha k + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} = \mu A t^{\alpha - 1} E_{\alpha,\alpha}(\mu A t^\alpha),$$

donde $E_{\alpha,\alpha}$ es la función generalizada de Mittag–Leffler de parámetros $\rho = \beta = \alpha$ dada en la definición 4. Luego,

$$f'(t) = \frac{1}{\mu}\frac{1}{E_\alpha(\mu A t^\alpha)}\frac{\mu A}{t^{1-\alpha}}E_{\alpha,\alpha}(\mu A t^\alpha) = \frac{A}{t^{1-\alpha}}\frac{E_{\alpha,\alpha}(\mu A t^\alpha)}{E_\alpha(\mu A t^\alpha)}. \tag{3.22}$$

Definamos ahora la siguiente función

$$H : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \,/\, H(t) = \frac{E_{\alpha,\alpha}(\mu A t^\alpha)}{E_\alpha(\mu A t^\alpha)}.$$

H es una función positiva y es cociente de funciones continuas donde el denominador es mayor que 1 en $[0,\infty)$, luego H es continua en $[0,\infty)$.
$H(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} > 0$ ya que $0 < \alpha < 1$.
$H(+\infty) = C > 0$ debido a que es cociente de funciones continuas de igual orden en ∞ (ver [19]).
Luego, podemos asegurar que existe $m_0 > 0$ tal que

$$H(t) \geq m_0 \quad \forall\, t \geq 0, \forall\, A, \mu > 0. \tag{3.23}$$

De (3.22) y (3.23), resulta que

$$f'(t_0) \geq \frac{A}{t_0^{1-\alpha}} m_0. \tag{3.24}$$

Eligiendo $A > 0$ de manera que $\frac{A}{t_0^{1-\alpha}} m_0 > L$ podemos afirmar que

$$f'(t_0) > L. \tag{3.25}$$

Finalmente, sea $\rho > 0 \;/\; f'(t_0) - \rho > L$. Dado que f es derivable en t_0 podemos asegurar que existe un $t_1 < t_0$ tal que $\forall\, t \in (t_1, t_0)$,

$$L < f'(t_0) - \rho < \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \Rightarrow f(t) < L(t - t_0) + f(t_0) = L(t - t_0) + s_2(t_0) \leq s_2(t)$$

Observemos que, de (3.9) y (3.20), podemos elegir t_1 de manera que $s_1(t) < f(t) < s_2(t)$ $\forall t \in (t_1, t_0)$.

Ahora bien, sea $A(x_1, t_0)$ (donde $x_1 = f(t_1)$), $B(s_2(t_0), t_0)$ y $C(x_1, t_1)$. Por hipótesis (3.9), podemos reelegir t_1 de manera que $x_1 \in (s_2(t_0) - \delta, s_2(t_0))$ y $u < M$ en $\overline{AC}$.
Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y la porción de gráfica de f desde B a C, a la que llamaremos $\widehat{CB}$.(Ver Figura 2)

Vamos a considerar la región $\mathcal{R}_{t_0} = \mathcal{R}^\circ \cup (\overline{AB} - \{A, B\})$ y su frontera parabólica $\partial_p \mathcal{R} = \overline{AC} \cup \widehat{CB}$.

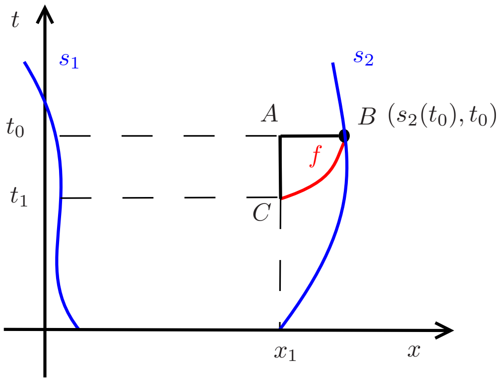


Figura 3.2: $\mathcal{R}$.

A continuación, analizaremos el comportamiento de u y w_α en la frontera parabólica $\partial_p\mathcal{R}$.

Sea $M_0 = \underset{t_1 \le t \le t_0}{max}\, u(x_1, t)$. Dado que u es continua, la hipótesis (3.9) y reestableciendo t_1 si fuera necesario, podemos afirmar que $M_0 < M$. Llamando $\eta = M - M_0$, resulta que

$$u \le M - \eta \quad \text{en } \overline{AC} \tag{3.26}$$

y

$$u \le M \quad \text{en } \widehat{CB}. \tag{3.27}$$

Por otro lado,

$$w_\alpha = M \quad \text{en } \widehat{CB}. \tag{3.28}$$

En $\overline{AC}$, teniendo en cuenta que $E_\alpha(\mu A t^\alpha)$ es una función creciente, tenemos que,

$$w_\alpha(x_1, t) = \epsilon \left[1 - \exp\{-\mu(x_1 - s_2(t_0))\} \frac{E_\alpha(\mu A t^\alpha)}{E_\alpha(\mu A t_0^\alpha)}\right] + M \ge \epsilon\,[1 - \exp\{-\mu(x_1 - s_2(t_0))\}] + M. \tag{3.29}$$

Tomando $\epsilon = \dfrac{\eta}{exp\{-\mu(x_1 - s_2(t_0))\} - 1}$, resulta que

$$w_\alpha(x_1, t) \ge -\eta + M. \tag{3.30}$$

Vimos en la Proposición 12 que

$$D^\alpha(E_\alpha(\mu A t^\alpha)) = \mu A E_\alpha(\mu A t^\alpha). \tag{3.31}$$

Aplicando ahora el operador L^α a la función w_α y teniendo en cuenta (3.31) resulta que

$$L^\alpha[w_\alpha](x, t) = \epsilon \exp\{-\mu(x - s_2(t_0))\} \frac{E_\alpha(\mu A t^\alpha)}{E_\alpha(\mu A t_0^\alpha)}(\mu A - \mu^2) < 0 \quad \text{si } \mu = A + 1. \tag{3.32}$$

Finalmente, definimos la función $z = w_\alpha - u$ en $\mathcal{R}$. Analicemos el comportamiento de z en la frontera parabólica $\partial_p\mathcal{R}$.

De (3.26) y (3.30), $z \geq 0$ en $\overline{AC}$. De (3.27) y (3.28), $z \geq 0$ en $\widehat{CB}$. Además, $L^\alpha[z] = L^\alpha[w_\alpha] - L^\alpha[u] < 0$ en $\mathcal{R}_{t_0}$.
Aplicando el Corolario 11, podemos afirmar que z no puede asumir su mínimo en $\mathcal{R}_{t_0}$. Luego $z \geq 0 \quad$ en $\mathcal{R}$. En particular,

$$z(x,t_0) = w_\alpha(x,t_0) - u(x,t_0) \geq 0, \quad \forall\, x_1 \leq x \leq s_2(t_0). \tag{3.33}$$

Recordando que $u(s_2(t_0),t_0) = w_\alpha(s_2(t_0,t_0)) = M$, la siguiente expresión es equivalente a (3.33):

$$\frac{u(x,t_0) - u(s_2(t_0),t_0)}{x - s_2(t_0)} \geq \frac{w_\alpha(x,t_0) - w_\alpha(s_2(t_0,t_0))}{x - s_2(t_0)}. \tag{3.34}$$

Luego

$$\liminf_{x \nearrow s_2(t_0)} \frac{u(x,t_0) - u(s_2(t_0),t_0)}{x - s_2(t_0)} \geq \liminf_{x \nearrow s_2(t_0)} \frac{w_\alpha(x,t_0) - w_\alpha(s_2(t_0,t_0))}{x - s_2(t_0)}.$$

Pero w_α es derivable en el punto $(s(t_0),t_0)$, luego

$$\liminf_{x \nearrow s_2(t_0)} \frac{w_\alpha(x,t_0) - w_\alpha(s_2(t_0,t_0))}{x - s_2(t_0)} = w_{\alpha x}(s_2(t_0),t_0) = \epsilon\mu = \epsilon(A+1) > 0$$

y vale (3.10).

Finalmente, si u_x existe en $(s_2(t_0),t_0)$, de (3.34) se deduce que

$$u_x(s_2(t_0),t_0) \geq w_{\alpha x}(s_2(t_0),t_0) > 0 \tag{3.35}$$

y por lo tanto vale (3.11).

■

El mismo resultado es válido si consideramos s_1 en vez de s_2.

Teorema 19. *Sea $u \in CW_{\Omega_T}$ una solución del problema* (3.1) *que satisface las hipótesis* $(H1) - (H6)$.

1. *Si existen $t_0 > 0$ y $\delta > 0$ tales que*

$$u(s_1(t_0),t_0) = M = \sup_{\partial_p\Omega_T} u, \tag{3.36}$$

$$|s_1(t_0) - s_2(t_0)| \geq \delta \ y \ u(x, t_0) < M \, \forall x \in (s_1(t_0), s_1(t_0) + \delta), \tag{3.37}$$

entonces

$$\limsup_{x \nearrow s_1(t_0)} \frac{u(x, t_0) - u(s_1(t_0), t_0)}{x - s_1(t_0)} < 0. \tag{3.38}$$

Si u_x existe en el punto $(s_1(t_0), t_0)$, entonces

$$u_x(s_1(t_0), t_0) < 0. \tag{3.39}$$

2. *Si existen $t_0 > 0$ y $\delta > 0$ tales que*

$$u(s_1(t_0), t_0) = m = \inf_{\partial_p \Omega_T} u, \tag{3.40}$$

$$|s_1(t_0) - s_2(t_0)| \geq \delta \, y \, u(x, t_0) > m \, \forall x \in (s_1(t_0), s_1(t_0) + \delta), \tag{3.41}$$

entonces

$$\liminf_{x \nearrow s_1(t_0)} \frac{u(x, t_0) - u(s_1(t_0), t_0)}{x - s_1(t_0)} > 0. \tag{3.42}$$

Si u_x existe en el punto $(s_1(t_0), t_0)$, entonces

$$u_x(s_1(t_0), t_0) > 0. \tag{3.43}$$

3.3 El problema de Stefan para la EDF. Dependencia monótona de los datos

Consideraremos a continuación un problema de Stefan fraccionario, esto es, un problema de frontera libre para la EDF, donde la condición tradicional de Stefan que conecta la velocidad de la frontera libre con el flujo de temperatura, será reemplazada por lo que llamaremos "condición fraccionaria de Stefan"

$$D^\alpha s(t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(s(t), t), \; 0 < t < T. \tag{3.44}$$

$$\begin{cases} (i) & D^\alpha u(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < s(t), \, 0 < t < T, \, 0 < \alpha < 1, \;\; \lambda > 0, \\ (ii) & u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq b = s(0), \\ (iii) & u(0, t) = g(t), & 0 < t \leq T, \\ (iv) & u(s(t), t) = C, & 0 < t \leq T, \, C \geq 0, \\ (v) & D^\alpha s(t) = -k \dfrac{\partial u}{\partial x}(s(t), t), & 0 < t \leq T, \quad k > 0 \text{ cte}, \end{cases} \tag{3.45}$$

donde las funciones f y g son funciones no negativas tales que $f \geq C$ y $g \geq C$.

Definición 16. *El par* $\{u, s\}$ *es una solución del problema* (3.45) *si*

1. *s es una función continua en* $[0, T]$ *tal que* $s \in W^1(0, T)$, $s(0) = b$ *y* $s(t) > 0$ *para todo* $t \in (0, T)$.

2. *u está definida en* $[0, b_0] \times [0, T]$ *donde* $b_0 = \max\{s(t), 0 \le t \le T\}$,

3. $u \in CW_{\Omega_T} = \mathcal{C}(\Omega_T) \cap W^1((0, T)) \cap \mathcal{C}_x^2(D_T)$.

4. *u es continua en* $\Omega_T \cup \partial_p \Omega_T$, *excepto quizás en los puntos* $(0, 0)$ *y* $(b, 0)$, *donde pediremos que*

$$0 \le \liminf_{(x,t)\to(0,0)} u(x, t) \le \limsup_{(x,t)\to(0,0)} u(x, t) < +\infty,$$
$$0 \le \liminf_{(x,t)\to(b,0)} u(x, t) \le \limsup_{(x,t)\to(b,0)} u(x, t) < +\infty.$$

5. *Existe* $\dfrac{\partial u}{\partial x}(s(t), t)$ *para todo* $t \in (0, T]$.

6. *u y s satisfacen* (3.45).

Proposición 16. *Sea* $f \in \mathcal{C}^1[0, T]$ *una función que asume su máximo en el punto* $t_0 \in (0, T]$. *Entonces vale la siguiente desigualdad*

$$D^\alpha f(t_0) \ge \frac{t_0^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} f(t_0) \tag{3.46}$$

Demostración. Ver Teorema 2.1 [3].

Teorema 20. *Sean* $\{u_1, s_1\}$ *y* $\{u_2, s_2\}$ *dos soluciones del problema de Stefan fraccionario* (3.45) *correspondientes a los datos* $\{b_1, f_1, g_1\}$ *y* $\{b_2, f_2, g_2\}$, *respectivamente. Supongamos que* $b_1 < b_2$, $0 \le f_1 \le f_2$ *y* $0 \le g_1 \le g_2$. *Entonces* $s_1(t) < s_2(t) \quad \forall\, t \in [0, T)$.

Demostración. Las funciones s_1 y s_2 son continuas en $s_1(0) = b_1 < b_2 = s_2(0)$. Consideremos el conjunto acotado $A = \{t \in [0, T] / \, (s_1 - s_2)(t) = 0\}$. Si $A = \emptyset$, el teorema está probado. Si $A \ne \emptyset$, existe $t_0 = \inf A$. Siendo las funciones s_1 y s_2 continuas, resulta que $t_0 \in A$, $s_1(t_0) = s_2(t_0)$, y podemos decir que t_0 es el primer t para el cual $s_1(t_0) = s_2(t_0)$.
Sea $h : [0, t_0] \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(t) = (s_1 - s_2)(t)$. Observemos que h tiene las siguientes propiedades:

(h-1) $h \in C^1(0, t_0] \cap C[0, t_0]$ (por Definición 16).

(h-2) $h(0) = b_1 - b_2 < 0$.

(h-3) $\quad$ h es una función no positiva y $h(t_0) = 0$.

De (h-1), (h-2) y (h-3), h alcanza su máximo en el punto t_0.

Aplicando la proposición 16, resulta que

$$D^\alpha h(t_0) \geq \frac{h(t_0) - h(0)}{t_0^\alpha \Gamma(1-\alpha)}. \tag{3.47}$$

Luego,

$$D^\alpha h(t_0) \geq \frac{b_2 - b_1}{t_0^\alpha \Gamma(1-\alpha)} > 0. \tag{3.48}$$

Teniendo en cuenta la Proposición 11 y que s_1 y s_2 satisfacen la condición de Stefan (3.45)-(v), (3.48) implica que

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(s_2(t_0), t_0) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(s_1(t_0), t_0) > 0. \tag{3.49}$$

Por otro lado, la función $w(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$ es una solución del siguiente problema de frontera móvil

$$\begin{cases} D^\alpha w(x,t) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} w(x,t) & 0 < x < s_1(t),\, 0 < t \leq t_0,\, 0 < \alpha < 1, \\ w(0,t) = (g_2 - g_1)(t) \geq 0 & 0 < t \leq t_0 \\ w(s_1(t), t) = u_2(s_1(t), t) & 0 < t \leq t_0 \\ w(x, 0) = (f_2 - f_1)(x) \geq 0 & 0 \leq x \leq b_1 = s_1(0) \end{cases} \tag{3.50}$$

Aplicando el Teorema 16 a u_2 en la región $\overline{\Omega^2}_{t_0}$ donde $\Omega^2_{t_0} = \{(x,t)\,/\, 0 < t \leq t_0,\, 0 < x < s_2(t)\}$, resulta que $u_2(s_1(t), t) \geq 0$.

Ahora, aplicando de nuevo el Teorema 16 a w el problema (3.50), resulta que $w \geq 0$ en $\overline{\Omega^1}_{t_0}$, donde $\Omega^1_{t_0} = \{(x,t)\,/\, 0 < t \leq t_0,\, 0 < x < s_1(t)\}$.

Podemos afirmar entonces que w alcanza su mínimo en el punto $(s_1(t_0), t_0)$.

Ahora bien, si existe $\epsilon > 0$ tal que $w(x, t_0) > 0$ para todo $x \in (s_1(t_0) - \epsilon, s_1(t_0))$, podemos aplicar el Teorema 18-2 y concluir que $\dfrac{\partial w}{\partial x}(s_1(t_0), 0) < 0$. Luego

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(s_2(t_0), t_0) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(s_1(t_0), t_0) < 0, \tag{3.51}$$

lo que contradice (3.50).

Si, por el contrario, existe una sucesión $\{\epsilon_n\}$ tal que $\epsilon_n \to 0$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in (s_1(t_0) - \epsilon_n, s_1(t_0))$ tal que $w(x_n, t_0) = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w(x_n, t_0) - w(s_1(t_0), t_0)}{\epsilon_n} = 0$$

y debido a la existencia de $\frac{\partial w}{\partial x}(s_1(t_0), t_0)$ (por Definición 16 - 6), resulta que $\frac{\partial w}{\partial x}(s_1(t_0), t_0) = 0$. Luego

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(s_2(t_0), t_0) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(s_1(t_0), t_0) = 0, \tag{3.52}$$

lo que contradice (3.50) nuevamente.

Esta contradicción proviene de suponer que existe un $t_0 > 0$ tal que t_0 es el primer t para el cual $s_1(t_0) = s_2(t_0)$. Luego $s_1(t) < s_2(t) \forall\, t \in [0, T)$. ■

Proposición 17. *Si* $\{u, s\}$ *es una solución del problema de Stefan fraccionario* (3.45) *, entonces este par verifica las siguiente ecuaciones:*

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \lambda^2\, {}^{RL}D_t^{1-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x} u(x,t). \tag{3.53}$$

$$\frac{d}{dt} s(t) = -k^{RL} D_t^{1-\alpha} u_x(s(t), t). \tag{3.54}$$

Demostración. Sea $\{u, s\}$ una solución del problema de Stefan fraccionario (3.45). Luego

$$D^\alpha u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t). \tag{3.55}$$

Por definición de derivada fraccionaria de Caputo, (3.55) equivale a

$${}_0I^{1-\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \right) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

A continuación aplicamos el operador derivada fraccionaria de Riemann–Liouville de orden $1-\alpha$ a ambos miembros,

$${}^{RL}D_t^{1-\alpha}\, {}_0I^{1-\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \right) = \lambda^2\, {}^{RL}D_t^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

Por Propiedad 7, ${}^{RL}D_t^{1-\alpha}$ es inverso a izquierda de ${}_0I^{1-\alpha}$, luego

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \lambda^2\, {}^{RL}D_t^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

De manera análoga obtenemos la ecuación (3.54).

■

Observación 18. *No es válido que la condición (3.54) implique la condición fraccionaria de Stefan (3.44), ya que la integral fraccionaria $I^{1-\alpha}$ no es el operador inverso a izquierda del operador derivada fraccionaria de Riemann–Liouville ${}^{RL}D^{1-\alpha}$. Más aún, si aplicamos la Proposición 8, resulta que*

$$I^{1-\alpha}\left({}^{RL}D_t^{1-\alpha}u_x(s(t),t)\right) = u_x(s(t),t) - \frac{I^{\alpha}u_x(s(0^+),0^+)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}}.$$

Luego, podemos afirmar que las condiciones (3.44) *y* (3.54) *son equivalentes si*

$$u_x(s(0^+),0^+) = 0$$

.

Proposición 18. *Si* $\{u,s\}$ *es una solución del problema* (3.45)*, entonces el par también verifica la siguiente condición integral sobre la frontera*

$$s^2(t) = \frac{b^2}{1+C} + \frac{2}{1+C}\int_0^t {}^{RL}D_t^{1-\alpha}g(\tau)d\tau + \frac{2}{1+C}\int_0^b \xi f(\xi)d\xi - \frac{2}{1+C}\int_0^{s(t)} \xi u(\xi,t)d\xi - \frac{2C}{(1+C)\Gamma(\alpha)}t^{\alpha}. \tag{3.56}$$

Demostración. Recordemos la identidad de Green:

$$\int_{\partial\Omega} Pdt + Qdx = \iint_{\Omega} Q_t - P_x \, dA,$$

donde Ω es una región abierta simplemente conexa, su frontera $\partial\Omega$ es una curva de Jordan suave a trozos y el campo $F = (P,Q)$ es $\mathcal{C}^1$ en un abierto que contiene a Ω.

Con el objetivo de utilizar esta identidad para obtener nuestra expresión integral para la frontera libre, definimos las siguientes funciones

$$P(x,t) = -x\, {}^{RL}D_t^{1-\alpha}u_x(x,t) + {}^{RL}D_t^{1-\alpha}u(x,t) \tag{3.57}$$

$$Q(x,t) = -x\, u(x,t) \tag{3.58}$$

Siendo $\{u,s\}$ una solución del problema (3.45), (por Definición 16, $u \in CW_{D_T} = \mathcal{C}(\Omega_T) \cap W^1((0,T)) \cap \mathcal{C}_x^2(\Omega_T))$, resulta que u y u_x son funciones $\mathcal{C}^1$ en Ω_T°. Por otro lado, recordando que ${}^{RL}D_t^{1-\alpha}u_x(x,t)$ se puede expresar como la siguiente convolución,

$$\frac{\partial}{\partial t}I_t^{1-\alpha}(u_x(x,t)) = \frac{\partial}{\partial t}\chi(t) * u(x,t)$$

donde

$$\chi(\tau) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } 0 < \tau < t \\ 0 & \text{si no} \end{cases},$$

y siendo χ una función L^1_{loc}, resulta que la convolución hereda las propiedades de u, y con esto podemos asegurar que el campo $F = (P, Q)$ cuenta con la regularidad necesaria en Ω°_T.
Observemos que debido a que u puede presentar singularidades de salto finito en los puntos $(0,0)$ y $(b,0)$ de la frontera parabólica $\partial_p\Omega$, vamos a considerar la región

$$\Omega_\epsilon = \left\{(x,\tau) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \epsilon < \tau < t, 0 < x < s(\tau)\right\},$$

en donde será lícito aplicar la identidad de Green.
Podemos asegurar entonces que

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} Pdt + Qdx =$$

$$\iint_{\Omega_\epsilon} \left[-xu_t(x,t) + {}^{RL}D^{1-\alpha}_t u_x(x,t) + x\frac{\partial}{\partial x}\left({}^{RL}D^{1-\alpha}_t u_x(x,t)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left({}^{RL}D^{1-\alpha}_t u(x,t)\right)\right] dt\, dx.$$

Con un argumento análogo al utilizado antes en el que expresamos la derivada fraccionaria como una convolución, se prueba que podemos intercambiar derivada $\partial/\partial x$ con ${}^{RL}D^{1-\alpha}_t$. Luego, aplicado la Proposición 17 resulta que

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} Pdt + Qdx = \iint_{\Omega_\epsilon} \left[-xu_t(x,t) + {}^{RL}D^{1-\alpha}_t u_x(x,t) + x\,{}^{RL}D^{1-\alpha}_t u_{xx}(x,t) - {}^{RL}D^{1-\alpha}_t u_x(x,t)\right] dt\, dx$$

$$= \iint_{\Omega_\epsilon} x\left[{}^{RL}D^{1-\alpha}_t u_{xx}(x,t) - u_t(x,t)\right] dt\, dx = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \left[-x\,{}^{RL}D^{1-\alpha}_t u_x(x,t) + {}^{RL}D^{1-\alpha}_t u(x,t)\right] dt - x\,u(x,t)dx = 0. \tag{3.59}$$

Separemos el contorno $\partial\Omega_\epsilon$ en $\partial\Omega_\epsilon = \partial\Omega_{\epsilon 1} \cup \partial\Omega_{\epsilon 2} \cup \partial\Omega_{\epsilon 3} \cup \partial\Omega_{\epsilon 4}$ como se ve en la figura 3.

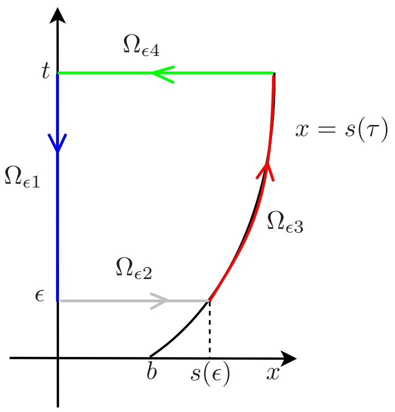


Figura 3.3: Contorno Ω_ϵ

Parametrizamos $\partial\Omega_{\epsilon 1}$: $-\partial\Omega_{\epsilon 1} = \{(0,\tau),\, \epsilon \leq \tau \leq t\}$. Luego $dx = 0$, $dt = d\tau$ y

$$\int_{\partial\Omega_{\epsilon 1}} Pdt + Qdx = -\int_{\epsilon}^{t} {}^{RL}D_t^{1-\alpha}u(0,\tau)d\tau = -\int_{\epsilon}^{t} {}^{RL}D_t^{1-\alpha}g(\tau)d\tau. \tag{3.60}$$

Parametrizamos $\partial\Omega_{\epsilon 2}$: $-\partial\Omega_{\epsilon 2} = \{(\xi,\epsilon),\, 0 \leq \xi \leq s(\epsilon)\}$. Luego $dx = d\xi$, $dt = 0$ y

$$\int_{\partial\Omega_{\epsilon 2}} Pdt + Qdx = \int_{0}^{s(\epsilon)} -\xi u(\xi,\epsilon)d\xi. \tag{3.61}$$

Parametrizamos $\partial\Omega_{\epsilon 3}$: $\partial\Omega_{\epsilon 3} = \{(s(\tau),\tau),\, \epsilon \leq \tau \leq t\}$, $dx = s'(\tau)d\tau$, $dt = d\tau$ y teniendo en cuenta que u es solución del problema (3.45), podemos aplicar la Proposición 17 y

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_{\epsilon 3}} Pdt + Qdx &= \int_{\epsilon}^{t} \left[-s(\tau)\, {}^{RL}D_t^{1-\alpha}u_x(s(\tau),\tau) + {}^{RL}D_t^{1-\alpha}u(s(\tau),\tau) - s(\tau)s'(\tau)\right] d\tau \\
&= \int_{\epsilon}^{t} \left[-s(\tau)s'(\tau) + {}^{RL}D_t^{1-\alpha}C - s(\tau)s'(\tau)C\right] d\tau \\
&= \int_{\epsilon}^{t} -(1+C)s(\tau)s'(\tau) + \frac{C}{\Gamma(\alpha)\tau^{1-\alpha}}d\tau \\
&= -(1+C)\left[\frac{s^2(t)}{2} - \frac{s^2(\epsilon)}{2}\right] + \frac{C}{\Gamma(\alpha)}\left[t^\alpha - \epsilon^\alpha\right].
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Parametrizamos $\partial\Omega_{\epsilon 4}$: $-\partial\Omega_{\epsilon 4} = \{(\xi,t),\, 0 \leq \xi \leq s(t)\}$. Luego $dx = d\xi$, $dt = 0$ y

$$\int_{\partial\Omega_{\epsilon 4}} Pdt + Qdx = \int_{0}^{s(t)} \xi u(\xi,t)d\xi. \tag{3.63}$$

De (3.59), (3.60), (3.61), (3.62) y (3.63), resulta que

$$-\int_{\epsilon}^{t} {}^{RL}D_t^{1-\alpha}g(\tau)d\tau - \int_{0}^{s(\epsilon)} \xi u(\xi,\epsilon)d\xi - (1+C)\left[\frac{s^2(t)}{2} - \frac{s^2(\epsilon)}{2}\right] + \frac{C}{\Gamma(\alpha)}\left[t^\alpha - \epsilon^\alpha\right] + \int_{0}^{s(t)} \xi u(\xi,t)d\xi = 0. \tag{3.64}$$

Tomando límite cuando $\epsilon \searrow 0$ y teniendo en cuenta que $s(0) = b$ y que $u(\xi,0) = f(\xi)$,

$$-\int_{0}^{t} {}^{RL}D_t^{1-\alpha}g(\tau)d\tau - \int_{0}^{b} \xi f(\xi)d\xi - (1+C)\left[\frac{s^2(t)}{2} - \frac{b}{2}\right] + \frac{C}{\Gamma(\alpha)}t^\alpha + \int_{0}^{s(t)} \xi u(\xi,t)d\xi = 0. \tag{3.65}$$

Despejando $s^2(t)$ se obtiene la tesis.

■

Nota 5. *Supongamos que conocemos la frontera s. Consideremos el siguiente problema de frontera móvil*

$$\begin{cases} (i) & D^\alpha u(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < s(t),\, 0 < t \leq T,\, 0 < \alpha < 1, \\ (ii) & u(0,t) = g(t), & 0 < t \leq T, \\ (iii) & u(s(t),t) = C, & 0 < t \leq T, \\ (iv) & u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq b = s(0), \end{cases} \tag{3.66}$$

donde $C \leq g(t)$ y $C \leq f(t)$ para todo $t \in (0,T]$.

Sea u es la solución de (3.66) y consideremos la función $z(x,t) = u(x,t) - C$. Debido a la linealidad de la derivada de Caputo y el hecho de que la derivada de Caputo de las constantes es cero, resulta que z es solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} (i) & D^\alpha z(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < s(t),\, 0 < t \leq T,\, 0 < \alpha < 1, \\ (ii) & z(0,t) = g(t) - C \geq 0, & 0 < t \leq T, \\ (iii) & z(s(t),t) = 0, & 0 < t \leq T, \\ (iv) & z(x,0) = f(x) - C \geq 0, & 0 \leq x \leq b = s(0). \end{cases} \tag{3.67}$$

Aplicando el Teorema 15 resulta que $z \geq 0$ en Ω_T, luego $u \geq C$ en Ω_T.

Teorema 21. *(Monotonía) Sean $\{u_1, s_1\}$ y $\{u_2, s_2\}$ dos soluciones del problema de Stefan fraccionario* (3.45) *correspondientes a los datos $\{b_1, f_1, g_1\}$ y $\{b_2, f_2, g_2\}$, respectivamente. Supongamos que $b_1 \leq b_2$, $0 \leq f_1 \leq f_2$ y $0 \leq g_1 \leq g_2$. Entonces $s_1(t) \leq s_2(t) \,\forall\, t \in [0,T)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $C = 0$. Sea $\delta > 0$ y sea $\{u_2^\delta, s_2^\delta\}$ una solución del problema (3.45) correspondiente a los datos $\{b_2 + \delta, f_2, g_2\}$.

Aplicando el Teorema 20 a las soluciones $\{u_1, s_1\}$ y $\{u_2^\delta, s_2^\delta\}$, y, $\{u_2, s_2\}$ y $\{u_2^\delta, s_2^\delta\}$ obtenemos que

$$s_1(t) < s_2^\delta(t), \quad 0 < t \leq T \tag{3.68}$$

y

$$s_2(t) < s_2^\delta(t), \quad 0 < t \leq T. \tag{3.69}$$

Ahora bien, aplicando la Proposición 3.56 a las fronteras s_2 y s_2^δ y restando miembro a miembro,

$$s_2^\delta(t)^2 - s_2(t)^2 = (b_2 + \delta)^2 - 2\int_0^{s_2^\delta(t)} \xi u_2^\delta(\xi,t)d\xi - b_2^2 + 2\int_0^{s_2(t)} \xi u_2(\xi,t)d\xi. \tag{3.70}$$

De (3.69) y (3.70) resulta que

$$s_2^\delta(t)^2 - s_2(t)^2 = (b_2+\delta)^2 - b_2^2 - 2\int_0^{s_2(t)} \xi \left[u_2^\delta(\xi,t) - u_2(\xi,t)\right] d\xi - 2\int_{s_2(t)}^{s_2^\delta(t)} \xi u_2^\delta(\xi,t) d\xi. \quad (3.71)$$

Observemos que u_2^δ es solución del siguiente problema de frontera móvil

$$\begin{cases} (i) & {}_0D^\alpha w(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t), & 0(t) < x < s_2(t),\, 0 < t \leq T, \\ (ii) & w(0,t) = g_2(t) \geq 0, & 0 < t \leq T, \\ (iii) & w(s_2^\delta(t),t) = 0, & 0 < t \leq T, \\ (iv) & w(x,0) = f_2(x) \geq 0, & a \leq x \leq b. \end{cases} \quad (3.72)$$

Luego, por Teorema 16, podremos asegurar que

$$u_2^\delta(x,t) \geq 0 \quad \text{en} \quad \overline{\Omega}_T = \left\{(x,t)\, /0 \leq x \leq s_2^\delta(t),\, 0 \leq t \leq T\right\} \quad (3.73)$$

En particular,

$$u_2^\delta(s_2(t),t) \geq 0, \quad 0 < t < T \quad (3.74)$$

Por otro lado, $u_2^\delta - u_2$ es solución del siguiente problema de frontera móvil

$$\begin{cases} (i) & {}_0D^\alpha w(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t), & 0(t) < x < s_2(t),\, 0 < t \leq T, \\ (ii) & w(0,t) = 0, & 0 < t \leq T, \\ (iii) & w(s_2(t),t) = u_2^\delta(s_2(t),t) \geq 0, & 0 < t \leq T, \\ (iv) & w(x,0) = 0, & a \leq x \leq b. \end{cases} \quad (3.75)$$

Teniendo en cuenta (3.73), podemos aplicar nuevamente el Teorema 16 resultando que

$$u_2^\delta(x,t) - u_2(x,t) \geq 0 \quad \text{en} \quad \overline{\Omega}_T = \{(x,t)\, /0 \leq x \leq s_2(t),\, 0 \leq t \leq T\}. \quad (3.76)$$

De (3.71), (3.74) y (3.76),

$$s_2^\delta(t)^2 - s_2(t)^2 \leq (b_2+\delta)^2 - b_2^2, \quad \delta > 0.$$

Por lo tanto,

$$s_2^\delta(t)^2 \leq s_2(t)^2 + (b_2+\delta)^2 - b_2^2, \quad \delta > 0. \quad (3.77)$$

Juntando (3.68) y (3.78), y siendo $s_i(t) > 0$, $i = 1, 2$ por Definición 16, resulta

$$s_1(t)^2 < s_2(t)^2 + (b_2 + \delta)^2 - b_2^2, \quad \delta > 0. \tag{3.78}$$

Finalmente, tomando límite cuando $\delta \searrow 0$, obtenemos la tesis. ∎

Teorema 22. *El problema de Stefan fraccionario* (3.45) *admite a lo sumo una solución.*

Demostración. Supongamos que existen dos pares $\{u_1, s_1\}$ y $\{u_2, s_2\}$, soluciones del problema de Stefan fraccionario (3.45) correspondientes ambos a los datos $\{b, f, g\}$.
Aplicando el Teorema 21, resulta que $s_1 \leq s_2$ y $s_2 \leq s_1$. Luego, $s_1 \equiv s_2$.
Ahora que la frontera es la misma, podemos aplicar el teorema de unicidad para el problema de frontera móvil (Teorema 17) y resulta que $u_1 \equiv u_2$. ∎

Capítulo 4

Soluciones explícitas

4.1 Tres problemas equivalentes

En esta última sección, vamos a resolver explícitamente tres problemas de Stefan fraccionarios para tres condiciones de borde diferentes: uno con condición de Dirichlet, el segundo con una condición de Neumann y el tercero con una condición de tipo convectiva.
Para finalizar vamos a dar condiciones suficientes bajo las cuales, estos tres problemas son equivalentes.

Presentamos a continuación los problemas a resolver:

1. El problema de Stefan fraccionario con condición de Dirichlet constante:

$$\begin{cases} (i) & D^{\alpha}u(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < s(t),\, t > 0,\, 0 < \alpha < 1,\ \lambda > 0, \\ (ii) & u(0,t) = B, & t > 0, \quad B > 0\, constante, \\ (iii) & u(s(t),t) = C < B, & t > 0, \\ (iv) & D^{\alpha}s(t) = -k u_x(s(t),t), & t > 0, \quad k > 0, \\ (v) & s(0) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

2. El problema de Stefan fraccionario con condición de Neumann:

$$\begin{cases} (i) & D^\alpha u(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < s(t),\ t > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ \lambda > 0, \\ (ii) & u_x(0,t) = -\frac{q}{t^{\alpha/2}}, & t > 0, \quad q > 0, \\ (iii) & u(s(t),t) = C, & t > 0, \\ (iv) & D^\alpha s(t) = -k u_x(s(t),t), & t > 0, \\ (v) & s(0) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

3. El problema de Stefan fraccionario con condición convectiva:

$$\begin{cases} (i) & D^\alpha u(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < s(t),\ t > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ \lambda > 0 \\ (ii) & m u_x(0,t) = \frac{h}{t^{\alpha/2}}(u(0,t) - D), & t > 0 \quad B > 0 \text{ constante}, \\ (iii) & u(s(t),t) = C < D, & t > 0, \\ (iv) & D^\alpha s(t) = -k u_x(s(t),t), & t > 0, \quad k > 0, \\ (v) & s(0) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

- **Resolución del problema (4.1).**

Vimos en la sección 2.3.1 que la función

$$z(x,t) = B + A\left[1 - \mathcal{W}\left(\frac{-x}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] \tag{4.4}$$

es una solución del problema

$$\begin{cases} D^\alpha z(x,t) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < \infty,\ 0 < t < T,\ 0 < \alpha < 1, \\ z(0,t) = B, & 0 < t < T, \\ z(x,0) = A, & 0 < x < \infty. \end{cases} \tag{4.5}$$

O sea que z verifica las condiciones $(4.1 - i)$ y $(4.1 - ii)$.

Consideremos entonces la siguiente función:

$$u_1(x,t) = B + b_1\left[1 - \mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right], \quad b_1 \text{ constante a determinar.} \tag{4.6}$$

Claramente u_1 verifica $(4.1 - i)$ y $(4.1 - ii)$.

Reemplazando (4.6) en la condición $(4.1 - iii)$,

$$u_1(s(t),t) = a_1 + b_1\left[1 - \mathcal{W}\left(-\frac{s(t)}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] = C. \tag{4.7}$$

Notemos que (4.7) se debe verificar para todo $t \in (0,T)$, lo que nos lleva a suponer que $s(t)$ debe ser proporcional a $t^{\alpha/2}$. Sea entonces

$$s_1(t) = \lambda\xi t^{\alpha/2} \qquad \xi > 0 \text{ constante a determinar.} \tag{4.8}$$

En particular, s_1 verifica $(4.1-v)$.

De (4.7) y (4.8),

$$C = B + b_1\left[1 - \mathcal{W}\left(-\xi, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] \Rightarrow b_1 = -\frac{B-C}{1-\mathcal{W}\left(-\xi,-\frac{\alpha}{2},1\right)} \tag{4.9}$$

donde hemos aplicado el Corolario 9 para despejar b_1.

Por lo tanto,

$$u_1(x,t) = B - \frac{B-C}{1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\xi},-\frac{\alpha}{2},1\right)}\left[1-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right]. \tag{4.10}$$

Consideremos ahora la condición fraccionaria de Stefan (4.1-iv). Teniendo en cuenta que

$$D^\alpha(t^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}t^{\beta-\alpha} \quad \text{si } \beta > -1,$$

y que la derivada de Caputo es lineal,

$$D^\alpha s_1(t) = D^\alpha(\lambda\xi t^{\alpha/2}) = \lambda\xi\frac{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}t^{-\alpha/2}. \tag{4.11}$$

Por otro lado, utilizando (2.13) para derivar la función de Wright tenemos que

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,t) = b_1\left[-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left(-\frac{1}{\lambda t^{\alpha/2}}\right) = \frac{b_1}{\lambda t^{\alpha/2}}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}\right).$$

Luego,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(s_1(t),t) = \frac{b_1}{\lambda t^{\alpha/2}}\mathcal{M}_{\alpha/2}(\xi) = -\frac{B-C}{1-\mathcal{W}\left(-\xi,-\frac{\alpha}{2},1\right)}\frac{1}{\lambda t^{\alpha/2}}\mathcal{M}_{\alpha/2}(\xi). \tag{4.12}$$

Juntando (4.11) y (4.12),

$$D^\alpha s_1(t) = -ku_x(s_1(t),t) \Leftrightarrow \lambda\xi\frac{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}\frac{1}{t^{\alpha/2}} = -k\frac{-(B-C)}{1-\mathcal{W}\left(-\xi,-\frac{\alpha}{2},1\right)}\frac{1}{\lambda t^{\alpha/2}}\mathcal{M}_{\alpha/2}(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \xi\left[1-\mathcal{W}\left(-\xi,-\frac{\alpha}{2},1\right)\right]\frac{1}{\mathcal{M}_{\alpha/2}(\xi)} = \frac{k}{\lambda^2}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}(B-C). \tag{4.13}$$

Veamos si esta ecuación cuya incógnita es ξ admite solución. Con este propósito definimos la función

$$H : [0,\infty) \to \mathbb{R} \,/\, H(\xi) = \xi\left[1-\mathcal{W}\left(-\xi,-\frac{\alpha}{2},1\right)\right]\frac{1}{\mathcal{M}_{\alpha/2}(\xi)}. \tag{4.14}$$

H tiene las siguientes propiedades:

1. $H(0^+) = 0$
2. $H(+\infty) = +\infty$
3. H es una función continua y estrictamente creciente.

En efecto:
$H(0) = 0\left[1 - \mathcal{W}\left(0, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] \frac{1}{\mathcal{M}_{\alpha/2}(0)} = 0$. Luego, se verifica 1.
Aplicando los Corolarios 4 y 5, y el Lema 1, obtenemos 2.
Por Lema 1 y Corolario 9, tenemos que H es producto de funciones estrictamente crecientes y positivas, luego, H es estrictamente creciente. La continuidad es consecuencia del Lema 1 y de que la función de Wright es una función entera ya que $\frac{\alpha}{2} \in (0,1)$. Luego vale 3.

Finalmente, siendo $C < B$ y $\alpha \in (0,1)$, resulta que $\frac{k}{\lambda^2}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}(B-C) > 0$. Esto nos permite asegurar que existe un único valor $\tilde{\xi} > 0$ tal que

$$H(\tilde{\xi}) = \frac{k}{\lambda^2}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}(B-C). \tag{4.15}$$

Estamos en condiciones entonces de afirmar que el par

$$\begin{cases} u_1(x,t) = B - \frac{B-C}{1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\xi}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)}\left[1 - \mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] \\ s_1(t) = \lambda\tilde{\xi}t^{\alpha/2} \end{cases} \tag{4.16}$$

donde $\tilde{\xi}$ es la única solución de la ecuación $H(\xi) = \frac{k}{\lambda^2}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}(B-C)$, es solución del problema (4.1).

Más aún, el problema (4.1) está bajo las hipótesis del problema (3.45), luego, podemos aplicar el Teorema 22 obteniendo así que (4.16) es la única solución del problema (4.1).

- **Resolución del problema (4.2).**

Razonando como antes, proponemos la función

$$u_2(x,t) = a_2 + b_2\left[1 - \mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] \qquad a_2, b_2 \text{ constantes a determinar.} \tag{4.17}$$

u_2 verifica $(4.2 - i)$.
Ahora bien,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,t) = \frac{b_2}{\lambda t^{\alpha/2}}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}\right).$$

Reemplazando en la condición (4.2-ii), obtenemos b_2:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(0,t) = \frac{b_2}{\lambda t^{\alpha/2}} \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = -\frac{q}{t^{\alpha/2}} \Rightarrow b_2 = -q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right). \tag{4.18}$$

Reemplazando u_2 en la condición sobre la frontera libre (4.2-iii),

$$u_2(s_2(t),t) = a_2 + b_2\left[1 - \mathcal{W}\left(-\frac{s_2(t)}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] = C. \tag{4.19}$$

Nuevamente vamos a pedir que $s_2(t)$ sea proporcional a $t^{\alpha/2}$. Esto es,

$$s_2(t) = \lambda\mu t^{\alpha/2} \qquad \mu > 0 \quad \text{a determinar.} \tag{4.20}$$

De (4.18), (4.19) y (4.20),

$$a_2 = C + q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1 - \mathcal{W}\left(-\mu, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right]. \tag{4.21}$$

Enfocándonos en la condición fraccionaria de Stefan $(4.2 - iv)$, tenemos:

$$D^\alpha s_2(t) = \lambda\mu \frac{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{1}{t^{\alpha/2}} \tag{4.22}$$

y

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(s_2(t),t) = \frac{b_2}{\lambda t^{\alpha/2}} \mathcal{M}_{\alpha/2}(\mu) = -\frac{q\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{t^{\alpha/2}} \mathcal{M}_{\alpha/2}(\mu). \tag{4.23}$$

Luego,

$$D^\alpha s_2(t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}(s_2(t),t) \Leftrightarrow \lambda\mu \frac{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} t^{-\alpha/2} = -k\frac{\left(-q\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{t^{\alpha/2}} \mathcal{M}_{\alpha/2}(\mu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu \frac{1}{\mathcal{M}_{\alpha/2}(\mu)} = \frac{kq}{\lambda} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}. \tag{4.24}$$

Definamos entonces la función

$$J : [0,\infty) \to \mathbb{R} \,/\, J(\mu) = \mu \frac{1}{\mathcal{M}_{\alpha/2}(\mu)}. \tag{4.25}$$

Se deduce de lo analizado anteriormente para la función H, que J tiene las siguientes propiedades

1. $J(0^+) = 0$
2. $J(+\infty) = +\infty$
3. J es una función continua y estrictamente creciente.

Además $\frac{kq}{\lambda}\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})} > 0$, lo que nos permite asegurar que existe un único $\tilde{\mu}$ tal que

$$J(\tilde{\mu}) = \frac{kq}{\lambda}\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}.$$

Podemos afirmar entonces que

$$\begin{cases} u_2(x,t) = C + q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\mu},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right] - q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right] \\ s_2(t) = \lambda\tilde{\mu}t^{\alpha/2} \end{cases} \tag{4.26}$$

es una solución del problema (4.2), donde $\tilde{\mu}$ es la única solución de la ecuación $J(\mu) = \frac{kq}{\lambda}\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}$, .

Finalmente, observemos que, por Corolario 9, resulta

$$u_2(0,t) = C + q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\mu},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right] \geq C,$$

o sea que estamos nuevamente bajo las hipótesis del Teorema 22, lo que nos permite asegurar que (4.26) es la única solución de (4.2).

- **Resolución del problema (4.3).**

  Sean

$$u_3(x,t) = a_3 + b_3\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right), \quad a_3,\, b_3 \text{ constantes a determinar,} \tag{4.27}$$

y

$$s_3(t) = \eta\lambda t^{\alpha/2}, \quad \eta > 0 \text{ a determinar.} \tag{4.28}$$

Reemplazando en $(4.3 - iii)$,

$$u_3(s_3(t),t) = C \Leftrightarrow C = a_3 + b_3\mathcal{W}\left(-\eta,-\frac{\alpha}{2},1\right). \tag{4.29}$$

Derivando,

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}(x,t) = -\frac{b_3}{\lambda t^{\alpha/2}}\mathcal{M}_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}\right) \Rightarrow \frac{\partial u_3}{\partial x}(0,t) = -\frac{b_3}{\lambda t^{\alpha/2}}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha/2)}.$$

Reemplazando en la condición convectiva $(4.3 - ii)$,

$$-\frac{mb_3}{\lambda t^{\alpha/2}}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha/2)} = \frac{h}{t^{\alpha/2}}(a + b_3 - D). \tag{4.30}$$

De (4.29) y (4.30),

$$\begin{cases} a_3 = D - \left(1 + \frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}\right) \frac{D-C}{1-\mathcal{W}\left(-\eta,-\frac{\alpha}{2},1\right)+\frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}} \\ b_3 = \frac{D-C}{1-\mathcal{W}\left(-\eta,-\frac{\alpha}{2},1\right)+\frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}} \end{cases}$$

Luego,

$$u_3(x,t) = D - \frac{(D-C)\left[1 - \mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) + \frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}\right]}{1 - \mathcal{W}\left(-\eta, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) + \frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}} \tag{4.31}$$

Consideremos ahora la condición $(4.3 - iv)$.

$$D^\alpha s(t) = D^\alpha(\lambda\eta t^{\alpha/2}) = \lambda\eta \frac{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} t^{-\alpha/2}. \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}(s_3(t),t) = -b_3 \frac{1}{\lambda t^{\alpha/2}} \mathcal{M}_{\alpha/2}(\eta) = -\frac{D-C}{1 - \mathcal{W}\left(-\eta, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) + \frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}} \frac{1}{\lambda t^{\alpha/2}} \mathcal{M}_{\alpha/2}(\eta). \tag{4.33}$$

Reemplazando (4.32) y (4.33) en $(4.3 - iv)$,

$$\eta \left[1 - \mathcal{W}\left(-\eta, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) + \frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}\right] \frac{1}{\mathcal{M}_{\alpha/2}(\eta)} = \frac{k}{\lambda^2} \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}(D-C). \tag{4.34}$$

Definimos entonces la función

$$K : [0,\infty) \to \mathbb{R} \,/\, K(\eta) = \eta \left[1 - \mathcal{W}\left(-\eta, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) + \frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}\right] \frac{1}{\mathcal{M}_{\alpha/2}(\eta)} \tag{4.35}$$

Con argumentos análogos a los utilizados para analizar la función H definida en (4.14), podemos establecer que K tiene las siguientes propiedades:

1. $K(0^+) = 0$
2. $K(+\infty) = +\infty$
3. K es una función continua y estrictamente creciente.

Luego, siendo $\frac{k}{\lambda^2} \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}(D-C) > 0$, podemos afirmar que existe un único $\tilde{\eta}$ tal que

$$K(\tilde{\eta}) = \frac{k}{\lambda^2} \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}(D-C). \tag{4.36}$$

Finalmente, la solución del problema (4.3) está dada por

$$\begin{cases} u_3(x,t) = D - \frac{(D-C)\left[1-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)+\frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}\right]}{1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\eta},-\frac{\alpha}{2},1\right)+\frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}} \\ s_3(t) = \lambda\tilde{\eta} t^{\alpha/2} \end{cases} \tag{4.37}$$

donde $\tilde{\eta}$ es la única solución de $K(\eta) = \frac{k}{\lambda^2}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}(D-C)$. Nuevamente (4.37) es la única solución de (4.3).

Nota 6. *El siguiente teorema es una generalización del resultado obtenido por Tarzia en [51]. Muestra la relación que puede existir entre problemas con condiciones de Diriclet y de Neumann, y es una nueva evidencia del buen comportamiento que presenta la ecuación de difusión fraccionaria cuando consideramos $\alpha \in (0,1)$, esto es, cuando trabajamos con difusión anómala.*

Teorema 23. *Sean los problemas (4.1) y (4.2) donde:*

1. *La condición constante sobre la frontera libre, C, es la misma en todos los problemas,*
2. *En (4.1) $B = C + q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\mu},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right]$, donde $\tilde{\mu}$ es la única solución de la ecuación $J(\mu) = \frac{kq}{\lambda}\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)}$ (J definida en (4.25))*

Entonces ambos problemas son equivalentes.

Demostración. Observemos que tomando $B = C + q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\mu},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right]$, resulta que $B > C$. Aplicando (4.16) al problema (4.1) considerando este B particular, tenemos que

$$\begin{cases} u_1(x,t) = C + q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\mu},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right] \\ \qquad\qquad -\frac{q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\mu},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right]}{1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\xi},-\frac{\alpha}{2},1\right)}\left[1-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right] \\ s_1(t) = \lambda\tilde{\xi}t^{\alpha/2} \end{cases} \tag{4.38}$$

donde $\tilde{\xi}$ es la única solución de la ecuación $H(\xi) = \frac{k}{\lambda^2}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\mu},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right]$.
La solución de (4.2) está dada por

$$\begin{cases} u_2(x,t) = C + q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\mu},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right] - q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right] \\ s_2(t) = \lambda\tilde{\mu}t^{\alpha/2} \end{cases} \tag{4.39}$$

donde $\tilde{\mu}$ es la única solución de la ecuación $J(\mu) = \frac{kq}{\lambda}\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}$.
Si probamos que $\tilde{\mu} = \tilde{\xi}$ tendremos que

$$u_1 = u_2 \qquad \text{y} \qquad s_1 = s_2,$$

y, dada la unicidad de solución que admiten estos problemas, quedará probado que son equivalentes.

Ahora bien, definimos la siguiente función

$$B\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \,/\, B(\xi) = C + q\lambda\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\left[1 - W\left(-\xi, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right].$$

Claramente $B(\tilde{\mu}) = B$.

Considerando las definiciones de las funciones H y J ((4.14) y (4.25) respectivamente), resulta que

$$J(\xi) = \frac{kq}{\lambda}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})^2}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow \xi\frac{1}{\mathcal{M}_{\alpha/2}(\xi)} = \frac{kq}{\lambda}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})^2}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \xi\frac{1}{\mathcal{M}_{\alpha/2}(\xi)}\left[1 - \mathcal{W}\left(-\xi, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] = \frac{kq}{\lambda}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})^2}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\left[1 - \mathcal{W}\left(-\xi, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(\xi) = \frac{kq}{\lambda}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})^2}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{B(\xi)-C}{q\lambda\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(\xi) = \frac{k\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\lambda^2\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}(B(\xi) - C).$$

Reemplazando estas equivalencias con $\tilde{\mu}$,

$$J(\tilde{\mu}) = \frac{kq}{\lambda}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})^2}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow H(\tilde{\mu}) = \frac{k\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\lambda^2\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}(B - C). \tag{4.40}$$

Debido a la unicidad de solución de ambas ecuaciones concluimos que $\tilde{\mu} = \tilde{\xi}$.

■

Teorema 24. *Sean los problemas (4.1) y (4.3) donde:*

1. *La condición constante sobre la frontera libre, C, es la misma en todos los problemas,*
2. *en (4.1) $B = D - (D-C)\frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}\frac{1}{1-W\left(-\tilde{\eta},-\frac{\alpha}{2},1\right)+\frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}}$ donde $\tilde{\eta}$ es la única solución de $K(\eta) = \frac{k}{\lambda^2}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}(D-C)$ (K definida en (4.35)).*

Entonces estos problemas son equivalentes.

Demostración. La prueba es análoga a la del Teorema anterior, definiendo en este caso la función

$$B\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \,/\, B(\xi) = B(\xi) = D - (D-C)\frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}\frac{1}{1 - W\left(-\xi, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) + \frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}}.$$

■

Teorema 25. *Sean los problemas (4.2) y (4.3) donde:*

1. *La condición constante sobre la frontera libre, C, es la misma en todos los problemas,*

2. *En (4.2)* $q = \frac{(D-C)}{\frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}+\left[1-\mathcal{W}(-\tilde{\eta},-\frac{\alpha}{2},1)\right]}$ *donde $\tilde{\eta}$ es la única solución de* $K(\eta) = \frac{k}{\lambda^2}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}(D-C)$ *(K es la función definida en (4.35)).*

Entonces estos problemas son equivalentes.

Demostración. Observemos que, de la condición dada en el item *2* resulta que

$$D = q\left\{\frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} + \left[1-\mathcal{W}(-\tilde{\eta},-\frac{\alpha}{2},1)\right]\right\} + C.$$

Definiendo en este caso la función

$$D\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \,/\, D(\mu) = q\left\{\frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} + \left[1-\mathcal{W}(-\mu,-\frac{\alpha}{2},1)\right]\right\} + C,$$

es claro que $D(\tilde{\eta}) = D$ y procedemos como en la demostración del Teorema 23. ∎

4.2 Convergencia

Teorema 26. *Convergencia de soluciones.*

1. *El límite cuando $\alpha \nearrow 1$ de la solución (4.16) del problema de Stefan fraccionario con condición de borde (4.1), es la solución clásica del siguiente problema de Stefan a una fase:*

$$\begin{cases} (i) & \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & 0<x<s(t),\, t>0,\, \lambda>0, \\ (ii) & u(0,t) = B, & t>0, \quad B>0\, constante, \\ (iii) & u(s(t),t) = C < B, & t>0, \\ (iv) & \frac{d}{dt}s(t) = -ku_x(s(t),t), & t>0, \quad k>0, \\ (v) & s(0)=0. \end{cases} \tag{4.41}$$

2. *El límite cuando $\alpha \nearrow 1$ de la solución (4.26) del problema de Stefan fraccionario con condición de flujo (4.2), es la solución clásica del siguiente problema de Stefan a una fase:*

$$\begin{cases} (i) & \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & 0<x<s(t),\, t>0,\, 0<\alpha<1,\ \lambda>0, \\ (ii) & u_x(0,t) = -\frac{q}{t^{\alpha/2}}, & t>0, \quad q>0, \\ (iii) & u(s(t),t) = C, & t>0, \\ (iv) & \frac{d}{dt}s(t) = -ku_x(s(t),t), & t>0, \\ (v) & s(0)=0. \end{cases} \tag{4.42}$$

3. *El límite cuando $\alpha \nearrow 1$ de la solución (4.37) del problema de Stefan fraccionario con condición convectiva de borde (4.3), es la solución clásica del siguiente problema de Stefan a una fase:*

$$\begin{cases} (i) & \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & 0<x<s(t),\ t>0,\ 0<\alpha<1,\ \lambda>0 \\ (ii) & mu_x(0,t) = \frac{h}{t^{\alpha/2}}(u(0,t)-D), & t>0 \quad B>0 \ \textit{constante}, \\ (iii) & u(s(t),t) = C < D, & t>0, \\ (iv) & \frac{d}{dt}s(t) = -ku_x(s(t),t), & t>0, \quad k>0, \\ (v) & s(0)=0. \end{cases} \tag{4.43}$$

Demostración. Sean $\{u_1^\alpha, s_1^\alpha\}$, $\{u_2^\alpha, s_2^\alpha\}$ y $\{u_3^\alpha, s_3^\alpha\}$ las soluciones de (4.1), (4.2) y (4.3) dadas por (4.16), (4.26) y (4.37) respectivamente, asociadas a cada $\alpha \in (0,1)$.

$$\begin{cases} u_1^\alpha(x,t) = B - \frac{B-C}{1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\xi},-\frac{\alpha}{2},1\right)}\left[1-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right], \\ s_1^\alpha(t) = \lambda\tilde{\xi}t^{\alpha/2}, \end{cases} \tag{4.44}$$

donde $\tilde{\xi}$ es la única solución de la ecuación

$$\xi\left[1-\mathcal{W}\left(-\xi,-\frac{\alpha}{2},1\right)\right]\frac{1}{\mathcal{M}_{\alpha/2}(\xi)} = \frac{k}{\lambda^2}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}(B-C).$$

$$\begin{cases} u_2^\alpha(x,t) = C + q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\mu},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right] - q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)\right], \\ s_2^\alpha(t) = \lambda\tilde{\mu}t^{\alpha/2}, \end{cases} \tag{4.45}$$

donde $\tilde{\mu}$ es la única solución de la ecuación

$$\mu\frac{1}{\mathcal{M}_{\alpha/2}(\mu)} = \frac{kq}{\lambda}\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}.$$

$$\begin{cases} u_3^\alpha(x,t) = D - \frac{(D-C)\left[1-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}},-\frac{\alpha}{2},1\right)+\frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}\right]}{1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\eta},-\frac{\alpha}{2},1\right)+\frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}}, \\ s_3^\alpha(t) = \lambda\tilde{\eta}t^{\alpha/2}, \end{cases} \tag{4.46}$$

donde $\tilde{\eta}$ es la única solución de

$$\eta\left[1-\mathcal{W}\left(-\eta,-\frac{\alpha}{2},1\right)+\frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}\right]\frac{1}{\mathcal{M}_{\alpha/2}(\eta)} = \frac{k}{\lambda^2}\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}(D-C).$$

Aplicando el Lema 2, resulta:

1.

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} u_1^\alpha(x,t) = \lim_{\alpha \nearrow 1} B - \frac{B-C}{1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\xi}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)} \left[1 - \mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right]$$
$$= B - \frac{B-C}{erf\left(\frac{\tilde{\xi}}{2}\right)} erf\left(-\frac{x}{2\lambda t^{1/2}}\right).$$

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} s_1(t) = \lim_{\alpha \nearrow 1} \lambda \tilde{\xi} t^{\alpha/2} = \lambda \tilde{\xi}\sqrt{t},$$

donde $\tilde{\xi}$ es la única solución de la ecuación

$$\frac{\xi}{2} erf\left(\frac{\xi}{2}\right) \exp\left\{\frac{\xi^2}{4}\right\} = \frac{k}{\lambda^2}\frac{(C-B)}{\sqrt{\pi}}.$$

2.

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} u_2^\alpha(x,t) =$$
$$= \lim_{\alpha \nearrow 1} C + q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\tilde{\mu}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] - q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\mathcal{W}\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right]$$
$$= C + q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) erf\left(\frac{\tilde{\mu}}{2}\right) - q\lambda\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) erf\left(-\frac{x}{2\lambda t^{1/2}}\right).$$

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} s_2(t) = \lim_{\alpha \nearrow 1} \lambda \tilde{\mu} t^{\alpha/2} = \lambda \tilde{\mu}\sqrt{t},$$

donde $\tilde{\mu}$ es la única solución de la ecuación

$$\frac{\mu}{2}\exp\left\{\mu^2/4\right\} = \frac{kq}{\lambda}.$$

3.

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} u_3^\alpha(x,t) = \lim_{\alpha \nearrow 1} D - \frac{(D-C)\left[1 - W\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) + \frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}\right]}{1 - W\left(-\tilde{\eta}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) + \frac{m}{h\lambda\Gamma(1-\alpha/2)}}$$
$$= D - \frac{(D-C)\left[erf\left(\frac{x}{2\lambda\sqrt{t}}\right) + \frac{m}{h\lambda\sqrt{\pi}}\right]}{erf\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{m}{h\lambda\sqrt{\pi}}}.$$

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} s_3^\alpha(t) = \lim_{\alpha \nearrow 1} \lambda \tilde{\eta} t^{\alpha/2} = \lambda \tilde{\eta}\sqrt{t},$$

donde $\tilde{\eta}$ es la única solución de la ecuación

$$\frac{\eta}{2}\left[erf\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{m}{h\lambda\sqrt{\pi}}\right]\exp\left\{\frac{\eta^2}{4}\right\} = \frac{k}{\lambda^2}\frac{(D-C)}{\sqrt{\pi}}.$$

$\blacksquare$

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se estudiaron diversos problemas asociados a la EDF: Primero se estudió el problema de valores iniciales con condición de Dirichlet en el primer cuadrante, y el problema de valores iniciales con condición de Neumann en el primer cuadrante. En ambos casos, se obtuvieron soluciones explícitas y se brindó una prueba de que las soluciones obtenidas son, efectivamente, soluciones de los problemas propuestos.

Luego, se estudió el problema de frontera móvil para la EDF. Se brindaron teoremas sobre principios del máximo y se pruebó el Lema de Hopf para el operador diferencial asociado a la EDF. Una vez obtenidos estos resultados, se consideró un problema de Stefan asociado a la EDF y se utilizó el Lema de Hopf "fraccionario" para probar la propiedad de monotonía que verifica la frontera libre de estos problemas. A continuación se deduce una condición integral que verifica la misma (derivada de la condición fraccionaria de Stefan), y a partir de ésta, obtenemos la unicidad de solución para problemas de Stefan fraccionarios bajo ciertas condiciones.
Finalmente, resolvimos explícitamente tres problemas de Stefan fraccionarios, uno con condición de Dirichlet, otro con condición de Neumann y un tercero con condición convectiva y dimos condiciones bajo las cuales estos tres problemas son equivalentes.
Cabe destacar que se analizó el límite cuando $\alpha \searrow 1$ de las distintas soluciones obtenidas, recuperando las soluciones de los respectivos problemas clásicos asociados a la ecuación del calor.

Futuros trabajos.

El material recopilado en esta tesis, así como los resultados obtenidos, nos brindan distintos caminos en los cuales seguir trabajando.

- Analizar resultados recientes en el campo de lo numérico y comparar su efectividad a partir de las soluciones explícitas encontradas. Algunos trabajos recientes en esta dirección son [30], [9], [25] y [5].
- Estudiar problemas de Stefan Fraccionarios a dos fases.
- Obtener condiciones integrales para la frontera libre cuando consideramos problemas de Stefan fraccionarios con condiciones de borde de Neumann o de tipo convectiva.
- Los problemas de Stefan y de frontera móvil estudiados en esta tesis consideran todos derivadas de Caputo respecto del tiempo con extremo en $t = 0$. Proponemos estudiar el operador derivada fraccionaria con extremo en la frontera. Es escaso el material que se puede obtener relativo al estudio de problemas de frontera movil fraccionarios, pero un trabajo en esta dirección es [55].

Bibliografía

[1] N. H. Abel. Auflösung einer mechanischen aufgabe. *J. für reine und angew. Math.*, 1:153–157, 1826.

[2] N. H. Abel. Solution de quelques problèmes à láide díntegrales défnies. *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig: Teubner, 1:11–27, 1881.

[3] M. Al-Refai and Y. Luchko. Maximum principle for the fractional diffusion equations with the Riemann–Liouville fractional derivative and its applications. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 17(2):483–498, 2014.

[4] V. Alexiades and A. D. Solomon. *Mathematical modelling of melting and freezing processes.* Hemisphere, 1993.

[5] Marek BÅĆasik and MaÅĆgorzata Klimek. Numerical solution of the one phase 1D fractional Stefan problem using the front fixing method. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, pages n/a–n/a, 2014.

[6] H. Brézis. *Análisis Funcional Teoría y aplicaciones. Versión española de Juan Ramón Esteban.* Alianza Editorial, 1984.

[7] J. R. Cannon. *The One–Dimensional Heat Equation.* Cambridge University Press, 1984.

[8] M. Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. II. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 13:529–539, 1967.

[9] Wen Chen, Linjuan Ye, and Hongguang Sun. Fractional diffusion equations by the kansa method. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5):1614–1620, 2010.

[10] J. Crank. *Free and moving boundary problems.* Clarendon Press, 1984.

[11] K. Diethelm. *The analysis of fractional differential equations: An application oriented exposition using differential operators of Caputo type*, volume 2004. Springer, 2010.

[12] S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, and A. N. Kochubei. *Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type*. Birkhäuser Verlag, 2004.

[13] C. M. Elliott and J. R. Ockendon. *Weak and variational methods for moving boundary problems*, volume 59. Pitman, London, 1982.

[14] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions*, volume 1. McGraw-Hill, New York, 1955.

[15] L. Euler. De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt. *Commentarii Academiae Scientarium Petropolitanae*, 5:36–57, 1738.

[16] F. Falcini, R. Garra, and V. R. Voller. Fractional Stefan problems exhibing lumped and distributed latent–heat memory effects. *Phys. Rev. E*, 87:042401, 2013.

[17] A. Friedman. Remarks on the maximum principle for parabolic equations and their applications. *Pacific J. Math*, 8:201–211, 1958.

[18] R. Gorenflo, Y. Luchko, and F. Mainardi. Analytical properties and applications of the Wright function. *fcaa*, 2:383–414, 1999.

[19] R. Gorenflo and F. Mainardi. On Mittag–Leffler–type functions in fractional evolution processes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 118:283–299, 2000.

[20] S. C. Gupta. *The classical Stefan problem. Basic concepts, modelling and analysis*. Elsevier, 2003.

[21] A. A. Gusev and U. W. Suter. Dynamics of small molecules in dense polymers subjet to thermal motion. *J. Chem. Phys.*, 99:2228–2234, 1993.

[22] E. Hopf. Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichngen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. *Sitber. Precuss. Akad. Wiss. Berlin*, 19:147–152, 1927.

[23] E. Hopf. A remark on linear elliptic differential equations of second order. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3(5):791–793, 1952.

[24] A. Iomin. Toy model of fractional transport of cancer cells due to self–entrapping. *Phys. Rev. E*, 73:061918, 2006.

[25] Mohammad Javidi and Bashir Ahmad. Numerical solution of fractional partial differential equations by numerical laplace inversion technique. *Advances in Difference Equations*, 2013(1):375, 2013.

[26] L. Jinyi and X. Mingyu. Some exact solutions to stefan problems with fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 351:536–542, 2009.

[27] W. P. Johnson. The curious history of Faá di BrunoÂť́s formula. *Am. Math.Mon.*, 109:217–234, 2002.

[28] G. Lamé and B. P. Clapeyron. Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide. *Annales de Chimie et de Physique 2° série*, 47:250–256, 1831.

[29] H. Laurent. Sur le calcul des dérivées a indices quelconques. *Nouv. Ann. Math.*, 3:240–252, 1884.

[30] Yumin Lin and Chuanju Xu. Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation. *Journal of Computational Physics*, 225(2):1533–1552, 2007.

[31] J. Liouville. Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques. *Ibid.*, pages 71–162, 1832.

[32] J. Liouville. Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions. *J. lÉcole Roy. Polytéchn.*, 13, Sect. 21:1–69, 1832.

[33] Y. Luchko. Maximum principle for the generalized time–fractional diffusion equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 351:218–223, 2009.

[34] Y. Luchko. Some uniqueness and existence results for the initial-boundary–value problems for the generalized time–fractional diffusion equation. *Computer and Mathematics with Applications*, 59:1766–1772, 2010.

[35] V. J. Lunardini. *Heat Transfer with Freezing and Thawing.* ELsevier, 1991.

[36] F. Mainardi. On the initial value problem for the fractional diffusion–wave equation. *Proceeding of VII-th International Conference Waves and Stability in Continuous Media WASCOM, Bologna, Italy, 4-7 October 1993, S. Rionero and T. Ruggeri (Editors), World Scientific, Singapore*, pages 246–251, 1994.

[37] F. Mainardi and M. Tomirotti. On a special function arising in the time fractional diffusion–wave equation. *Transform Methods and Special Functions, Sofia*, 171, 1994.

[38] R. Metzler and J. Klafter. The random walkâĂŹs guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Phys. Rep.*, 339:1–77, 2000.

[39] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations.* Vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1999.

[40] I. Podlubny. What Euler could further write, or the unnoticed "big bang" of the fractional clculus. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2:501–506, 2013.

[41] B. Riemann. Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher*, Leipzig: Teubner:331–344, 1876.

[42] S. Roscani. *Introducción al Cálculo Fraccionario.* Trabajo final, 2011.

[43] S. Roscani and E. Santillan Marcus. Two equivalen Stefan's problems for the time–fractional diffusion equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 16(4):802–815, 2013.

[44] S. Roscani and E. Santillan Marcus. A new equivalence of Stefan's problems for the time–fractional–diffusion equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 17(2):371–381, 2014.

[45] L. I. Rubinstein. *The Stefan problem.* Translations of Mathematical Monographs, 27, Amer. Math. Soc., 1971.

[46] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives–Theory and Applications.* Gordon and Breach, 1993.

[47] M. R. Spiegel. *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas.* Prentice–hall Hispanoamericana S. A., 1983.

[48] B. Stankovic. On the function of E. M. Wright. *Publications de l'Institut MathÃľmatique, Nouvelle sÃľrie*, tome 10(24):113–124, 1970.

[49] J. Stefan. Über einge probleme der theorie der Wärmeleitung. *Zitzungberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissemschaften Mathematisch-Naturwissemschafthiche classe*, 98:473–484, 1889.

[50] Y. X. Tao, R. W. Besant, and K. S. Rezkallah. A mathematical model for predicting the densification and growth of frost on a flat plate. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36:353–363, 1993.

[51] D. A. Tarzia. An inequality for the coeficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem. *Quart. Appl. Math.*, 39:491–497, 1981.

[52] D. A. Tarzia. A bibliography on moving–free boundary problems for the heat diffusion equation. the Stefan and related problems. *MAT–Serie A*, 2:1–297, 2000.

[53] D. A. Tarzia. *Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface, Chapter 20, In Advanced Topics in Mass Transfer, Mohamed El-Amin.* InTech Open Access Publisher, 2011.

[54] R. Viborni. On properties of solutions of some boundary value problems for equations of parabolic type. *Daklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 117:563–565, 1957.

[55] C. J. Vogl, M. J. Miksis, and S. H. Davis. Moving boundary problems governed by anomalous diffusion. *Proc. R. Soc. A*, 468:3348–3369, 2012.

[56] D. V. Widder. *The Heat Equation.* Academic Press., 1975.

[57] E. M. Wright. The assymptotic expansion of the generalized bessel funtion. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 38:257–270, 1934.

[58] E. M. Wright. The generalized Bessel function of order greater than one. *Quart. J. Math. Oxford*, Ser. 11:36–48, 1940.

[59] S. B. Yuste, E. Abad, and K. Lindenberg. Reaction-subdiffusion model of morphogen gradient formation. *Phys. Rev. E*, 82:061123, 2010.