Minicurso: Introducción al Cálculo Fraccionario. Integrales y derivadas de órdenes arbitrarios.

S. Roscani
CONICET - Universidad Austral
Universidad Nacional de Rosario

Encuentro de estudiantes de Matemática
de la
Unión Matemática Argentina
2021

REUNIÓN ANUAL DE LA UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

Resumen En este curso se presentarán los conceptos de integrales y derivadas de orden arbitrario, como herramientas básicas del Cálculo Fraccionario. Se trabajará con integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville, así también como con derivadas de Caputo. Se estudiarán diferentes propiedades de estos operadores con el objetivo final de presentar algunas ecuaciones diferenciales fraccionarias ordinarias como posibles herramientas de modelización.

Índice

1. Introducción

La idea de considerar derivadas o integrales de órdenes arbitrarios data de los propios inicios del cálculo diferencial. De hecho el "antecedente estrella" viene de la mano del mismísimo Leibnitz (nuestro maestro en introducir no sólo los fundamentos del cálculo difernecial sino la notación $\frac{df^n}{dx^n}$!), a quien en L'Hôpital pregunta, en una correspondencia en el año 1695, "qué sentido tendría esta expresión para $n = \frac{1}{2}$". En su respuesta, Leibnitz escribió a L'Hôpital que esa expresión no admitía **todavía** el uso de de exponentes arbitrarioses, pero que esa aparente paradoja algún día mostraría útiles consecuencias.

Hoy en día el **Cálculo Fraccionario** es una rama del Análisis Matemático que estudia diferentes tipos de derivadas en integrales de órdenes arbitrarios. Claramente el adjetivo "Fraccionario" en el nombre es una característica puramente histórica, ya que los órdenes pueden considerarse incluso en el conjunto de los números complejos.

Existen muchas ramas en cálculo fraccionario, cada una asociada al los operadores que se definan. En este mini-curso estudiaremos integrales de Riemann-Liouville y derivadas fraccionarias de Caputo y Riemann-Liouville. Claramente, al escuchar estos nombres, podemos identificar a dos grandes matemáticos del siglo XVIII: Joseph Liouville (aprox .1832-1840) y Berhard Riemann (1847) (link articulo B. Ross - Historia 1695-1900).

Sin embargo, para presentar un problema clásico del CF, recurriremos a un contemporáneo de Riemann y Liouville, que es Abel (1802-1829) quien, estudiando el *problema de la braquistócrona*, que es el problema de determinar la ecaución de una curva conociendo el tiempo de descenso T de una cuenta que se desplaza en un alambre rigido sin rozamiento bajo el efecto de la gravedad, obtuvo la siguiente ecuación integral

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y (y-p)^{-1/2} f(p) \mathrm{d}p. \tag{1}$$

Dicen que Abel escribió al lado derecho de la ecaución (1) la expresión

$$f(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{1/2}}{dy^{1/2}} T(y). \tag{2}$$

O sea que la solución de la ecuación integral de Abel es simplemtente la derivada 1/2 de la función T! Bastará "simplemente" con darle sentido a esta expresión. Cabe destacar que más allá de esta idea pintorezca, Abel resolvió su ecuación en [1] y lo veremos en la próxima sección.

2. Integrales fraccionarias

Para pensar en una definición de derivada de orden arbitrario, comencemos con una expresión genral para integrales de orden natural, que es lo que conocemos. Sea $f \in L^1(a,b)$, luego

$$({}_aI^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

existe, es finita, continua y tiende a 0 cuando $t \to a$. Podemos considerar la integral doble, o de orden 2 y aplicando Fubini en la región de la Figura 2 resulta

$$({}_aI^2 f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^\tau f(p) \mathrm{d}p \right) \mathrm{d}\tau = \int_a^t \left(\int_\tau^t f(p) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}p = \int_a^t f(p)(t-p) \mathrm{d}p.$$

Integrando nuevamente y procediendo como antes se obtiene:

$$({}_aI^3 f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^\tau (\tau - p) f(p) \mathrm{d}p \right) \mathrm{d}\tau = \int_a^t \left(\int_\tau^t (\tau - p) f(p) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}p = \frac{1}{2} \int_a^t (t-p)^2 f(p) \mathrm{d}p.$$

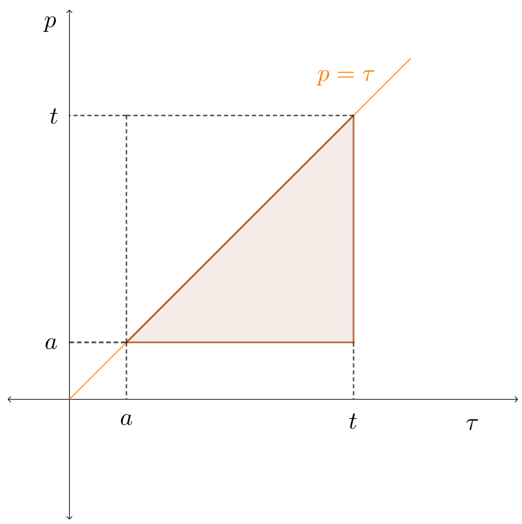

Figura 1: Región de integración.

Es fácil probar por inducción que para el caso general se puede calcular la integral $n-$ésima de una función f a través de la *fórmula de Cauchy*

$$({}_aI^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Pero entonces, si quisiéramos pensar en una posible definición para una integral de orden arbitrario, podríamos hacerlo via una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su restricción al conjunto de los naturales verifique que $g(n) = (n-1)!$. Esto nos lleva, naturalmente a presentar a la función Gamma.

Definición 1. *Sea $A = \{z \in \mathbb{C}/\Re(z) > 0\}$. Definimos la* ***función Gamma*** *como*

$$\begin{aligned} \Gamma &: A \to \mathbb{C} \\ z &\to \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-p}p^{z-1}\mathrm{d}p. \end{aligned}$$

Nota 1. *La función Gamma así definida es una función analítica en su dominio, más aún, se prolonga analíticamente a una función que seguiremos llamando $\Gamma(z)$ sobre el dominio $\Omega = \mathbb{C} - \{z = -n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ dada por*

$$\Gamma : \Omega \to \mathbb{C}/\ \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t.$$

Proposición 1. *Para todo $z \in \Omega$ se verifica que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*

Demostración. Sea $z \in \Omega$. Entonces

$$\begin{aligned} z\Gamma(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{z}{n+z} + z\int_1^\infty e^{-p}p^{z-1}\mathrm{d}p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{z+n-n}{n+z} + \int_1^\infty e^{-p}zp^{z-1}\mathrm{d}p = \\ &= e^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{n}{n+z} + \left[p^z e^{-p}\big|_1^\infty + \int_1^\infty e^{-p}p^z\mathrm{d}p \right] = \Gamma(z+1). \end{aligned}$$

□

Claramente de la Proposición 1 se desprende que si evaluamos la función Gamma en un número natural n entonces $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)!$, y esto nos permite pensar en la siguiente generalización

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \alpha}}{({}_aI^{n}}f)(t) = \underset{\substack{\downarrow\\ \Gamma(\alpha)}}{\frac{1}{(n-1)!}}\int_a^t \underset{\substack{\downarrow\\ \alpha}}{(t-\tau)^{n-1}} f(\tau)d\tau$$

Figura 2: Generalización.

Definición 2. *Sea $(a,b) \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Para toda $f \in L^1(a,b)$ definimos la integral fraccionaria de Riemann–Liouville de orden α como*

$$ {}_aI^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau, \quad \textit{p.c.t.p. en } (a,b).$$

Si $\alpha = 0$, definimos ${}_aI^0 f(t) = f(t)$, el operador identidad.

Nota 2. *Así como ocurre con la mayoría de los conceptos matemáticos, se puede definir al operador ${}_aI^{\alpha}$ en diferentes dominios que dan lugar a diferentes desarrollos y propiedades.*

1. *En el libro de Podlubny [10], se define la integral fraccionaria de Riemann-Liouville en el conjunto de funciones continuas en el abierto (a,b) que pueden tener una singularidad de orden $r < 1$ en $t = a$,*

$$D = \left\{ f \,:\, f \in \mathcal{C}(a,b) \cap L^1(a,b) \ \textit{ y existe } r < 1 \ \textit{ tal que } \lim_{t\to a^+} (t-a)^r f(t) = c \neq 0 \right\}$$

2. *En los libros de Kilbas et. al. [**?**] y Samko et. al. [13], por ejemplo, nos encontramos con el desarrollo para funciones en $L^1(a,b)$, (que es el enfoque que veremos en este curso) y funciones en $L^p(a,b)$ con $p \in (1,\infty)$. Además se puede probar que la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α es la potencia de orden α del operador integral clásico ${}_aI^1$ (ver [12, Ch. 1]).*

3. *En [9] se puede encontrar el desarrollo de esta teoría considerando como dominio al espacio de Hilbert $L^2(a,b)$ y se prueba que la imagen es el espacio de Sobolev fraccionario ${}_0H^{\alpha}(a,b)$.*

Veamos entonces algunas propiedades según nuestro enfoque.

Proposición 2. *Sean $f \in L^1(a,b)$ y $\alpha > 0$. Luego, la integral ${}_aI^{\alpha} f$ es una función de $L^1(a,b)$.*

Demostración. Notemos que podemos pensar a la integral $\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\mathrm{d}\tau$ como la convolución de las siguientes funciones

$$\chi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } 0 < t \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \quad \text{y} \quad \tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } a < t < b \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Esto es

$$ {}_aI^{\alpha} f(t) = (\chi_\alpha * f)(t).$$

Ahora bien, recordando la desigualdad de Young para la convolución de funciones que nos asegura que si $g \in L^q(a,b)$ y $f \in L^p(a,b)$ con $p,q \in [1,\infty)$, y $r \in \mathbb{R}$ es tal que $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, entonces se verifica que

$$||g * f||_r \leq ||g||_q ||f||_p,$$

deducimos que ${}_aI^{\alpha} f$ es una función en $L^1(a,b)$ tomando el caso particular $g = \chi_\alpha$, $p = q = r = 1$.[1] $\square$

[1] Se puede ver la demostración del caso $q = 1$ en [3, p.66]

Definición 3. *Llamaremos* ${}_aI^\alpha(L^1)$ *al recorrido del operador* ${}_aI^\alpha$.

Claramente ${}_aI^\alpha(L^1) \subset L^1(a,b)$ y se puede mostrar que la contención es esctricta (como lo veremos más adelante).

Bien, ya sabemos que está bien definida y que es una función de $L^1(a,b)$. Estudiemos algunas propiedades más. Por ejemplo, sea $f \in L^1(a,b)$, ¿qué ocurre si aplicamos integrales fraccionarias en forma interada?

$$ {}_aI^\alpha\left({}_aI^\beta f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^\tau (\tau-p)^{1-\beta} f(p)\mathrm{d}p\right]\mathrm{d}\tau. \tag{4}$$

Aplicando Fubini (ver Figura 2) para el cambio en el orden de integración resulta

$$ {}_aI^\alpha\left({}_aI^\beta f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(p)\int_p^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-p)^{\beta-1}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}p. \tag{5}$$

O sea que si logramos calcular la integral $\int_p^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-p)^{\beta-1}\mathrm{d}\tau$, tendremos una expresión para nuestra integral iterada. Observemos que, si trasladamos esta integral mediante la sustitución $w=\tau-p$ y luego normalizamos mediante la sustitución $v=\frac{w}{t-p}$ resulta

$$\int_p^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-p)^{\beta-1}\mathrm{d}\tau = \int_0^{t-p}(t-p-w)^{\alpha-1}w^{\beta-1}\mathrm{d}w = (t-p)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}\mathrm{d}v. \tag{6}$$

La última expresión en (6), la integral $\int_0^1(1-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}\mathrm{d}v$, en caso de que sea finita toma valores que dependen sólo de los parámetros α y β. En efecto, esta expresión como función de α y β es una función especial conocida definida a continuación.

Definición 4. *Sea* $\Theta = \left\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \,/\, \Re(z)>0,\ \Re(w)>0\right\}$. *Definimos la* ***función Beta*** *como*

$$B:\Theta\to\mathbb{C} \,/\, B(z,w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau.$$

La función Beta está ligada a la función Gamma según se muestra a continuación y se puede ver una demostración del siguiente resultado en el Apéndice.

Proposición 3. *La función* ***Beta*** *está bien definida y verica que*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{7}$$

Juntando entonces (5), (6) y aplicando (7) deducimos que

$$ {}_aI^\alpha\left({}_aI^\beta f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(p)(t-p)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\mathrm{d}p = {}_aI^{\alpha+\beta}f(t). \tag{8}$$

Proposición 4. *El conjunto de operadores* $\left\{{}_aI^\alpha : L^1(a,b)\to L^1(a,b);\ \alpha\geq 0\right\}$ *junto con la operación composición forman un semigrupo conmutativo donde el operador* ${}_aI^0$ *es el elemento neutro.*

Demostración. Se deduce directamente de (8). □

Ejemplo 1. *Integral fraccionaria de orden* $\alpha>0$ *de una función potencia. Sea* $\beta>-1$ *y sea* $f(t)=(t-a)^\beta$ *definida en* (a,b). *Entonces*

$$ {}_aI^\alpha((t-a)^\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (\tau-a)^\beta(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\beta+\alpha}. \tag{9}$$

Veamos qué ocurre si trabajamos con funciones con un poco más de regularidad que el sólo hecho de ser integrables.

Definición 5. *Diremos que una función es absolutamente continua en un intervalo* $[a,b]$*, y notaremos* $f \in AC[a,b]$*, si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que para todo conjunto finito de intervalos disjuntos* $[a_k, b_k] \subset [a,b]$*,* $k = 1, 2, \ldots, n$*, tal que* $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$*, resulta que* $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$*.*

Proposición 5. *El espacio de las funciones absolutamente continuas coincide con el espacio de primitivas de funciones Lebesge integrables. Esto es:*

$$f \in AC[a,b] \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1(a,b) \,/\, f(t) = f(a) + \int_a^t \varphi(s)\mathrm{d}s, \, \forall t \in [a,b]. \tag{10}$$

Nota 3. *Podemos decir entonces que las funciones absolutamente continuas tienen derivada* φ *en* $L(a,b)$ *pctp. Más aún, nos referiremos a esta función* φ *como* f'*.*

Nota 4. *El recíproco no es cierto. En efecto, si consideramos la función de Cantor* $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *que es monótona creciente,* $\phi(0) = 0$*,* $\phi(1) = 1$ *y su restricción a cualquier intervalo con extremos en el conjunto de Cantor es constante (de donde sabemos que* $\phi' = 0$ *pctp en (0,1)), resula que* ϕ *no es absolutamente continua ya que*

$$\phi(t) \neq \phi(0) + \int_0^t \phi' = 0 \quad \forall t \in (0,1].$$

Proposición 6. *Sea* $f \in AC[a,b]$ *y* $\alpha \in (0,1)$*. Entonces* ${}_aI^{1-\alpha}f \in AC[a,b]$ *y*

$${}_aI^{1-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[f(a)(t-a)^{1-\alpha} + \int_a^t f'(\tau)(t-\tau)^{1-\alpha}\mathrm{d}\tau\right]. \tag{11}$$

Demostración. Reemplazando (10) en la definición de integral fraccionaria e integrando el primer término resulta que

$${}_aI^{1-\alpha}f(t) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)}(t-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t \left(\int_a^\tau f'(s)\mathrm{d}s\right)(t-\tau)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau. \tag{12}$$

Claramente el primer sumando corresponde a una función absolutamente continua. Aplicando Fubini en el segundo sumando

$$\int_a^t \left(\int_a^\tau f'(s)\mathrm{d}s\right)(t-\tau)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau = \int_a^t f'(s)\left(\int_s^t (t-\tau)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s = \int_a^t f'(s)\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\mathrm{d}s. \tag{13}$$

Ahora bien, llamando $g(t) = \int_a^t f'(s)(t-s)^{1-\alpha}\mathrm{d}s$, siendo $f' \in L^1(a,b)$ y $(t-\cdot)^{1-\alpha}$ continua en $[a,b]$, se puede aplicar teorema de derivación de integral con parámetro y resulta que $g'(t) = (1-\alpha)\int_a^t f'(s)(t-s)^{-\alpha}\mathrm{d}s = (1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\,{}_aI^{1-\alpha}f'(t)$. Por la Proposición 2 resulta que $g' \in L^1(a,b)$, de donde g es absolutamente continua y volviendo a (12) deducimos que ${}_aI^{1-\alpha}f \in AC[a,b]$. Finalmente, reemplazando (13) en (12) obtenemos (11).

□

De la Proposición anterior deducimos que si $f \in AC[a,b]$ entonces ${}_aI^{1-\alpha}f$ es en particular continua con ${}_aI^{1-\alpha}f(a) = 0$.
Por otro lado, observemos que si relajamos la hipótesis y pedimos sólo a f que tenga derivada en L^1, no necesariamente se verifica la tesis. En efecto, si consideramos la función $f(t) = (t-a)^{-3/4}$, y $\alpha = \frac{1}{2}$, aplicando (9) resulta que

$${}_aI^{1-1/2}f(t) = {}_aI^{1/2}(t-a)^{-3/4} = \frac{\Gamma(-3/4+1)}{\Gamma(1/2-3/4+1)}(t-a)^{1/2-3/4} = \frac{1/4}{3/4}(t-a)^{-1/4} \to \infty \quad \text{si } t \to a^+. \tag{14}$$

Proposición 7. *Sea* $\alpha \in (0,1)$*. Entonces* $f \in {}_aI^\alpha(L^1)$ *si y sólo si* $I^{1-\alpha}f \in AC[a,b]$ *y* $I^{1-\alpha}f(a) = 0$.

Demostración. Si $f \in {}_aI^\alpha(L^1)$, entonces $f = {}_aI^\alpha\varphi$ para una $\varphi \in L^1(a,b)$. Aplicando la Proposición 4, tenemos que ${}_aI^{1-\alpha}f = {}_aI^1\varphi$ y con esto se deduce la tesis.
Para el recíproco, supongamos que $I^{1-\alpha}f \in AC[a,b]$ y $I^{1-\alpha}f(a) = 0$, entonces existe una $\varphi \in L^1$ tal que ${}_aI^{1-\alpha}f = {}_aI^1\varphi = {}_aI^{1-\alpha+\alpha}\varphi = {}_aI_a^{1-\alpha}I^\alpha\varphi$. Luego ${}_aI^{1-\alpha}[f - {}_aI^\alpha\varphi] = 0$ y por Proposición 10 resulta $f = {}_aI^\alpha\varphi$. □

Antes de terminar esta sección resolvamos la ecuación de Abel. Recordemos que queremos hallar una función f (*curva*) conociendo T (*tiempo que tarda en llegar a un punto cuando se suelta desde una altura* y).

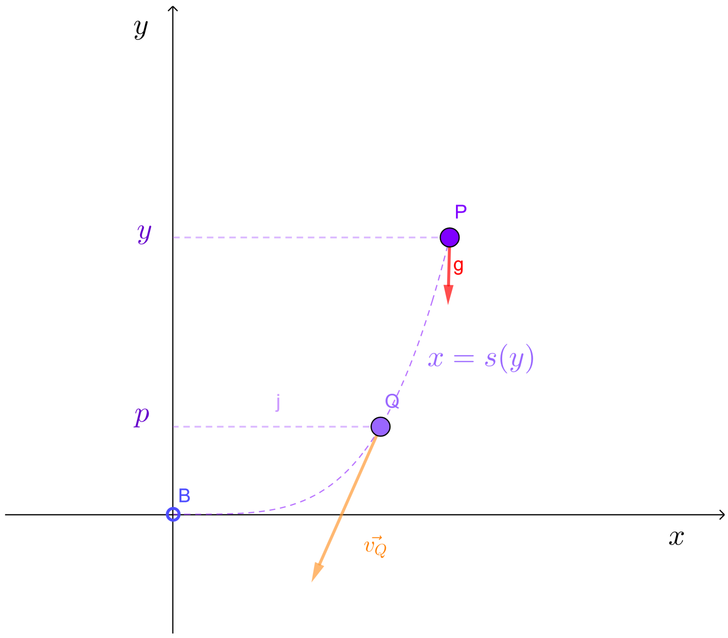

Figura 3: El Problema de la Braquistócrona.

Ahora bien, supongamos que nuestro dato del tiempo de descenso está dado por la función $t = T(y)$, y que esta función admite inversa dada por $y = R(t)$. Por otro lado tenemos nuestra función incógnita que representa la curva sobre la que rueda la cuenca, a la que vamos a representar como una función en la variable y, esto es

$$x = s(y), \quad \text{o bien} \quad x = s(R(t)). \tag{15}$$

Por otro lado planteando el principio de conservación de la energía, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{E. Potencial (P)} + \text{E. Cinética (P)} &= \text{E. Potencial (Q)} + \text{E. Cinética (Q)} \\ mgy + 0 &= mgp + \tfrac{1}{2}mv_s^2 \\ 2mg(y-p) &= mv_s^2 \\ -\sqrt{2g(y-p)} &= v_s \end{aligned}$$

$$1 = \frac{v_s}{-\sqrt{2g(y-p)}} \tag{16}$$

Ahora bien, v_s es la velocidad sobre la curva. Si queremos expresarla en función del tiempo lo podemos hacer de la siguiente manera

$$\begin{aligned} v_s(t) &= -|\overrightarrow{v}(Q)| = -\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = -\sqrt{[s'(R(t))R(t)]^2 + [R'(t)]^2} \\ &= -R'(t)\sqrt{[s'(R(t))]^2 + 1}. \end{aligned}$$

Expresando (16) en función de t e integrando entre $t_0 = T(y) = 0$ y $t_1 = T(0)$ resulta

$$T(0) - T(y) = \int_{T(y)}^{T(0)} \frac{-R'(t)\sqrt{[s'(R(t))]^2 + 1}}{-\sqrt{2g(y - R(t))}} \mathrm{d}t. \tag{17}$$

Haciendo la sustitución $R(t) = p$ en (17),

$$\begin{aligned} -T(y) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_y^0 \frac{\sqrt{s'(p)^2 + 1}}{\sqrt{2g(y-p)}} \mathrm{d}p \\ T(y) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{\sqrt{s'(p)^2 + 1}}{\sqrt{2g(y-p)}} \mathrm{d}p \end{aligned}$$

Llmanado $f(y) := \sqrt{s'(p)^2 + 1}$ tenemos finalmente la ecación de Abel presentada en (1) que volvemos a escribir a continuación

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y (y-p)^{-1/2} f(p) \mathrm{d}p. \tag{18}$$

Resolvámosla suponiendo que las funciones cuentan con toda la regularidad necesaria. Expresando (18) en términos de integrales fraccionarias, resulta que

$$T(y) = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{2g}} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^y (y-p)^{1/2-1} f(p) \mathrm{d}p = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{2g}} \, {}_0I^{1/2} f(y). \tag{19}$$

Aplicando ${}_0I^{1/2}$ a ambos miembros de (19) y utilizando la propiedad de semigrupo asociativo de estos operadores deducimos que

$${}_0I^{1/2} T(y) = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{2g}} \, {}_0I^1 f(y). \tag{20}$$

Finalmente derivando, tenemos que

$$f(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dy} \left({}_0I^{1/2} T(y) \right). \tag{21}$$

Recordando la expresión que utilizó Abel en (2), y utilizando el hecho de que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (Ver en Anexo Corolario 3 item 2), nos preguntamos si será correcto pensar en la siguiente igualdad de operadores...

$$\frac{d^{1/2}}{dy^{1/2}} = \frac{d}{dy} \, {}_0I^{1/2}. \tag{22}$$

3. Derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo

3.1. Definición y propiedades básicas

Claramente, contando con un concepto adecuado para definición de integral de orden arbitrario, nuestro próximo paso es ir por el operador inverso, al que llamaremos derivada de orden arbitrario. De la resolución de la ecuación de Abel se deduce una propuesta: Si cambiamos $1/2$ por α en (22) podríamos decir que, si $\alpha \in (0, 1)$, entonces

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \frac{d}{dt} \left({}_aI^{1-\alpha} f \right)(t).$$

Ahora bien, si $\alpha > 1$ podemos considerar un natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 < \alpha \leq n$, y entonces $\alpha = (n-1) + (1 - (n - \alpha))$ donde $1 - (n - \alpha) \in (0, 1)$ y ya tenemos una idea para la expresión

$\frac{d^{1-(n-\alpha)}}{dt^{1-(n-\alpha)}}$. Entonces, suponiendo que podemos calcular la derivada α calculando dos derivadas sucesivas, podríamos escribir

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{d^{1-(n-\alpha)}}{dt^{1-(n-\alpha)}} f(t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{d}{dt} \, {}_aI^{n-\alpha} f \right)(t) = \frac{d^n}{dt^n} \, {}_aI^{n-\alpha} f(t). \tag{23}$$

Bien, veremos que no siempre es posible aplicar derivadas fraccionarias en forma sucesiva, pero la idea para definir el operador derivada fraccionaria de Riemann–Liouville está muy ligada a (23) y nos lleva a presentar con naturalidad el siguiente espacio de funciones asociado al concepto que estamos buscando.

Definición 6. *Notaremos con $AC^n[a,b]$ al conjunto de funciones derivables con derivada continua hasta el orden $(n-1)$, tal que la derivada $(n-1)$ es absolutamente continua, esto es, funciones $f \in C^{(n-1)}[a,b]$ para las cuales existe c.t.p. una función $g \in L^1(a,b)$ tal que*

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Claramente, $f^{(n-1)}$ es derivable p.c.t.p. y notaremos $f^{(n)} = g$.

Proposición 8. *El espacio de funciones $AC^n[a,b]$ está constituido sólo por funciones f que pueden ser representadas de la siguiente manera*

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} \varphi(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (t-a)^k = \, {}_aI^n \varphi(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (t-a)^k \tag{24}$$

donde $\varphi \in L^1(a,b)$, c_k constantes arbitrarias.

Demostración. Sea $f \in AC^n[a,b]$. Por definición, $f \in C^{(n-1)}(a,b)$ y existe una función integrable a la que llamaremos $f^{(n)}$ tal que

$$f^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(a) + \, {}_aI^1 f^{(n)}(t). \tag{25}$$

Integrando $n-1$ veces (25) entre a y t,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k + \, {}_aI^n f^{(n)}(t). \tag{26}$$

Finalmente, reemplazando la fórmula de Cauchy (3) en (26), resulta que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \tag{27}$$

La recíproca es trivial derivando $(n-1)$–veces y utilizando la Definición 6. □

Observación 1. *Según la Definición 6 y la caracterización dada en la Proposición 8, si $f \in AC^n[a,b]$ entonces*

$$f(t) = \, {}_aI^n f^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k. \tag{28}$$

Luego, a partir de (28) y utilizando las Proposiciones 4 y 6 se puede ver que para $n-1 < \alpha \leq n$ se verifica que

$$f \in AC^n[a,b] \Rightarrow \, {}_aI^{n-\alpha} f \in AC^n[a,b].$$

Corolario 1. *Sea $0 < n-1 \leq \alpha < n$. Entonces $f \in_a I^\alpha(L^1)$ si y sólo si ${}_aI^{n-\alpha} f \in AC^n[a,b]$ y $\frac{d^k}{dt^k} \, {}_aI^{n-\alpha} f(a) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Definición 7. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $n-1 < \alpha \leq n$ y sea $f \in AC^n[a,b]$. Llamaremos derivada de Riemann–Liouville de orden α a*

$$ {}_a^{RL}D^{\alpha} f(t) = \left[D^n_a I^{n-\alpha} f \right](t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. $$

Si $\alpha = 0$, definimos ${}_a^{RL}D^0 f(t) = f(t)$, el operador identidad.

Observación 2. *Contrariamente al caso entero, la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville es un operador no local, quedando definido por medio de una integral que depende de los valores que la función asuma en todo el intervalo de integración.*

Proposición 9. *Sea $\alpha / n-1 < \alpha \leq n$ y sean f y g en $AC^n[a,b]$. El operador Derivada fraccionaria de Riemann–Liouville verifica las siguientes propiedades:*

1. *Linealidad:*

$$ {}_a^{RL}D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda\, {}_a^{RL}D^{\alpha} f(t) + \mu\, {}_a^{RL}D^{\alpha} g(t), \quad p.c.t.p. \text{ en } (a,b). $$

2. *Si $\alpha \in \mathbb{N}$, pongamos $\alpha = n$, entonces ${}_a^{RL}D^n f = \frac{d^n}{dt^n} f \quad p.c.t.p.$ en (a,b)..*

3. *El operador derivación fraccionaria de Riemann–Liouville es un inverso a izquierda del operador integración fraccionaria de Riemann–Liouville de mismo orden α,*

$$ {}_a^{RL}D^{\alpha}\, {}_aI^{\alpha} f(t) = f(t) \quad p.c.t.p. \text{ en } (a,b). $$

Demostración. El item 1 es trivial. Para 2 basta notar que p.c.t.p. en (a,b), se tiene que $\left({}_a^{RL}D^n f\right)(t) = [D^n\, {}_aI^{n-n} f](t) = \left[D^n\, {}_aI^0 f\right](t) = f^{(n)}(t)$. Finalmente para el item 3 utilizaremos el Teorema Fundamental del Cálculo[2] y la Proposición 4 obteniendo que

$$ {}_a^{RL}D^{\alpha}\, {}_aI^{\alpha} f(t) = D^n({}_aI^{n-\alpha}({}_aI^{\alpha} f(t)) = D^n({}_aI^n f(t)) = f(t) \quad p.c.t.p. $$

□

Proposición 10. *Sea $\alpha > 0$. El operador ${}_aI^{\alpha} \colon L^1(a,b) \to L^1(a,b)$ es inyectivo.*

Demostración. El resultado surge directamente de plantear la ecuación ${}_aI^{\alpha}\varphi = 0$ y aplicar ${}_a^{RL}D^{\alpha}$ a ambos miembros.

□

Ejemplo 2. *Vimos en* (9) *que, para todo $\beta > -1$ la integral fraccionara de RL se puede calcular por la fórmula*

$$ {}_aI^{\alpha}((t-a)^{\beta}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^{\beta} d\tau = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (t-a)^{\beta+\alpha}. $$

De este resultado se desprende que, si $n-1 < \alpha \leq n$, y $\beta = \alpha - j$ para $j = 1, ..., n$,

$$ \begin{aligned} {}_a^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j} &= \frac{d^n}{dt^n}(\,{}_aI^{n-\alpha}((t-a)^{\alpha-j}) = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(\alpha-j+n-\alpha+1)}(t-a)^{\alpha-j+n-\alpha}\right] \\ &= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(-j+n+1)}(t-a)^{-j+n}\right] = 0. \end{aligned} $$

Si $\beta \neq \alpha - j$, $j = 1, ..., n$,

$$ {}_a^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{d^n}{dt^n}(\,{}_aI^{n-\alpha}(f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}(t-a)^{\beta+n-\alpha}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)(t-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}. $$

[2]**TFC:**[11] Si $f \in L^1(a,b)$ y $F(t) = \int_a^t f(\tau) \mathrm{d}\tau$, entonces $F'(t) = f(t)$ p.c.t.p. en (a,b).

Luego

$$ {}_a^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} & si\ \beta \neq \alpha - j, j = 1, ..., n \\ 0 & si\ \beta = \alpha - j, j = 1, ..., n. \end{cases} \tag{29} $$

Algunas observaciones importantes que se despurenden del Ejemplo anterior:

- Si consideramos el caso $\beta = 0$ en (29) nos encontramos con el primer resultado “antiintuitivo” desde que comenzamos a desarrollar el tema: La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una constante no es cero! En efecto:

$$ {}_a^{RL}D^{\alpha}(k) = k\, {}_a^{RL}D^{\alpha}(1) = k\, {}_a^{RL}D^{\alpha}((t-a)^0) = \frac{\Gamma(1)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^{\alpha}}. \tag{30} $$

- Podemos decir que las funciones $(t-a)^{\alpha-j}, \quad j = 1, 2, ..., n$ cumplen el rol que las potencias naturales (con exponentes menores al orden de derivación) desarrollan en la derivación entera, para el operador derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α.

- Si tomamos valores de $\beta \in (-1, 0)$, estamos aplicando el operador DRL a funciones que no son absolutamente continuas. Esto no contradice la Definición 7, sino que nos dice que podemos aplicar el operador en funciones que no están en el espacio en el que decidimos trabajar. Pero debemos tener cuidado ya que nos podemos encontrar con casos patológicos como el siguiente:

  Consideremos la función $f(t) = t^{-1/2}$ y sean $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Aplicando (29) resulta que ${}_0^{RL}D^{\alpha_1}f(t) = {}_0^{RL}D^{\alpha_2}f(t) = 0$, de donde

$$ {}_0^{RL}D^{\alpha_1}\left({}_0^{RL}D^{\alpha_2}f(t)\right) = {}_0^{RL}D^{\alpha_1}(0) = 0 $$

  mientras que,

$$ {}_0^{RL}D^{\alpha_1+\alpha_2}f(t) = {}_0^{RL}D^{1}f(t) = f'(t) = -\frac{1}{2t^{3/2}}. $$

Teorema 1. *Sea $\alpha > 0$ y $f \in AC^n[a,b]$. Entonces ${}_a^{RL}D^{\alpha}f$ existe para casi todo punto y puede represntarse de la siguiente manera*

$$ {}_a^{RL}D^{\alpha}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}\tau. \tag{31} $$

Demostración. Sea $f \in AC^n[a,b]$. Por Observación 1,

$$ f(t) = {}_aI^n f^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k. $$

Aplicando la Definición 7, la Proposición 9, la Proposición 4 y (29),

$$ \begin{aligned} {}_a^{RL}D^{\alpha}f(t) &= \left[D^n\, {}_aI^{n-\alpha}f\right](t) = D^n\, {}_aI^{n-\alpha}\left[{}_aI^n f^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \\ &= D^n\left[{}_aI^{n-\alpha}\, {}_aI^n f^{(n)}(t)\right] + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\, {}_a^{RL}D^{\alpha}\left[(t-a)^k\right] \\ &= D^n\, {}_aI^n\left[{}_aI^{n-\alpha}\, f^{(n)}(t)\right] + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} \end{aligned} $$

$$= {}_aI^{n-\alpha} f^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \mathrm{d}\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha}.$$

Como $f^{(n)} \in L^1(a,b)$ y $n-\alpha > 0$, la Proposición 2 nos asegura que ${}_aI^{n-\alpha} f^{(n)}(t)$ existe p.c.t.p, y con esto resulta la tesis. □

La caracterización (31) nos permite apreciar con claridad que este tipo de derivada presenta singularidades de orden $\alpha - k$ para $k = 0, ..., n-1$.

En particular, si $0 < \alpha < 1$ la relación (31) es

$$ {}_a^{RL}D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} \mathrm{d}\tau + \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^\alpha}. \tag{32}$$

Luego, si f es una función en $AC[a,b]$ tal que $f(a) = 0$, entonces

$$ {}_a^{RL}D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} \mathrm{d}\tau = \left[{}_aI^{1-\alpha} f' \right](t). \tag{33}$$

Más aún, volviendo a la igualdad (30), notamos que $\frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^\alpha} = {}_a^{RL}D(f(a))$, y entonces (32) equivale a

$$ {}_a^{RL}D^\alpha [f(t) - f(a)] = \left[{}_aI^{1-\alpha} f' \right](t)$$

Es aquí donde le damos la bienvenida a M. Caputo [4], quien estudiando un problema de discipación de energía en el que los modelos con derivadas clásicas no eran consistentes, propone operador difernecial fraccionario para relacionar la tensión y la deormación que no tuviera los problemas de singularidad que tiene la derivada de Riemann-Liouville, pero que a su vez mantuviera la escencia del mismo, definiendo un nuevo operado diferencial que presentamos a continuación.

Definición 8. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $n-1 < \alpha \leq n$ y sea $f \in AC^n[a,b]$. Llamaremos derivada de Caputo de orden α a*

$$ {}_a^{C}D^\alpha f(t) = \left[{}_aI^{n-\alpha} f^{(n)} \right](t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

El Teorema 1 nos asegura que la Definición 8 es una buena definición.

Nota 5. *Claramente teniendo en mente la caracterización (31) y lo analizado para el caso $\alpha \in (0,1)$, pordrámos haber definido a la derivada de Caputo como*

$$ {}_a^{C}D^\alpha f(t) = {}_a^{RL} D^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right]. \tag{34}$$

Ejemplo 3. *Derivada de Caputo de las potencias $(t-a)^\beta$. A diferencia de la derivada de RL, no es posible calcular la derivada de Caputo para valores de $\beta \in (-1, 0)$.*
Para el caso $\beta = 0$, tenemos la función constante $g(t) = 1$, y siendo $g' \equiv 0$ deducimos que ${}_a^{C}D^\alpha(1) = 0$. Más aún, debido a la linealidad del operador, la derivada de Caputo de una constante cualquiera es cero!

$$ {}_a^{C}D^\alpha(K) = 0, \quad \forall K \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

Por otro lado, siendo $n-1 < \alpha \leq n$ también es trivial que ${}_a^{C}D^\alpha (t-a)^j = 0$ para todo $j = 0, 1, ..., n-1$. Por último, para $\beta \neq j$, con $j = 0, 1, ..., n-1$, podemos aplicar la definición junto con el resultado del Ejercicio 1 y resulta que

$$ {}_a^C D^\alpha (t-a)^\beta = {}_a I^{n-\alpha}[\beta(\beta-1)...(\beta-n+1)(t-a)^{\beta-n}] = \beta(\beta-1)...(\beta-n+1)\frac{\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n+n-\alpha} $$

y utilizando la Proposición 1 resulta que

$$ {}_a^C D^\alpha (t-a)^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} & si\ \beta \neq j, j = 0, ..., n-1 \\ 0 & si\ \beta = j, 0 = 1, ..., n-1. \end{cases} \tag{36} $$

Antes del próximo ejemplo vamos a presentar a una de las funciones más importantes asociadas al cálculo fraccionario y es una función que puede cumplir el rol que cumple la función exponencial para en el cálculo diferencial clásico.

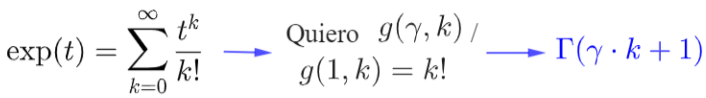

Figura 4: Posible definición.

Definición 9. *Llamaremos función de Mittag-Leffler a la función definida para todo $z \in \mathbb{C}$ por*

$$ E_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\gamma k + 1)}, \quad \forall \gamma > 0. \tag{37} $$

Se puede ver que la función (37) es una función entera (ver por ejemplo [6, Teorema 4.1]), luego la serie converge uniformemente sobre conjuntos compactos.

Proposición 11. ${}_a^C D^\alpha E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha) = \lambda E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha), \quad \alpha > 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\alpha > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Notemos que siendo el radio de oconvergencia de la serie (37) infinito, la función de ML y sus derivadas convergen uniformemente sobre compactos y es lícito entonces intercambiar serie y derivada, así como también integral y serie. Realizando entonces estos intercambios, haciendo luego la sustitución $\tau = (t+a)s + a$ y aplicando finalmente la Proposición 19 resulta que

$$ \begin{aligned} {}_a^C D^\alpha E_{\alpha,1}(\lambda(t-a)^\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{(\tau-a)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} \right) \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k (\alpha k(\alpha k-1)...(\alpha k-n+1))}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\alpha k-n} \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k-n+1)} \int_0^{\frac{t-a}{t+a}} (t+a)^{\alpha k-\alpha} \left(\frac{t-a}{t+a} - s \right)^{n-\alpha-1} s^{\alpha k-n} \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k-n+1)} (t+a)^{\alpha k-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha k+1-n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\alpha k-\alpha+1)} \left(\frac{t-a}{t+a} \right)^{\alpha k-\alpha} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k-\alpha+1)} (t-a)^{\alpha k-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \frac{(t-a)^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha(k-1)+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \frac{(t-a)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{(t-a)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} = \lambda E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha). \end{aligned} $$

□

3.2. Convergencia

Definición 10. *Sea $f \in L^1(a,b)$ y sea $t_0 \in [a,b]$. Diremos que t_0 es un punto de Lebesgue de f si*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t f(t_0-s)\mathrm{d}s = f(t_0) \tag{38}$$

Proposición 12. *Sea $f \in L^1(a,b)$. Entonces $\lim\limits_{\alpha\searrow 0} {}_aI^\alpha f(t) = f(t)$ p.c.t.p en (a,b).*

Demostración. Probaremos que este resultado ocurre en cada punto de Lebesgue de f y utilizando [11, Teorema 7.15], que nos asegura que si $f \in L^1(a,b)$, entonces casi todo punto en (a,b) es un punto de Lebesgue, obtendremos que nuestra conclusión vale p.c.t.p. en (a,b).

Sea t_0 un punto de Lebesgue de f, y definimos la función $\Phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi(t) = \int_{t_0-t}^t f(s)\mathrm{d}s = \int_0^t f(t_0-s)\mathrm{d}s \tag{39}$$

Luego, teniendo en cuenta la Defínción (10), tenemos que

$$\frac{\Phi(t)}{t} - f(t_0) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(t_0-s)-f(t_0)]\mathrm{d}s \to 0, \quad \text{si } t\to 0 \tag{40}$$

y podemos asegurar que

$$\Phi(t) = t[f(t_0)+b(t)] \quad \text{ donde } \lim_{t\to 0} b(t) = 0. \tag{41}$$

Calculemos ahora la integral fraccionaria de orden α de f en t_0.

$$[\,{}_aI^\alpha f](t_0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_0}\frac{f(\tau)}{(t_0-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_0-a} t^{\alpha-1}f(t_0-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_0-a} t^{\alpha-1}\Phi'(t)\mathrm{d}t.$$

Observemos que la última expresión nos lleva a calcular una integral impropia que es el límite de integrales en intervalos $[\varepsilon, t_0-a]$, donde las funcines $g(t) = t^{\alpha-1}$ y Φ son absolutamente continuas, y esto nos habilita a utilizar integración por partes. Luego, aplicando (41) resulta

$$\begin{aligned}
[\,{}_aI^\alpha f](t_0) &= \frac{\Phi(t_0-a)}{\Gamma(\alpha)(t_0-a)^{1-\alpha}} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Phi(t)}{t^{1-\alpha}}\bigg|_{t=0} + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_0-a}\frac{\Phi(t)\mathrm{d}t}{t^{2-\alpha}} \\
&= \frac{\Phi(t_0-a)}{\Gamma(\alpha)(t_0-a)^{1-\alpha}} + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_0-a}\frac{t[f(t_0)+b(t)]}{t^{2-\alpha}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\Phi(t_0-a)}{\Gamma(\alpha)(t_0-a)^{1-\alpha}} + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_0-a} f(t_0)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\delta} b(t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t + \\
&\qquad + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_\delta^{t_0-a} b(t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Restando $f(t_0)$ a ambos mienbros y acotando,

$$\begin{aligned}
|{}_aI^\alpha f(t_0) - f(t_0)| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{\Phi(t_0-a)}{(t_0-a)^{1-\alpha}}\right| + |f(t_0)|\left|\frac{(1-\alpha)(t_0-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - 1\right| + \\
+ \frac{M\delta^\alpha(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}C(t_0+a,\delta)
\end{aligned} \tag{42}$$

Tomando límite cuando $\alpha \to 0^+$ a ambos lados de la desigualdad y utilizando el hecho de que $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = 0$ (ver Corolario 3 item (1) en el Anexo), se deduce la tesis. □

Con este resultado se desprende directamente el resultado de convergencia para derivadas de Caputo.

Proposición 13. *Sea $n-1<\alpha\leq n$. Entonces:*

a) Si $f\in AC^n[a,b]$, entonces

$$\lim_{\alpha\nearrow n} {}_a^C D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t), \quad \textit{p.c.t.p. en } (a,b).$$

b) Si además $f\in C^n[a,b]$, entonces

$$\lim_{\alpha\nearrow 1} {}_a^C D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t) \qquad \textit{para todo } t\in(a,b].$$

Demostración. Para el item a) basta notar que $f^{(n)}\in L^1(a,b)$, ${}_a^C D^\alpha f(t) = \left[{}_a I^{n-\alpha} f^{(n)}\right](t)$ y aplicamos la Proposición 12 ya que $n-\alpha\to 0^+$. Respecto del item b), notemos que si $f^{(n)}$ es continua en $[a,b]$ entonces todo punto en el interior $t\in(a,b)$ es un punto de Lebesgue y entonces la convergencia en la Proposición 12 es válida para todo $t\in(a,b)$. □

Nota 6. *Notemos que si $f\in C[a,b]$ la convergencia puntual de la Proposición 12 no es necesariamente válida. En efecto, es fácil ver que, para todo $\alpha\in\mathbb{R}^+$ se tiene que*

$$ {}_aI^\alpha f(a) = \lim_{t\to a^+} {}_aI^\alpha f(t) = \lim_{t\to a^+}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\tau = 0. \tag{43}$$

Luego $\lim_{\alpha\to 0^+} {}_aI^\alpha f(a) = 0$ que no necesariamente coincide con el valor $f(a)$.

Proposición 14. *Sea $n-1<\alpha\leq n$. Entonces:*

a) Si $f\in AC^n[a,b]$, entonces

$$\lim_{\alpha\nearrow n} {}_a^{RL} D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t), \quad \textit{p.c.t.p. en } (a,b).$$

b) Si $f\in C^n[a,b]$, entonces

$$\lim_{\alpha\nearrow n} {}_a^{RL} D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t) \qquad \textit{para todo } t\in(a,b).$$

Demostración. El resultado es consecuencia de la caracterización (31) y el resultado de la proposición anterior. □

Veamos qué ocurre con el límite por derecha.

Proposición 15. *Sea $n-1<\alpha\leq n$ y $f\in AC^n[a,b]$. Entonces:*

a) $\lim_{\alpha\searrow n-1} {}_aI^\alpha f(t) = I^{(n-1)}f(t)$, p.c.t.p. (a,b).

b) Si $f\in AC^n[a,b]$, entonces

$$\lim_{\alpha\searrow n-1} {}^{C_a} D^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a), \quad \textit{p.c.t.p. en } (a,b).$$

c) Si $f\in AC^n[a,b]$, entonces

$$\lim_{\alpha\searrow n-1} {}_a^{RL} D^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t), \quad \textit{p.c.t.p. en } (a,b).$$

Demostración. Notemos sisedo $\alpha > n-1$ resulta que $\alpha = n-1+\beta$ con $\beta \in (0,1)$.
Luego, para el item a) teniendo en cuenta la propiedad asociativa (8) resulta que $\lim\limits_{\alpha \searrow n-1} {}_aI^\alpha f(t) = \lim\limits_{\beta \searrow 0} {}_aI^\beta (I^{(n-1)} f(t)) = I^{(n-1)} f(t)$, p.c.t.p. en (a,b).
Para el item b), razonando análogamente tenemos

$$\lim_{\alpha \searrow n-1} {}_a^C D^\alpha f(t) = \lim_{\beta \searrow 0} {}_aI^{n-(n-1+\beta)}[f^{(n)}](t) = \lim_{\beta \searrow 0} {}_aI^\beta[{}_aI^1 f^{(n)}](t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a).$$

Finalmente, aplicamos la igualdad (34) para calcular elúltimo límite. En efeco, del resultado b) sabemos que

$$\lim_{\alpha \searrow n-1} {}_a^C D^\alpha f(t) = \lim_{\alpha \searrow n-1} {}_a^{RL} D^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a). \tag{44}$$

y por la linealidad de la derivada de RL basta con calcular el límite de la siguiente expresión para obtener el resultado

$${}_a^{RL} D^\alpha \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} {}_a^{RL} D^\alpha (t-a)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}.$$

Ahora bien

$$\lim_{\alpha \searrow n-1} \frac{(t-a)^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-1-\alpha+1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n-1 \\ 0 & \text{si } k \in \{0,1,...,n-2\} \end{cases} \tag{45}$$

, ya que para valores de k menores que $n-1$, tenemos que $k-\alpha+1 \to k-n-1$ que es un entero negativo (polo de la función Gamma) y por lo tanto es un cero de la función recíproca de Gamma. Luego, utilizando (45) concluimos que

$$\lim_{\alpha \searrow n-1} {}_a^{RL} D^\alpha \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] = \lim_{\alpha \searrow n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} = f^{(n-1)}(a). \tag{46}$$

Finalmente, de (44) y (47) tenemos que

$$\lim_{\alpha \searrow n-1} {}_a^{RL} D^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t), \quad p.c.t.p \text{ en } (a,b). \tag{47}$$

□

4. Ecuaciones Diferenciales fraccionarias

4.1. Introducción y formulaciones integrales equivalentes.

La utilziación de ecuaciones diferenciales fraccionarias como herramientas de modelización cuenta con ventajas y desventajas, como suele ocurrir con la mayoría de los conceptos matemáticos que utilizamos para describir situaciones del mundo real.

Una de las ventajas más destacadas es la posibilidad de describir fenómenos en los que se aproveche la no-localidad del operador. De hecho se utiliza usualmente para describir procesos con memoria cuando estamos derivando respecto del tiempo. Pero si pensamos en la variable espacial, porían ser útiles para describir procesos en medios heterogéneos. Por otro lado, es claro también que podríamos pensar en utilzar una derivada fraccionaria que nos permita "ajustar" el valor de α para mejorar la precisión del modelo.

Como desventajas podemos mencionar que el modelo fraccionario suele ser más complejo a la hora de resolverlo (tanto analítica como numéricamente) debido a la no-localidad. Además debemos ser cuidadosos con la parte del problema relativa al planteo de las condiciones iniciales, y esto se explica a partir de los siguientes resultados.

Lema 1. *Sea $n-1<\alpha\leq n$ y $f\in AC^n[a,b]$, entonces*

$$ {}_aI^{\alpha}({}_a^{RL}D^{\alpha}f)(t)=f(t)-\sum_{m=1}^{n-1}{}_a^{RL}D^{\alpha-m}f(a^+)\frac{(t-a)^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)}-\ {}_aI^{n-\alpha}f(a)\frac{(t-a)^{\alpha-n}}{\Gamma(\alpha+1-n)}. \tag{48}$$

$$ {}_aI^{\alpha}\,{}_a^{C}D^{\alpha}f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k. \tag{49}$$

Es importante notar que, así copmo ocurre oara ecuaciones diferenciales ordinarias, la estrategia para probar existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias se basa en la transformación del problelma en un problema integral equivalente y de la utilización, luego, de adecuados teoremas de punto fijo.

Proposición 16. *Una función $y\in AC^n[0,T]$ es una solución de la ecuación diferencial fraccionaria*

$$ {}_0^{RL}D^{\alpha}y(t)=f(t,y(t)), \tag{50}$$

con las condiciones iniciales

$$ {}^{RL}D^{\alpha-k}y(0)=b_k \qquad (k=1,2,\dots,n-1), \qquad \lim_{z\to0^+}I^{n-\alpha}y(z)=b_n, \tag{51}$$

si y sólo si es solución de la siguiente ecuación de Volterra

$$ y(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_kt^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,y(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{52}$$

Proposición 17. *Una función $y\in AC^n[0,T]$ es una solución de la ecuación diferencial fraccionaria*

$$ {}_0^{C}D^{\alpha}y(t)=f(t,y(t)), \tag{53}$$

con las condiciones iniciales

$$ y^{(k)}(0)=a_k \qquad (k=0,1,2,\dots,n-1) \tag{54}$$

si y sólo si es solución de la siguiente ecuación de Volterra

$$ y(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_kt^k}{k!}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,y(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{55}$$

Nota 7. *Los interesados en consultar pruebas de existencia y unicidad para cuaciones diferenciales fraccionarias ordinarias con derivadas de Caputo y Riemann-Liouville pueden consultar: Kilbas et al. [8, Sec.3.2] para soluciones en $L^{\alpha}(a,b)=\{y\in L^1(a,b)\colon {}_a^{RL}D^{\alpha}y\in L^1(a,b)\}$, Diethelm [6, Cap.5 y 6] para soluciones en $C(0,T]$ y $C[0,T]$ según se consideren derivadas de Riemann-Liouville o Caputo (respectivamente). También se puede ver el trabajo de Del Bosco y Rodino [5] donde se estudia existencia de soluciones continuas hasta el borde cuando se trabaja con derivadas de RL.*

4.2. Un problema de ajuste de parámetro para la Ley de Enfiramiento de Newton

Los modelos clásicos para enfriamiento o calentamiento de un cuerpo se basan en la *Ley de Enfiramiento de Newton* que especifica que "la variación de temperatura en un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente".

Esto es, si T es la función que en tiempo t nos da la temperatura de un cuerpo que no está sometido a ninguna fuente externa de calentamiento y T_a es la temperatura ambiente, entonces podemos decir que

$$ T'(t)=k(T(t)-T_a) \tag{56}$$

Model	k_α	α	Error
Classical	$-0{,}0665349$	1	940,640679
Fractional	$-0{,}130333$	0,798038	39,844721

Luego, si conocemos la temperatura inicial del cuerpo, digamos T_0 al tiempo inicial $t = 0$, podemos plantear el siguiente problema de valores iniciales

$$T'(t) = k(T(t) - T_a), \qquad t \geq 0, \tag{57}$$

$$T(0) = T_0. \tag{58}$$

Claramente, la solución de (57) viene dada por

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{kt}, \quad t \geq 0. \tag{59}$$

Ahora bien, supongamos que consideramos el modelo fraccionario para la evolución de la temperatura, esto es:

$${}_0^C D^\alpha T(t) = k_\alpha(T(t) - T_a), \qquad t \geq 0, \tag{60}$$

$$T(0) = T_0. \tag{61}$$

Teniendo en cuenta los resultados de convergencia de la Sección 3.2, vamos a suponer que $\alpha \in (0, 1)$.

Realizando la sustitución $W(t) = T(t) - T_a$ y aplicando la Proposición 11, podemos expresar a la solución del problema (60) en términos de la función de Mittag-Leffler

$$T_\alpha(t) = T_a + (T_0 - T_a)E_\alpha(k_\alpha t^\alpha), \quad t \geq 0. \tag{62}$$

En el artículo de Almeida [2] se cuenta sobre un experimento muy sencillo realizado por Gieseking: Se considera un vaso de vaso de agua con 100 ml de agua que originalmente se encuentra a $100°C$, y con un termómetro en el vaso se mide la temperatura cada minuto, siendo la temperatura ambiente $T_a = 23°C$.

El autor plantea una una solución del tipo (62) y suponiendo que notamos al conjunto de mediciones por $\{(t_i, T_i) : i = 1, ..., n\}$, plantea minimizar el siguiente error en función de α

$$\mathrm{Error_{Fr}} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} (\mathrm{T_i} - \mathrm{T}_\alpha(\alpha, \mathrm{t_i}))^2. \tag{63}$$

Como parte del resultado de su trabajo obtiene los siguientes datos:

5. Anexo. Funciones especiales

5.1. Funciones Gamma y Beta

Definición 11. *Para toda $f \in L^1(\mathbb{R}_0^+)$ se define la Transformada de Laplace de f como:*

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \quad s \geq 0.$$

Veamos algunos ejemplos sencillos. Sea $f(t) = e^{at}$. Entonces para todo $s > a$ se tiene que

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s-a}. \tag{64}$$

Otro caso de nuestro particualr interés es el caso de la función potencial. Sea $g(t) = t^\omega$ con $\omega \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{\Gamma(\omega + 1)}{s^{\omega+1}}. \tag{65}$$

Veamos algunas propiedades del operador $\mathcal{L}$.

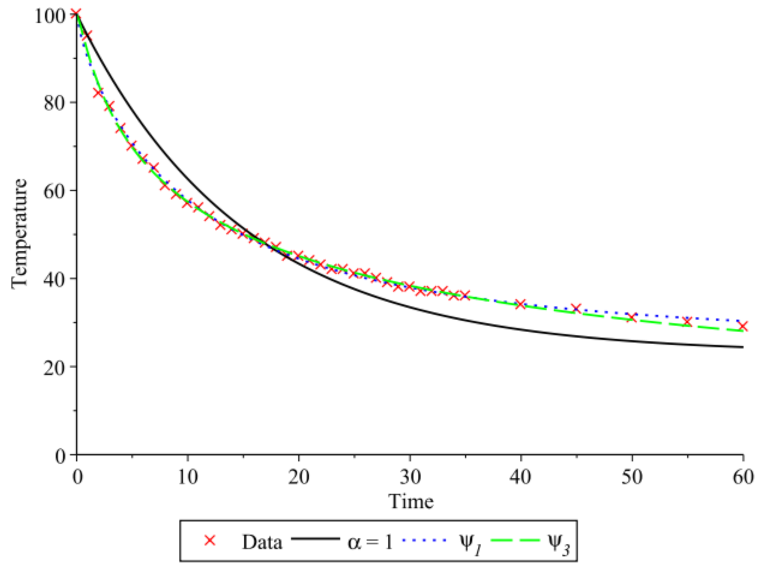

Figura 5: Modelo de crecimiento poblacional mundial [2, Figura 2].

Proposición 18. *Suponiendo que las funciones a continuación tienen la regularidad adecuada, se tiene que:*

(a) ***Linealidad.*** *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se verifica que $\mathcal{L}\{au + bv\} = a\mathcal{L}\{u\} + b\mathcal{L}\{v\}$.*

(b) ***Traslación.*** *Si $U = \mathcal{L}\{u\}$ está definida en (b, ∞) entonces $\mathcal{L}\{e^{a\cdot}u\}(s) = U(s-a)$ para todo $s > a + b$.*

(c) ***Traslación y truncamiento.*** *Si $a > 0$ y H es la función de Heaviside entonces $\mathcal{L}\{H(\cdot - a)u(\cdot - a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{u\}(s)$ para todo $s > a$.*

(d) ***La transformada de la convolución es el producto de las transformadas****. Esto es*

$$\mathcal{L}\{u * v\}(s) = \mathcal{L}\{u\} * \mathcal{L}\{v\}(s). \tag{66}$$

(e) ***Transformada de la derivada****. Si $u \in AC[0, L]$, entonces*

$$\mathcal{L}\{u'\}(s) = s\mathcal{L}\{u\}(s) - u(0). \tag{67}$$

(f) ***Derivada de la transformada.*** *Si $w(t) = tu(t)$ para todo $t \geq 0$ y $u, w \in L^1(\mathbb{R}_0^+)$ entonces $\mathcal{L}\{w\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{u\}(s)$, para todo $s > 0$.*

(g) ***Transformada de la integral.*** *Si u es continua en $[0, L]$ para todo $L > 0$ y $w(t) = \int_0^t u(r)\mathrm{d}r$, entonces*

$$\mathcal{L}\left\{w\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}u(s).$$

.

Definición 12. *Para cada $z, w \in \Theta = \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \;/\; \Re(z) > 0,\; \Re(w) > 0\right\}$ definimos la función $h_{z,w}$: $\mathbb{R}_0^+\mathbb{C}$ por*

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}(t-\tau)^{w-1}d\tau \tag{68}$$

Es sencillo ver que $h_{z,w}$ está bien definida y además $h_{z,w}(t) = f * g\,(t)$ siendo $f(t) = t^{z-1}$ y $g(t) = t^{w-1}$ definidas en $\mathbb{R}_0^+$. Utilizando el resultado (66) de la Proposición anterior y (65) resulta que

$$\mathcal{L}\left\{h_{z,w}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{f * g\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{f\right\}(s)\mathcal{L}\left\{g\right\}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z}\frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\mathcal{L}\left\{j\right\}(s)$$

donde $j(t) = t^{z+w-1}$. Luego, de la inyectividad del operador deducimos que

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w-1} \quad t \geq 0 \tag{69}$$

Enunciamos a partir de esto la siguiente proposición:

Proposición 19. *Si $h_{z,w}$ es la función definida en* (68), *entonces*

1. $h_{z,w}(t) = \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w-1}$.

2. *Si* $t = 1$, $B(z,w) = \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$.

Corolario 2. $B(z,w) = B(w,z) \quad \forall\, z, w \in \Theta = \big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \;/\; \Re(z) > 0,\ \Re(w) > 0\big\}$.

Nota 8. *Gracias a la Proposición* 19 *y al Principio de identidad para funciones analíticas*[3], *podemos extender a la función Beta analíticamente al dominio* Ω *a partir de la extensión de la función Gamma.*

Con la ayuda de la función Beta, probaremos dos propiedades muy importantes de la función Gamma:

Proposición 20.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sen(\pi z)} \qquad \forall\, z/z \neq 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{70}$$

Demostración. Supongamos primero que $0 < \Re(z) < 1$. De la Proposición 19 tenemos que

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{1-z-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1}\frac{\mathrm{d}t}{1-t} = B(z, 1-z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z)$$

Haciendo la sustitución $\tau = \frac{t}{1-t}$, resulta $\tau + 1 = \frac{1}{1-t}$ y $d\tau = \frac{1}{(1-t)^2}dt$ obtenemos

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{\tau^{z-1}}{1+\tau}\mathrm{d}\tau \tag{71}$$

Para calcular esta integral, consideremos la integral compleja

$$\int_{L_R} f(s)ds, \quad \text{donde}\, f(s) = \frac{s^{z-1}}{1+s}$$

y L_R es el contorno en la Figura 5.1
f tiene un polo simple en $s = e^{i\pi}$. Luego $\forall\, R > 1$, el Teorema de los Residuos[4] nos asegura que

$$\int_{L_R} f(s)ds = 2\pi i\left[Res\, f(s)\right]_{s=e^{i\pi}} \tag{72}$$

[3]**Teorema:** *(Ppio. de identidad para fcns. analíticas)*. Si f y g son funciones analíticas en un dominio Ω y el conjunto $\{z \in \Omega\, :\, f(z) = g(z)\,\forall z \in \Omega\}$ tiene un punto de acumulación en Ω, necesariamente será $f(z) = g(z)\,\forall z \in \Omega$

[4]**Teorema de los residuos:** Sea f una función analítica en un dominio Ω salvo por singularidades aisladas a_j. Sea γ una curva simple cerrada tal que $\gamma \cup int(\gamma) \subset \Omega$ que no pasa por ningún a_j. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} f(z)dz = \sum_j Res(f, a_j)$$

donde la suma se extiende a todos los j tales que $a_j \in int(\gamma)$.

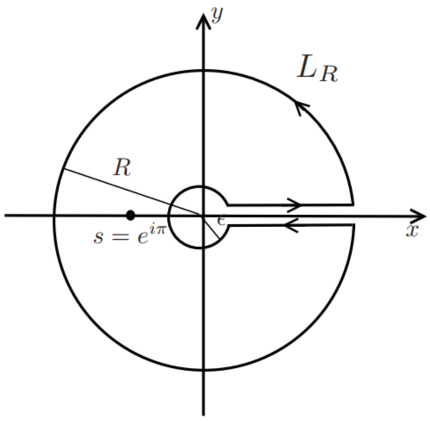

Figura 6: Región L_R.

Pero siendo $e^{i\pi}$ un polo simple[5] resulta que

$$Res(f, e^{i\pi}) = (e^{i\pi})^{z-1} = \frac{e^{i\pi z}}{e^{i\pi}} = -e^{i\pi z}. \tag{73}$$

Reemplazando (73) en (72) obtenemos

$$\int_{L_R} f(s)ds = 2\pi i \left[Res\, f(s)\right]_{s=e^{i\pi}} = 2\pi i(-e^{i\pi z}) \tag{74}$$

Por otro lado,

$$\int_{L_R} f(s)ds = \int_\varepsilon^R f(x)dx + \int_{C_R} f(s)ds + e^{2\pi iz}\int_R^\varepsilon f(x)dx + \int_{C_\varepsilon} f(s)ds \tag{75}$$

donde vale destacar que, sobre la rama superior del contorno L_R, $w = t + \delta i$, $t \in [\varepsilon, R]$, y, sobre el contorno inferior $w = -t + (2\pi - \delta)i$, $t \in [\varepsilon, R]$.
Más aún, la integral a lo largo del corte superior al semieje difiere en $e^{2\pi iz}$ con la integral a lo largo del corte inferior y hemos hecho tender δ a 0.

Además las integrales a lo largo de las circunferencias C_R y C_ε tienden a 0 cuando $\varepsilon \to 0$ y $R \to \infty$, en efecto, siendo $f(s) = \frac{s^{z-1}}{1+s} = \frac{s^z}{s(1+s)}$, se puede probar que existe $c > 0$ tal que $\left|\frac{1}{s(1+s)}\right| \leq \frac{c}{1+|s|^2}$, siempre que $|s| > R$. Luego

$$\left|\int_{C_R} f(s)ds\right| \leq \int_{C_R} |f(s)|\, ds \leq \int_{|s|=R} |s|^x \frac{1}{s(1+s)}ds \leq R^x \int_{|s|=R} \frac{c}{1+|s|^2}ds = R^x\frac{c}{1+R^2}2\pi R \tag{76}$$

donde la última expresión tiende a 0 cuando $R \to \infty$ ya que $0 < x < 1$. Análogamente,

$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(s)ds\right| \leq \int_{C_\varepsilon} |f(s)|\, ds \leq \int_{|s|=\varepsilon} |s|^x \frac{1}{s(1+s)}ds \leq \varepsilon^x\frac{c}{1+\varepsilon^2}2\pi\varepsilon \to 0 \quad \text{si } \varepsilon \to 0 \quad \text{para todo } x/\, 0 < x < 1. \tag{77}$$

Juntando (72), (75), (76), (77) y haciendo $\varepsilon \to 0$ y $R \to \infty$, resulta

$$\int_{L_R} f(s)ds = \int_0^\infty f(x)dx - \varepsilon^{2\pi iz}\int_0^\infty f(x)dx = (1-e^{2\pi iz})\int_0^\infty f(x)dx = (1-e^{2\pi iz})\Gamma(z)\Gamma(1-z) \tag{78}$$

[5]**Poposición:** Sea $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ una función a valores complejos donde g y h son analíticas en z_0. Supongamos además que $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$. Entonces f tiene un polo simple en z_0 y $Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Finalmente, de (71) y (78) deducimos que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{-2\pi i(e^{i\pi z})}{1-e^{2\pi iz}} = \frac{\pi}{sen(\pi z)} \qquad 0 < Re(z) < 1$$

Para el caso $m < \Re(z) < m+1$, ponemos $z = w+m$ donde $0 < \Re(w) < 1$. aplicando la Proposición 1 llegamos auna expresión equivalente para el caso anterior.

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(w)} = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-m)} = (-1)^m \frac{\Gamma(m+1-z)}{\Gamma(1-z)} = (-1)^m \frac{\Gamma(1-w)}{\Gamma(1-z)}$$

Luego,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = (-1)^m \Gamma(w)\Gamma(1-w) = (-1)^m \frac{\pi}{sen(\pi w)} = \frac{\pi}{sen(\pi(w+m))} = \frac{\pi}{sen\,\pi z}$$

Aplicando el Principio de identidad para funciones analíticas, concluimos que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{sen\,\pi z}\ \forall z \in C$ donde $C = \{z \in \mathbb{C}/z \neq 0, \pm 1, 2, ...\}$. $\square$

Corolario 3. *Valen los siguientes resultados:*

1. *Para todo* $z_0 \in \{0, -1, -2, ...\}$ *se verifica que* $\lim\limits_{z \to z_0^+} \frac{1}{\Gamma(z)} = 0$.

2. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

5.2. La función de Mittag-Leffler

Definición 13. *Llamaremos función de Mittag-Leffler generalizada o de dos parámetros a*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad z \in \mathbb{C},\ \Re(\alpha) > 0,\ \beta \in \mathbb{C}.$$

Esta función también se puede definir de manera integral como:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} \frac{e^t t^{\alpha-\beta}}{t^\alpha - z} dt$$

Nota 9. *Para ver la convergencia de esta serie en todo* $z \in \mathbb{C}$, *utilizaremos la siguiente relación [7, Fórmula 1.18]:*

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b}\left[1 + \frac{1}{2}z^{-1}(a-b)(a+b-1) + O(z^{-2})\right] \tag{79}$$

Considerando $z = \alpha k$, $a = \alpha+\beta$, $b = \beta$ *y aplicando el Teorema* **??**:

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|(\alpha k)^\alpha\left[1 + \frac{\alpha(\alpha+2\beta-1)}{2\alpha k} + O((\alpha k)^{-2})\right]\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty}|\alpha^\alpha|\,k^{\Re(\alpha)}\left|\left[1 + \frac{\alpha(\alpha+2\beta-1)}{2\alpha k} + O((\alpha k)^{-2})\right]\right| = \lim_{k\to\infty}|\alpha^\alpha|\,k^{\Re(\alpha)} = +\infty$$

ya que $\Re(\alpha) > 0$.

Algunos comentarios y casos particulares:

1. Claramente, se cumple que

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} e^z = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} e^z = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

$$\vdots$$

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+2}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}$$

2. Las funciones $senh(z)$ y $cosh(z)$ también son casos particulares de la función de Mittag-Leffler:

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = cosh(z)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{senh(z)}{z}$$

3. Las funciones hiperbólicas de orden n, (que son generalizaciones de $senh$ y de $cosh$) también se pueden expresar en función de Mittag-Leffler

$$h_r(z,n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(z^n) \quad r = 1, 2, ..., n$$

Así también como las funciones trigonométricas de orden n (que son generalizaciones del seno y el coseno):

$$k_r(z,n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{nj+r-1}}{(nj+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(-z^n) \quad r = 1, 2, ..., n$$

4. Se puede probar (no lo haremos en este trabajo) la siguiente destacada relación:

$$E_{\frac{1}{2},1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} = e^{z^2} erfc(-z)$$

donde $erfc(z)$ es el complemento de la función error definido por

$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{t^2} dt$$

5. Para $\beta = 1$ obtenemos la denominada función de Mittag-Leffler uniparamétrica:

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_{\alpha}(z)$$

Referencias

[1] N. H. Abel. Auflösung einer mechanischen aufgabe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1:153–157, 1826.

[2] Almeida, R. What is the best fractional derivative to fit data?. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 11(2): 358–368, 2017.

[3] H. Brézis. *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones. Versión española de Juan Ramón Esteban.* Alianza Editorial, 1984.

[4] M. Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. II. *Geophysical Journal International*, 13:529–539, 1967.

[5] L. Rodino D. Delbosco. Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 204:609–625, 1996.

[6] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An application oriented exposition using differential operators of Caputo type.* Springer Science & Business Media, 2010.

[7] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions*, volume 1. McGraw-Hill, New York, 1953.

[8] A. Kilbas, H. Srivastava, and J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies.* Elsevier, 2006.

[9] A. Kubica, K. Ryszewska, and M. Yamamoto. *Time-fractional Differential Equations: A Theoretical Introduction.* Springer, 2020.

[10] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations.* Vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1999.

[11] A. Zygmund R. L. Wheeden. *Measure and Integral An Introduction to Real Analysis.* Chapman & Hall CRC Pure and Applied Mathematics, 2ed, 2015.

[12] K. Ryszewska. *A semigroup approach to space-fractional diffusion and the analysis of fractional Stefan models.* PhD. Thesis, 2020.

[13] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives–Theory and Applications.* Gordon and Breach, 1993.