Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Tesis Doctoral

Soluciones exactas y aproximadas a problemas de frontera libre de tipo Stefan con calor latente variable

Lic. Julieta Bollati

Director: Dr. Domingo A. Tarzia

Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,

para optar al título de

Doctora en Matemática

Marzo 2019

Dedicado a

mi familia

Resumen

En esta Tesis, se hallan soluciones exactas de tipo similaridad a diferentes problemas de tipo Stefan sobre medios unidimensionales semi-infinitos, homogéneos e isotrópicos con la característica principal de considerar calor latente variable, el cual en caso clásico es considerado constante. Además, se obtienen aproximaciones a algunos de estos problemas, mediante métodos de balance integral. Se testea la exactitud de las soluciones aproximadas mediante su comparación con la solución exacta.

En una primera instancia, se presentan dos problemas de tipo Stefan con calor latente variable, definido como una potencia no negativa de la posición y con una condición de tipo Robin en el borde fijo del material: el primero a una fase y el segundo a dos fases. Se determinan soluciones de similaridad utilizando las funciones de Kummer. Se estudian las condiciones sobre los datos del problema a una fase, para que el mismo resulte equivalente al problema que posee una condición de Dirichlet o Neumann, en vez de la de Robin, en el borde fijo. Tanto para el problema de Stefan a una fase como para el de dos fases, se analiza el comportamiento límite cuando el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo tiende a infinito. Se muestran también diferentes ejemplos numéricos.

Luego, se generalizan los resultados obtenidos, estudiando problemas de tipo Stefan con calor latente dependiente no solo de una potencia de la posición sino también de una potencia de la velocidad. De manera análoga, se resuelven los problemas con condiciones de temperatura, flujo o convectiva en el borde fijo, mediante el método de similaridad. Para el caso convectivo, se realiza un estudio del comportamiento límite de la solución cuando el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo tiene a infinito. Se proveen ejemplos computacionales para el cálculo de la frontera libre y el

calor latente variable en el tiempo.

Por último, se presentan aproximaciones para el problema de Stefan a una fase con calor latente dependiente de la posición y condiciones de tipo Dirichlet o Robin en el borde fijo. Para obtener dichas aproximaciones se utiliza el método de balance integral clásico, una variante del mismo, y el método de balance integral refinado. Se comparan las distintas aproximaciones con la solución exacta y se calculan los errores relativos porcentuales que se cometen en cada método.

La presenta Tesis ha dado origen a las siguientes publicaciones en revistas científicas, a saber:

- J. Bollati, D.A. Tarzia, Explicit solution for the one-phase Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face, *Communications in Applied Analysis* 22 (2018) 309-332.

- J. Bollati, D.A. Tarzia, Exact solution for a two-phase Stefan problem with variable latent heat and a convective boundary condition at the fixed face, *Z. Angew. Math. Phys.* 69:38 (2018) 1-15.

- J. Bollati, D.A. Tarzia, One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change, *Electronic Journal of Differential Equations* 2018:10 (2018) 1-12.

- J. Bollati, D.A. Tarzia, One-phase Stefan-like problems with a latent heat depending on the position and velocity of the free boundary, and with Neumann or Robin boundary conditions at the fixed face, *Mathematical Problems in Engineering* 2018 (2018) ID 4960391, 11 páginas, https://doi.org/10.1155/2018/4960391/

Agradecimientos

Quiero agradecer, en primer lugar a mi director Dr. Domingo A. Tarzia, por su constante apoyo humano, por su generosidad para compartir sus conocimientos y por su dedicación durante estos años de trabajo conjunto.

A mi codirectora de beca, Dra. Adriana C. Briozzo por su asistencia y gran contribución a mi formación.

A mi consejero de estudios, Dr. Eduardo A. Santillan Marcus por su guía y apoyo a lo largo de estos años.

A mis compañeros de oficina, por los almuerzos y cafés llenos de anécdotas, por su amistad, cariño y generosidad.

A CONICET, que a través de la beca me permitió realizar esta Tesis, y a las instituciones que contribuyeron a mi formación académica: Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario y Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral Sede Rosario. Agradezco a esta última también por brindarme un espacio de trabajo confortable con todas las herramientas necesarias a mi disposición.

A mis padres Daniela y Armando por su amor, por la hermosa familia que me dieron, y por ser mis primeros y mejores maestros enseñándome las cosas más importantes de la vida; a mi abuela Amalia, mi psicóloga personal y segunda madre, por sus ricas comidas, su contención y ejemplo de superación; a mi hermana Flor, mi odontóloga preferida, por ser mi mejor amiga y mi cómplice en todo y a mi gran compañero de vida Mati, por su amor incondicional, por alentarme y sostenerme diariamente.

Índice de figuras

Índice de tablas

Nomenclatura

$a^2 = \frac{k}{\rho c}, a_l^2, a_s^2$	Coeficiente de difusividad, $[m^2/s]$.
A, A_0, A_q, A_h	Coeficientes que caracterizan a las temperaturas exactas T, T_0, T_q, T_h, respectivamente, $[°C/s^{\alpha/2}]$.
A_{lh}, A_{sh}, A_l, A_s	Coeficientes que caracterizan a las temperaturas exactas T_{lh}, T_{sh}, T_l, T_s, respectivamente, $[°C/s^{\alpha/2}]$.
$A_1, A_2, A_3, A_{1h}, A_{2h}, A_{3h}$	Coeficientes que caracterizan a las temperaturas aproximadas T_1, T_2, T_3, T_{1h}, T_{2h}, T_{3h}, respectivamente, $[°C/s^{\alpha/2}]$.
B, B_0, B_q, B_h	Coeficientes que caracterizan a las temperaturas exactas T, T_0, T_q, T_h, respectivamente, $[°C/s^{\alpha/2}]$.
B_{lh}, B_{sh}, B_l, B_s	Coeficientes que caracterizan a las temperaturas exactas T_{lh}, T_{sh}, T_l, T_s, respectivamente, $[-]$.
$\mathrm{Bi} = \frac{hk}{a}$,	Número de Biot, $[-]$.
c	Calor específico, $[m^2/°Cs^2]$.
C, C_0, C_q, C_h	Coeficientes que caracterizan a las temperaturas exactas U, U_0, U_q, U_h, respectivamente, $[°C/s^{\alpha/2}]$.
D, D_0, D_q, D_h	Coeficientes que caracterizan a las temperaturas exactas U, U_0, U_q, U_h, respectivamente, $[°C/s^{\alpha/2}]$.
f, f_h, f_1, f_2, f_{2h}	Funciones definidas por (3.34),(3.7), (3.66), (3.134), (3.67), respectivamente, $[-]$.
F_h	Funciones definidas por (3.54), $[-]$.
g	Función definida por (3.44), $[-]$.
G_0, G_q, G_h	Funciones definidas por (4.28), (4.47), (4.73), respectivamente, $[-]$.

h	Coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en las condiciones convectivas (3.1c), (3.56c), (4.55b), $[kg/(°Cs^{5/2})]$.
k, k_l, k_s	Conductividad térmica, $[W/(m°C)]$.
q	Coeficiente que caracteriza el flujo en la frontera fija en las condiciones (3.39c), (4.30b) $[kg/s^{(5+\alpha)/2}]$.
$M(a,b,z)$	Función de Kummer dada por (2.6), $[-]$.
$s, s_0, s_{\mathrm{q}}, s_{\mathrm{h}}, S, S_0, S_q, S_{\mathrm{h}}$	Posición de la frontera libre exacta, $[m]$.
$s_1, s_2, s_3, s_{1h}, s_{2h}, s_{3h},$	Posición de la frontera libre aproximada, $[m]$.
$\mathrm{Ste} = \frac{k(\theta_0-\theta_f)}{L},$	Número de Stefan, $[-]$.
$\mathrm{Ste} = \frac{k\theta_\infty}{\gamma a^{\alpha+2}},$	Número de Stefan, $[-]$.
$r, r_h,$	Posición de la frontera libre exacta, $[m]$.
$R = \frac{q}{\gamma a^{\beta+\delta+1}},$	Número adimensional (4.48), $[-]$.
t	Tiempo, $[s]$.
$T, T_0, T_q, T_h, T_{lh}, T_{sh}, T_l, T_s$	Temperatura exacta, $[°C]$.
$T_1, T_2, T_3, T_{1h}, T_{2h}, T_{3h}$	Temperatura aproximada, $[°C]$.
U, U_0, U_q, U_h	Temperatura exacta, $[°C]$.
$U(a,b,z)$	Función de Kummer dada por (2.8), $[-]$.
x	Coordenada espacial, $[m]$.

Símbolos griegos

α	Potencia de la posición que caracteriza al calor latente por unidad de volumen (3.1d), (3.56e), $[-]$.
α	Potencia de la posición que caracteriza a la temperatura en el borde fijo (4.1b), $[-]$.
β	Potencia de la posición que caracteriza al calor latente por unidad de volumen (4.1d), (4.30d), (4.55d), $[-]$.
δ	Potencia de la velocidad que caracteriza al calor latente por unidad de volumen (4.1d), (4.30d), (4.55d), $[-]$.

γ	Coeficiente que caracteriza al calor latente por unidad de volumen, $[kg/(s^2 m^{\alpha+1})]$.
η, η_l, η_s	Variable de similaridad, $[-]$.
$\nu, \nu_0, \nu_q, \nu_h,$	Coeficientes que caracterizan a las fronteras libres exactas s, s_0, s_q, s_h, respectivamente, $[-]$.
$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_{1h}, \nu_{2h}, \nu_{3h}$	Coeficientes que caracterizan a las fronteras libres aproximadas s_1, s_2, s_3, s_{1h}, s_{2h}, s_{3h}, respectivamente, $[-]$.
μ, μ_h	Coeficientes que caracterizan a las fronteras libres exactas r, r_h, respectivamente, $[-]$.
ξ, ξ_0, ξ_q, ξ_h	Coeficientes que caracterizan a las fronteras libres exactas, S, S_0, S_q, S_h, respectivamente, $[-]$.
ρ	Densidad de masa, $[kg/m^3]$.
θ_0	Coeficiente que caracteriza la temperatura en el borde fijo (3.29d), (4.1d) , $[^\circ C/s^{\alpha/2}]$.
θ_i	Coeficiente que caracteriza la temperatura inicial (3.56f), $[^\circ C/s^{\alpha/2}]$.
θ_∞	Coeficiente que caracteriza la temperatura ambiente en (3.1c), (3.56d), (4.55c), $[^\circ C/s^{\alpha/2}]$.

Índice

Capítulo 1

Introducción

La presente Tesis tiene por objeto de estudio los llamados *problemas de frontera libre*, los cuales son problemas de contorno para ecuaciones diferenciales parciales donde interviene, además de las funciones incógnitas del problema, una superficie incógnita llamada frontera libre, que separa dos o más regiones. Un caso particular son los problemas de cambio de fase. Dichos problemas tienen lugar en diversas aplicaciones industriales y naturales, desde el derretimiento de los casquetes polares y la solidificación de la lava de un volcán hasta la colada continua del acero. Muchos mecanismos tienen lugar en los procesos de cambio de fase, entre ellos: la transferencia de calor, la absorción o liberación de calor latente, cambios en las propiedades termofísicas, etc. Tanto las fases sólidas como la líquidas se caracterizan por las fuerzas de unión que mantienen a los átomos con cierta proximidad. En un sólido, las moléculas vibran alrededor de posiciones fijas de equilibrio, mientras que en un líquido saltan entre dichas posiciones. La manifestación macroscópica de esta energía se denomina calor o energía térmica y su medida es la temperatura. Claramente, los átomos en la fase líquida son más energéticos que en la sólida, y es por ello que en el proceso de fusión, un sólido debe adquirir determinada cantidad de energía para vencer las fuerzas de unión entre sus átomos. Esta energía se refiere al *calor latente* (L). En cambio para la solidificación de un líquido, obviamente se requiere de una liberación del calor latente. Además de la absorción o liberación del calor latente, la transición de una fase a otra ocurre a una temperatura determinada llamada *temperatura de cambio de fase* y la región donde el sólido y el líquido coexisten se denomina *interfase*.

La formulación matemática que describe el proceso físico de cambio de fase (solidificación o fusión) se conoce en la literatura como *problema de Stefan* (en algunos casos, como problema de Lamé-Clapeyron-Stefan). Dicho nombre surge en los años 1890 en homenaje a los numerosos trabajos analíticos y experimentales que realizó el físico esloveno Josef Stefan [4, 5, 6]. Sin embargo, no fue el único en formalizar y resolver este problema. Cabe destacar que en [7], Lamé-Clapeyron algunas décadas antes, en 1831, estudiaron el problema de solidificación por enfriamiento de un globo líquido (Tierra) arribando a la formulación matemática del problema de Stefan.

Los problemas de Stefan son un problema particular de frontera libre, cuyo objetivo es el de describir las fases sólida y líquida en un proceso de cambio de fase. Se caracterizan por tener una frontera móvil, cuya posición es desconocida a priori. La posición de dicha frontera, que es función del tiempo, debe ser determinada como parte de la solución. A dicho problema en particular se lo conoce como *problema de Stefan a dos fases.* A veces, es conveniente reducir el problema, asumiendo que el sólido o líquido se encuentra a la temperatura de cambio de fase. Dicha simplificación del modelo es referida en la literatura como *problema de Stefan a una fase.*

En general, encontrar la solución a un problema de Stefan requiere de la resolución de una ecuación diferencial parcial, generalmente de tipo parabólico como la ecuación del calor, sujeta a una condición en la interfase que describe la evolución de la frontera. Se supone que la interfase se encuentra a una temperatura conocida y que el flujo de calor a través de ella es discontinuo. A continuación se verá la formulación matemática de este tipo de problemas.

Formulación matemática del problema de Stefan clásico

Problema de Stefan a dos fases

Si un material semi-infinito se encuentra inicialmente en estado sólido a una temperatura θ_i, con $\theta_i < \theta_f$ (temperatura de cambio de fase), y en el borde fijo $x = 0$ es calentado a una temperatura $\theta_0 > \theta_f$, entonces se tiene un *problema de Stefan a dos fases*, cuya formulación matemática está dada por: Hallar la frontera libre $s = s(t)$ y la temperatura

$$\theta(x,t) = \begin{cases} \theta_l(x,t) & \text{si} \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ \theta_f & \text{si} \quad x = s(t), \quad t > 0 \\ \theta_s(x,t) & \text{si} \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \end{cases}$$

de manera que:

$$\rho c_l \frac{\partial \theta_l}{\partial t} - k_l \frac{\partial^2 \theta_l}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < s(t), \qquad t > 0 \tag{1.1a}$$

$$\rho c_s \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - k_s \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} = 0, \qquad x > s(t), \qquad t > 0 \tag{1.1b}$$

$$\theta_s(x,0) = \theta_i, \qquad x > 0 \tag{1.1c}$$

$$\theta_l(0,t) = \theta_0, \qquad t > 0 \tag{1.1d}$$

$$\theta_l(s(t),t) = \theta_s(s(t),t) = \theta_f, \qquad t > 0 \tag{1.1e}$$

$$k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(s(t),t) - k_l \frac{\partial \theta_l}{\partial x}(s(t),t) = \rho L \dot{s}(t), \qquad t > 0 \tag{1.1f}$$

$$s(0) = 0. \tag{1.1g}$$

donde L es el calor latente por unidad de masa, ρ es la densidad de masa común a ambas fases, k es la conductividad térmica, y c el calor específico. Los subíndices l y s hacen referencia a las fases líquida y sólida respectivamente. Este problema corresponde a un proceso de *fusión*. Sin embargo, se puede plantear de manera análoga el problema de solidificación.

Las ecuaciones (1.1a)-(1.1b), representan la ecuación de conducción del calor para ambas fases y pueden reescribirse como

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} = a_l^2 \frac{\partial^2 \theta_l}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial \theta_s}{\partial t} = a_s^2 \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2},$$

donde $a_l^2 = \frac{k_l}{\rho c_l}$, $a_s^2 = \frac{k_s}{\rho c_s}$ representan las difusividad térmica en las fases líquida y sólida, respectivamente.

Las condiciones (1.1c), (1.1d) y (1.1e) expresan que la temperatura inicial, la temperatura en el borde fijo $x = 0$ y en la frontera libre $x = s(t)$, son constantes dadas por θ_i, θ_0 y θ_f, respectivamente.

La condición (1.1f) es conocida como condición de Stefan y se deduce del principio de conservación de la energía.

La solución exacta de dicho problema es conocida como *solución de Neumann* y fue dada en [4, 8, 9, 10]. Esquemáticamente, este modelo se representa en la Figura 1.1.

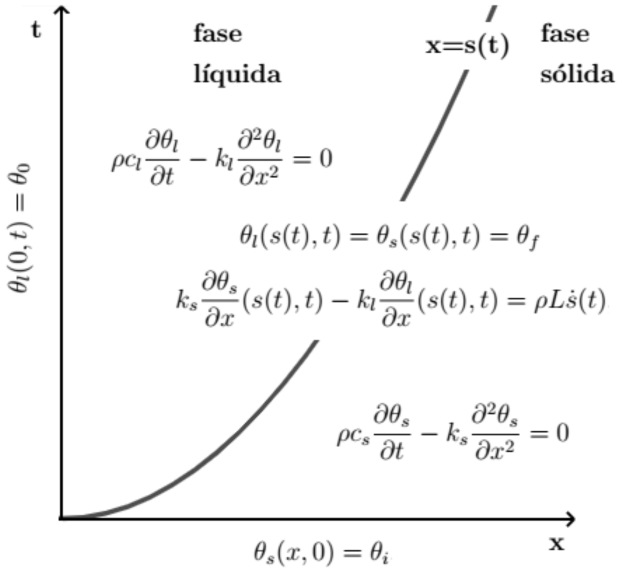

Figura 1.1: Esquema del problema de Stefan a dos fases gobernado por (1.1a)-(1.1g)

Problema de Stefan a una fase

Si en el caso anterior el cuerpo semi-infinito se encuentra en estado sólido a la temperatura de fusión θ_f entonces puede plantearse el siguiente *problema de Stefan a una fase* que consiste en hallar la frontera libre $s = s(t)$ y la temperatura

$$\theta(x,t) = \begin{cases} \theta(x,t) & \text{si} \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ \theta_f & \text{si} \quad x \geq s(t), \quad t > 0 \end{cases}$$

de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < s(t), \qquad t > 0 \tag{1.2a}$$

$$\theta(0,t) = \theta_0 > \theta_f, \qquad t > 0 \tag{1.2b}$$

$$\theta(s(t),t) = \theta_f, \qquad t > 0 \tag{1.2c}$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial x}(s(t),t) = -\rho L \dot{s}(t), \qquad t > 0 \tag{1.2d}$$

$$s(0) = 0, \tag{1.2e}$$

donde los coeficientes k y c corresponden a los de la fase líquida. La solución exacta de dicho problema fue dada por Lamé-Clapeyron en [7].

Esquemáticamente, se está planteando el problema de fusión de un material semi-infinito, representado por $x > 0$, que inicialmente se encuentra en fase sólida a temperatura de fusión θ_f y que en el borde $x = 0$ se le impone una temperatura mayor a la de fusión. En cada tiempo $t > 0$, existirá un punto $x = s(t)$ que separará la fase líquida representada por el intervalo $(0, s(t))$ y la fase sólida, representada por $(s(t), +\infty)$, que se encuentra a su temperatura de fusión (ver Figura 1.2)

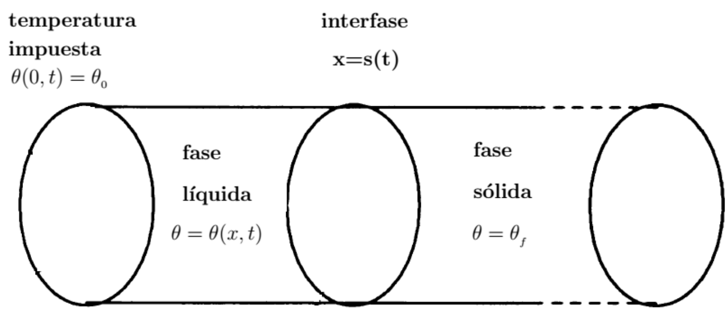

Figura 1.2: Esquema del problema de Stefan a una fase dado por (1.2a)-(1.2e)

A pesar de la aparente linealidad de las condiciones de las formulaciones anteriores, se debe destacar que la principal dificultad de la resolución de problemas de Stefan radica en su *no-linealidad*. En efecto, si en el problema (1.2), se deriva la condición (1.2c) con respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(s(t),t)\dot{s}(t) + \frac{\partial \theta}{\partial t}(s(t),t) = 0, \qquad t > 0,$$

con lo cual, la condición de Stefan (1.2d) se transforma en

$$k\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 (s(t),t) = -\rho L \frac{\partial \theta}{\partial t}(s(t),t) = \frac{Lk}{c}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(s(t),t), \tag{1.3}$$

indicando la no linealidad del problema (1.2), [11].

Se puede observar que si $\{\theta, s\}$ es solución del problema (1.2), por el principio del máximo debe verifcarse:

$$\begin{aligned}
&\theta_f < \theta(x,t) < \theta_0, \quad \forall (x,t) \in D = \{(x,t) :\ 0 < x < s(t),\ t > 0\} \\
&\dot{s}(t) > 0, \qquad t > 0, \\
&\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,t) < 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t}(x,t) > 0, \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x,t) > 0, \qquad \forall (x,t) \in D.
\end{aligned}$$

En el problema (1.2), el proceso de cambio de fase se inicia gracias a una excitación en el borde fijo, lo cual se traduce matemáticamente, en imponer una condición de borde en $x = 0$. En dicho ejemplo, se impone una condición de temperatura dada por la constante θ_0. Sin embargo existen condiciones de borde más generales:

- *Condición de temperatura en $x = 0$ (Dirichlet):*

$$\theta(0,t) = \theta_0(t). \tag{1.4}$$

  En este caso, se especifica la temperatura en cada punto de la frontera fija. Se asume que la fuente de calor de la temperatura impuesta $\theta_0 = \theta_0(t)$, tiene un contacto perfecto con la superficie del material [9, 12].

- *Condición de flujo en $x = 0$ (Neumann) para el dominio semi-infinito $x > 0$:*

$$k\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t) = -q(t) \tag{1.5}$$

  En este caso, se impone la cantidad de calor $q = q(t)$ que entra al borde fijo por unidad de tiempo. Aunque, lo que realmente se impone en la práctica, es la cantidad de calor que se derrama sobre la frontera [9, 13].

- *Condición convectiva en $x = 0$ (Robin) para el dominio semi-infinito $x > 0$:*

$$k\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t) = h\left[\theta_\infty(t) - \theta(0,t)\right]. \tag{1.6}$$

  Desde el punto de vista práctico, ésta es la condición que representa de manera más fiel el proceso de imponer una cierta temperatura en la frontera. Se asume que el flujo entrante en la cara fija del material es proporcional a la diferencia entre la temperatura $\theta(0,t)$ de la superficie fija del material (desconocida) y la temperatura ambiente impuesta $\theta_\infty = \theta_\infty(t)$ (Ley de enfriamiento de Newton). La constante h representa el coeficiente de transferencia de calor en el borde fijo (ver [9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22])

Se analiza a continuación, la técnica matemática más estándar para hallar solución a un problema de Stefan.

Método de semejanza: solución de similaridad

Una de las principales técnicas para encontrar solución exacta al problema de Stefan es el método de semejanza [23]. A través de este método, el orden de la ecuación diferencial parcial puede reducirse reescribiendo la ecuación en términos de la variable de similaridad. Se considera la ecuación del calor para un cuerpo unidimensional, isótropo y homogéneo dada por (1.2a):

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.$$

con $a^2 = \frac{k}{\rho c}$ el coeficiente de difusión. Dicha ecuación resulta invariante bajo una transformación de variables x, t dada por:

$$\xi = \lambda x, \qquad \tau = \lambda^2 t, \qquad (\lambda \neq 0).$$

Esto significa que si $\theta(x,t) = \theta\left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{\tau}{\lambda^2}\right) = W_\lambda(\xi,\tau)$, entonces $\frac{\partial W_\lambda}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial \xi^2}$.

Luego si las condiciones de contorno para la ecuación (1.2a) no se modifican bajo el cambio de escala, la temperatura verifica que

$$\theta(x,t) = \theta(\lambda x, \lambda^2 t), \qquad \forall \lambda \neq 0.$$

Si en particular se fija $\lambda = \dfrac{1}{2a\sqrt{t}}$, se obtiene

$$\theta(x,t) = \theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}, \frac{1}{4a^2}\right) = \omega\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right). \tag{1.7}$$

Esto indica que la temperatura θ sólo depende de la *variable de similaridad* η, a la cual definimos por

$$\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}. \tag{1.8}$$

Es decir

$$\theta(x,t) = \omega(\eta). \tag{1.9}$$

Una consecuencia de la propiedad de autosimilaridad de los fenómenos físicos es la posibilidad de reducir la cantidad de variables que es necesario conocer para describirlos. En particular, desde el punto de vista matemático, resolver un problema de Stefan a partir de buscar soluciones de similaridad permite pasar del estudio del problema original en ecuaciones en derivadas parciales al estudio de un problema en ecuaciones ordinarias. Esto ultimo muchas veces facilita la resolución del problema.

Se puede asegurar que la función $\theta(x,t) = \omega(\eta)$ es solución de la ecuación del calor (1.2a) si y sólo si la función $\omega = \omega(\eta)$ es solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2\omega}{d\eta^2} + 2\eta\omega = 0, \tag{1.10}$$

cuya solución general está dada por

$$\omega(\eta) = C_1 + C_2 \operatorname{erf}(\eta), \qquad \eta > 0, \tag{1.11}$$

donde erf denota a la *función de error* definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz, \tag{1.12}$$

y C_1 y C_2 son constantes a determinar a partir del resto de las condiciones del problema (1.2).

Por la condición (1.2b) resulta que $C_1 = \theta_0$. Por otro lado, para que la condición (1.2c) se cumpla, es necesario que el cociente $\dfrac{s(t)}{2at}$ sea constante, es decir, que exista $\xi > 0$ de manera que:

$$s(t) = 2a\xi\sqrt{t}, \qquad t > 0.$$

Se tiene también que (1.2c) implica que $C_2 = \dfrac{\theta_f - \theta_0}{\operatorname{erf}(\xi)}$. Finalmente, para que se verifique la condición de Stefan (1.2d), la constante ξ deber ser la única solución de la ecuación trascendente:

$$x \operatorname{erf}(x) \exp(x^2) = \frac{\mathrm{Ste}}{\sqrt{\pi}}, \tag{1.13}$$

donde Ste es el número de Stefan y está definido por

$$\mathrm{Ste} = \frac{c(\theta_0 - \theta_f)}{L}. \tag{1.14}$$

Se concluye entonces que el problema de Stefan a una fase (1.2) tiene una única solución de similaridad dada por

$$\theta(x,t) = \theta_0 + \frac{(\theta_f - \theta_0)}{\mathrm{erf}(\xi)} \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \qquad 0 < x < s(t), \qquad t > 0$$

$$s(t) = 2a\xi\sqrt{t}, \qquad t > 0$$

donde ξ es la única solución de la ecuación (1.13).

De manera análoga se puede hallar la solución de similaridad para el problema de Stefan a dos fases (1.1).

La característica más importante de las soluciones explícitas a problemas de cambio de fase, radica en el hecho de que nos proporcionan una imagen completa de cómo los diversos parámetros interactúan entre sí. Es sólo con la ayuda de soluciones explícitas que se tiene un conocimiento perfecto del proceso en estudio. Sin embargo, hallar soluciones exactas a problemas de Stefan no es una empresa fácil. Dichas soluciones (de similaridad) se pueden encontrar en problemas con condiciones muy restrictivas como ser: 1 dimensión, geometría semi-infinita, temperatura inicial uniforme, etc. Es decir, dada la naturaleza no lineal de este tipo de problemas, las soluciones analíticas se limitan a unos pocos casos y se hace necesario el estudio de métodos de aproximación para los mismos. Se presenta a continuación uno de los métodos más estándar para la aproximación de soluciones de problemas de tipo Stefan.

Método de aproximación por balance integral

Uno de los mecanismos de conducción de calor es la difusión. Es por eso, que la excitación en borde fijo $x = 0$ (por ejemplo: una temperatura, un flujo de calor) no se propaga inmediatamente a todo el material $x > 0$ sino que su efecto se percibe en un intervalo acotado $(0, \delta(t))$, para cada tiempo $t > 0$, fuera del cual la temperatura permanece igual a la temperatura inicial. El método del balance integral calórico introducido por Goodman en 1958 [24], postula la existencia de una función $\delta = \delta(t)$ que mide la profundidad de la capa térmica, es decir, la distancia hasta la cual penetra el calor. En los problemas de cambio de fase, a esta capa térmica se la asume como la frontera libre, es decir $\delta(t) = s(t)$.

Se ilustra a continuación cómo aplicar el método de balance integral calorico al problema de Stefan a una fase (1.2). Se asumirá en particular que $\theta_f = 0$. Se observa que si (θ, s) es solución de dicho problema, a partir de la ecuación del calor (1.2a), la temperatura de cambio de fase (1.2c) y la condición de Stefan (1.2d), se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} \theta(x,t)dx &= \int_0^{s(t)} \frac{\partial\theta}{\partial t}(x,t)dx + \theta(s(t),t)\dot{s}(t), \\
&= \int_0^{s(t)} \frac{k}{\rho c}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(x,t)dx, \\
&= \frac{k}{\rho c}\left[-\frac{\rho L}{k}\dot{s}(t) - \frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t)\right]. \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

Además, si se deriva a la condición (1.2c) con respecto al tiempo, se despeja $\dot{s}$ y se lo reemplaza en la condición de Stefan se obtiene la condición (1.3), a través de la cual se mostró la no linealidad del problema, es decir:

$$
\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 (s(t),t) = \frac{L}{c}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(s(t),t). \qquad (1.16)
$$

El método de balance integral calórico postula aproximar la solución (θ, s) del problema exacto (1.2), con la solución $(\widetilde{\theta}, \widetilde{s})$ del problema aproximado: (1.15), (1.2b), (1.2c), (1.16), (1.2e). Es decir, se reemplaza la ecuación del calor (1.2a) por (1.15) y la condición de Stefan (1.2d) por (1.16), manteniendo el resto de las condiciones del problema exacto iguales. Para la resolución del problema aproximado se propone un perfil de temperatura cuadrático en el espacio

$$
\widetilde{\theta}(x,t) = \theta_0\left[A\left(1-\frac{x}{\widetilde{s}(t)}\right) - B\left(1-\frac{x}{\widetilde{s}(t)}\right)^2\right]. \qquad (1.17)
$$

El método consiste entonces, en transformar la ecuación del calor en una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo asumiendo un perfil cuadrático de temperatura en el espacio. Para este perfil, diferentes variantes se han establecido en [25, 26]. Además, en

[27, 28, 29, 30, 31, 32], se ha aplicado el método de balance integral, utilizando distintos perfiles de temperatura.

Motivación para el estudio de problemas de Stefan con calor latente variable

En la formulación clásica del problema de Stefan, se establecen ciertos supuestos sobre los factores físicos involucrados en el proceso de cambio de fase con el fin de simplificar la descripción del modelo. Una de estas hipótesis, es considerar al calor latente L constante. Sin embargo, existen diferentes aplicaciones que motivan a resolver problemas de Stefan con calor latente variable.

Movimiento de la costa marítima en una cuenca sedimentaria

En [33] se desarrolló un modelo para el movimiento de la costa en una cuenca sedimentaria en respuesta a los cambios en el flujo de línea de sedimentos, el hundimiento tectónico de la corteza terrestre y el cambio del nivel del mar. Un esquema de la sección transversal de la cuenca se muestra en la Figura 1.3.

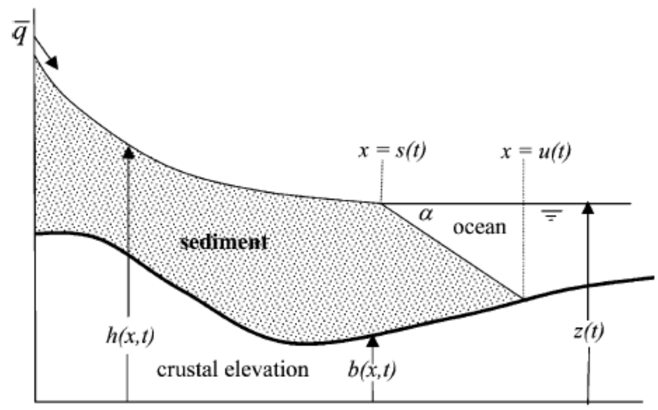

Figura 1.3: Sección transversal de una cuenca marítima sedimentaria [1]

En cada punto del proceso, dos dominios pueden ser identificados en el sistema. El primero es el dominio fluvial subaéreo. En este dominio, el transporte de sedimentos se modela a través de la ecuación de difusión, es decir

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial b}{\partial t}, \qquad 0 \leq x \leq s(t), \tag{1.18}$$

donde h es la altura del sedimento con respecto a una referencia, b es la altura de la corteza terrestre y la difusividad v depende de las características de los granos de sedimentos. La función $s(t)$ representa la posición de la costa en cada instante de tiempo. Las condiciones de borde son

$$v\frac{\partial h}{\partial x}(0,t) = -q(t), \qquad h(s(t),t) = z(t), \tag{1.19}$$

donde q es un flujo de sedimento prescrito y $z(t)$ la altura del mar.

El segundo dominio, es un dominio submarino fuera de la costa. El transporte de sedimento en esta parte está controlado por una combinación de procesos impulsados por la pendiente y la corriente que generan las olas. En [33] se propone un tratamiento simple que fija la superficie sedimentaria fuera de la costa en un ángulo fijo α. Se asume que el movimiento de los granos por la avalanchas subacuáticas es mucho más rápido que el movimiento de sedimentos por procesos fluviales. De esta forma, se puede modelar la región fuera de la costa como una "cuña de sedimentos". Se proporciona una condición para el avance o retirada de la costa dada por

$$-v\frac{\partial h}{\partial x}(s(t),t) = (u-s)\left[\alpha\frac{ds}{dt} + \frac{dz}{dt}\right] - \int_s^u \frac{\partial b}{\partial t}dx, \tag{1.20}$$

donde u es la posición x de la intersección entre la punta de la cuña y la base.

Las ecuaciones (1.18)-(1.20) definen el problema de seguimiento de la costa. Un caso límite surge al considerar constante el nivel del mar, es decir $z = 0$ y suponer que no hay hundimiento tectónico de la corteza terrestre (b constante). Asumiendo también una base con pendiente $\beta < \alpha$ constante, de manera que $\alpha(u-s) = \alpha\beta s/(\alpha-\beta) = \gamma s$ (ver Figura

1.4), resulta que las ecuaciones que gobiernan al problema se reducen a

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \qquad 0 \leq x \leq s(t), \tag{1.21a}$$

$$v\frac{\partial h}{\partial x}(0,t) = -q, \qquad t > 0, \tag{1.21b}$$

$$h(s(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{1.21c}$$

$$v\frac{\partial h}{\partial x}(s(t),t) = -\gamma s(t)\dot{s}(t), \qquad t > 0. \tag{1.21d}$$

Cabe destacar que si se compara la condición (1.21d) con la condición de Stefan del problema de Stefan a una fase clásico como (1.2), resulta que el término correspondiente al calor latente L no es constante, sino que resulta del tipo $L = const.\ s$, es decir, una función lineal de la posición.

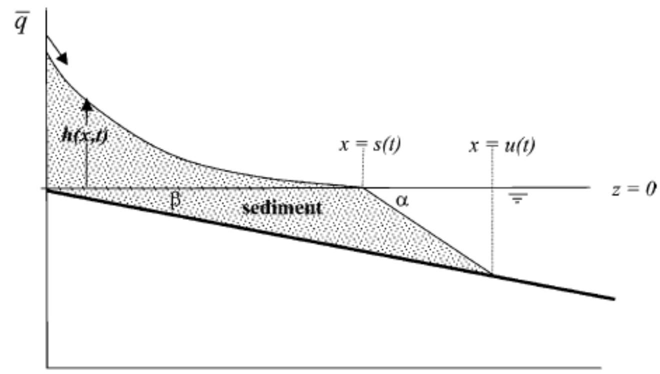

Figura 1.4: Caso límite de la sección transversal de una cuenca marítima sedimentaria [1]

Consolidación unidimensional del suelo con umbral de gradiente

La consolidación del suelo es un proceso especial de transferencia de masa. En la arena, este proceso generalmente es controlado por la ley de Darcy, mientras que en la arcilla, está gobernado por otros modelos no-Darcy. Un modelo típico no Darcy es aquel que presenta un umbral de gradiente como el siguiente

$$v = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |i| \leq i_0 \\ k(|i| - i_0) & \text{si} \quad |i| > i_0, \end{cases} \tag{1.22}$$

donde v es la velocidad aparente del fluido, k el coeficiente de permeabilidad, i el gradiente hidráulico e i_0 el umbral de gradiente.

En la Figura 1.5 se muestra un diagrama de la consolidación unidimensional del suelo con umbral de gradiente.

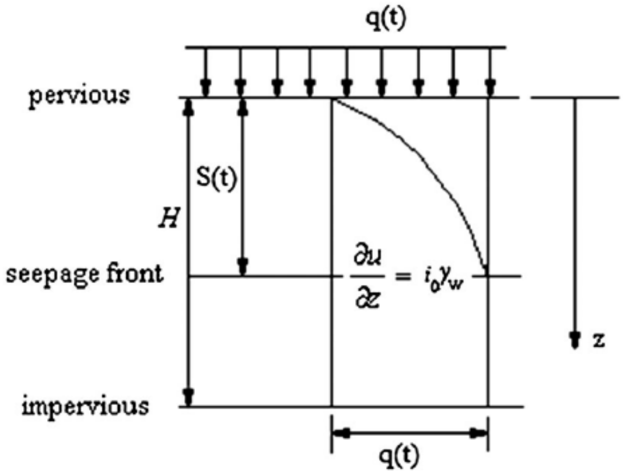

Figura 1.5: Diagrama de la consolidación del suelo con umbral de gradiente [2]

En dicha figura se tiene una carga $q(t)$ dependiente del tiempo. Se denota con γ_w a la unidad de peso del agua y con $S(t)$ a la profundidad del frente de filtración., en el cual el exceso de gradiente de presión de poro alcanza el valor $i_0\gamma_w$.

Durante el proceso de consolidación, el frente de filtración se mueve hacia abajo gradualmente. Si se establece que la carga dependiente del tiempo adopta la forma

$$q(t) = \frac{2q_c\sqrt{t}}{\sqrt{t_r}}, \tag{1.23}$$

donde q_c es un coeficiente de carga y t_r un tiempo de referencia, resulta que dicho proceso se modela matemáticamente a través del siguiente problema (ver [2]):

$$c_v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial w}{\partial t}, \qquad 0 < z < S(t), \tag{1.24a}$$

$$w(0,t) = -\frac{2q_c}{\sqrt{t_t}}\sqrt{t}, \qquad t > 0, \tag{1.24b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}(S(t),t) = i_0 \gamma_w, \qquad t > 0, \tag{1.24c}$$

$$w(S(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{1.24d}$$

$$w(z,0) = 0, \tag{1.24e}$$

donde $w(z,t) = u(z,t) - q(t)$, siendo u el exceso de presión de poro y c_v el coeficiente de consolidación.

Como puede apreciarse, el problema (1.24), resulta un problema de frontera libre implícito, dado que la velocidad de la frontera libre no aparece en la condición (1.24c). Sin embargo, dicha condición puede reescribirse

$$\frac{\partial w}{\partial z}(S(t),t) = \frac{i_0 \gamma_w}{\dot{S}(t)} \dot{S}(t) \tag{1.25}$$

y entenderse como una condición de Stefan en donde el calor latente L resulta del tipo $L = \frac{const.}{\dot{S}(t)}$, es decir, como una función inversamente proporcional a la velocidad de la frontera libre.

Congelación artificial del suelo

Durante el proceso de congelación del suelo, el agua líquida en los poros del suelo es el único material de cambio de fase, la cual se convierte en hielo y libera calor latente. La cantidad de calor latente liberado por el agua líquida depende del contenido volumétrico del agua. Diferentes distribuciones del contenido volumétrico del agua pueden conducir a variaciones espaciales en el calor latente.

Existen dos tipos de procesos de congelación del suelo: uno es el proceso natural causado por la variación en la temperatura del aire y otro es el artificial. La técnica de congelación artificial del suelo es ampliamente utilizada en ingeniería subterránea.

La congelación artificial (AGF) del suelo, es una técnica que se utiliza para la consolidación o impermeabilización temporal del suelo, con el fin de respaldar la excavación de túneles o pozos, impidiendo su desmoronamiento. Como se muestra en la Figura 1.6, la técnica AGF entierra losas de congelación o tubos en el suelo. Se hace circular un refrigerante dentro de estas tuberías y se congela el suelo hacia abajo desde $x = 0$. Después de que el espesor de la zona congelada alcanza cierto nivel, la fuerza de la pared congelada puede ser suficientemente grande como para soportar la carga proveniente de los suelos suprayacentes y las edificaciones superficiales. Durante esta técnica, la distribución del calor latente se determina a partir del contenido volumétrico del agua y este último es el resultado del proceso de consolidación del suelo. Para suelos de grano fino tales como el limo y la arcilla, hay un umbral de gradiente para flujo de líquido en el suelo. En [2] se investigó el proceso unidimensional de consolidación del suelo con umbral de gradiente uniforme, y se indicó que el contenido volumétrico de agua después del la consolidación es una función lineal de la profundidad. Si se supone un umbral de gradiente no uniforme y se considera el caso especial en que el contenido volumétrico del agua puede ser aproximado por $-\gamma x^\alpha / L_w$ ($\gamma < 0$), con L_w el calor latente volumétrico de agua pura, entonces la distribución del calor latente puede ser descripta por $-\gamma x^\alpha$, es decir, una función potencia de la posición.

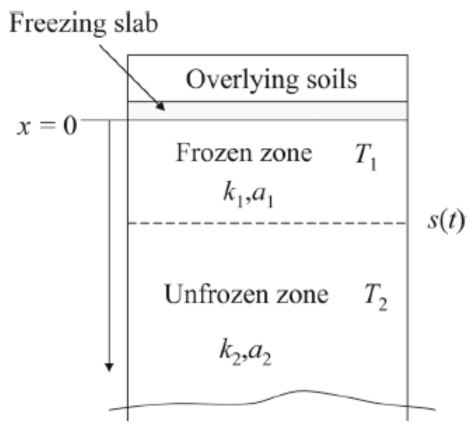

Figura 1.6: Esquema del problema de Stefan a dos fases para la congelación del suelo [3]

Matemáticamente, este modelo formulado en [3] lleva a resolver un problema de Stefan a dos fases que consiste en hallar la temperatura en la zona congelada T_1, la temperatura en la zona no congelada T_2 y la frontera libre $x = s(t)$ que separa ambas regiones, con la particularidad de que el calor latente es una potencia de la posición $L = const.\ s^{\alpha}$.

Antecedentes de problemas de Stefan con calor latente variable

Las tres aplicaciones concretas presentadas anteriormente: el movimiento de las costas marítimas [1], la consolidación de suelo con umbral de gradiente [2] y la congelación artificial del suelo [3], son los disparadores que motivan el estudio de los problemas que se presentan en esta Tesis. Sin embargo, existen numerosos artículos que estudian problemas de Stefan con calor latente variable. A continuación presentamos y resumimos algunos de los resultados existentes en la bibliografía acerca de este tipo de problemas:

En [34] se considera un problema de Stefan con un calor latente dado como función general de la posición de la frontera móvil $L = \varphi(s(t))$. Tal suposición corresponde al caso práctico cuando se tienen en cuenta la influencia de fenómenos tales como la tensión superficial, los gradientes de presión y la no homogeneidad de los materiales. En este artículo se estudian las condiciones suficientes que aseguran existencia y unicidad de la solución.

Como mencionamos anteriormente, en [1] se estudia el movimiento de las costas marítimas en cuencas sedimentarias, dando lugar a un problema de tipo Stefan a una fase donde el calor latente se define como una función lineal de la posición de la frontera libre, es decir $L = \gamma s(t)$ (con γ una constante dada). En dicho artículo se halla la solución exacta de tipo similaridad para el problema planteado. La generalización matemática del correspondiente problema a dos fases es considerada y resuelta en [35].

En [36] se considera un problema de Stefan a una fase donde el calor latente no es constante sino una función potencia de la posición $L = \gamma s^n(t)$ (con γ una constante dada y n un natural). La extensión para exponentes reales no negativos se presenta en [37] y la generalización a dos fases fue realizada en [3]. En todos estos trabajos se hallaron soluciones de similaridad suponiendo condiciones de temperatura o flujo en el borde fijo.

Como fue previamente expuesto, en [2] se estudia la consolidación unidimensional del suelo con umbral de gradiente. El modelo matemático se reduce a un problema de Stefan donde el calor latente se puede expresar como $L = \frac{\gamma}{\dot{s}(t)}$. Es decir, un calor latente que depende de la tasa de cambio de la frontera libre. Si bien no resulta ser un problema de Stefan propiamente dicho se puede considerar como un problema de frontera libre con condiciones implícitas [38], [39].

En el reciente artículo [40], se estudia un problema de Stefan clásico con simetría cilíndrica donde el calor latente está dado por $L = \gamma r^{\alpha}$. Es decir, donde el mismo varía como una potencia de la distancia radial. Allí se hallan soluciones exactas de similaridad, utilizando las funciones de Kummer; extendiendo los resultados existentes en la literatura a un sistema de coordenadas cilíndricas: [1, 35, 36, 37, 3, 41, 42].

Otros problemas de Stefan con simetría cilíndrica y calor latente variable pueden encontrarse en [43, 44]. En estos casos, el calor latente depende inversamente del cuadrado del radio. Cabe mencionar que distintas observaciones experimentales y simulaciones, indican que en la fusión de nanopartículas, la variación del calor latente debe ser considerada, dando lugar a modelos en coordenadas esféricas como [45]. En simetría cilíndrica, podría corresponderse a la fusión de nanohilos [46]. Más bibliografía acerca de problemas de cambio de fase con calor latente no constante puede encontrarse en: [47, 48, 49, 50, 51].

En esta Tesis se pretende generalizar matemáticamente algunos de los resultados obtenidos en la bibliografía existente, hallando soluciones exactas y aproximadas a problemas de tipo Stefan con calor latente variable.

En el Capítulo 2 se presentan definiciones y resultados previos que serán de utilidad para los capítulos siguientes.

En el Capítulo 3, motivados por [1, 36, 37], se presentan dos problemas de tipo Stefan con calor latente definido como una potencia real, no negativa de la posición y con una condición de tipo Robin en el borde fijo del material: el primero a una fase y el segundo a dos fases. Se presentan soluciones de similaridad utilizando las funciones de Kummer. Para el problema a una fase, se estudian las condiciones sobre los datos del problema, para que el mismo resulte equivalente al problema que posee una condición de Dirichlet o Neumann, en vez de Robin, en el borde fijo. En ambos problemas se analiza el comportamiento límite cuando el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo tiende a infinito. Se muestran también diferentes ejemplos numéricos. Los resultados obtenidos en este capítulo han sido publicados en [41],[42]:

- J. Bollati, D.A. Tarzia, Explicit solution for the one-phase Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face, *Communications in Applied Analysis* 22 (2018) 309-332.

- J. Bollati, D.A. Tarzia, Exact solution for a two-phase Stefan problem with variable latent heat and a convective boundary condition at the fixed face, *Z. Angew. Math. Phys.* 69:38 (2018) 1-15.

En el Capítulo 4, motivados por [2], se generaliza lo estudiado en el capítulo anterior, estudiando problemas de tipo Stefan con calor latente dependiente no solo de una potencia de la posición sino también de una potencia de la velocidad. De manera análoga, se resuelven los problemas con condiciones de temperatura flujo o convectiva en el borde fijo, mediante el método de similaridad. Para el caso convectivo, se realiza un estudio del comportamiento límite de la solución cuando el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo tiene a infinito. Se proveen ejemplos computacionales para el cálculo de la frontera libre y el calor latente (variable en el tiempo). Estos resultados han sido publicados en [52],[53]:

- J. Bollati, D.A. Tarzia, One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change, *Electronic Journal of Differential Equations* 2018:10 (2018) 1-12.

- J. Bollati, D.A. Tarzia, One-phase Stefan-like problems with a latent heat depending on the position and velocity of the free boundary, and with Neumann or Robin boundary conditions at the fixed face, *Mathematical Problems in Engineering* 2018 (2018) 1-11. https://doi.org/10.1155/2018/4960391.

En el Capítulo 5, se presentan aproximaciones para el problema de Stefan a una fase con calor latente dependiente de la posición y condiciones de tipo Dirichlet o Robin en el borde fijo. Para obtener dichas aproximaciones se utiliza el método de balance integral clásico, una variante del mismo, y el método de balance integral refinado. Se comparan las distintas aproximaciones con la solución exacta hallada en el Capítulo 3 y se calculan los errores relativos porcentuales que se cometen en cada método.

Capítulo 2

Preliminares

Durante el desarrollo de esta Tesis se utilizarán algunas definiciones y resultados, los cuales se presentan a continuación.

Definición 2.1. *Se define como función de error a*

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2)du, \qquad z \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

La función error complementaria, llamada erfc*, se define a partir de la función error:*

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2)du. \tag{2.2}$$

Las funciones iteradas de error complementaria están dadas de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \mathrm{i}^0 \operatorname{erfc}(z) = \operatorname{erfc}(z), \\ \mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(z) = \displaystyle\int_z^{+\infty} \mathrm{i}^{n-1} \operatorname{erfc}(u)du, \qquad n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2.3}$$

Observación 2.1. *Dado $n \in \mathbb{N}_0$, la solución general de la ecuación diferencial*

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + 2z\frac{d\omega}{dz} - 2n\omega = 0, \tag{2.4}$$

es

$$\omega(z) = C_1 \, \mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(z) + C_2 \, \mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(-z), \qquad z \in \mathbb{R}$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

Para el caso particular en que $n = 0$, la solución

$$\omega(z) = C_1 \,\mathrm{i}^0 \,\mathrm{erfc}(z) + C_2 \,\mathrm{i}^0 \,\mathrm{erfc}(-z) = C_1 \,\mathrm{erfc}(z) + C_2 \,\mathrm{erfc}(-z)$$

se puede reescribir como $\omega(z) = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 \,\mathrm{erf}(z)$, con $\widehat{C}_1$ y $\widehat{C}_2$ constantes arbitrarias.

Definición 2.2. *Se denomina ecuación diferencial de Kummer a la ecuación diferencial ordinaria dada de la siguiente manera:*

$$z\frac{d^2\omega}{dz^2} + (b - z)\frac{d\omega}{dz} - a\omega = 0. \tag{2.5}$$

Dos soluciones usuales de esta ecuación, linealmente independientes, son las llamadas funciones de Kummer $M(a, b, z)$ y $U(a, b, z)$.

La función de Kummer de primera especie M, es una serie hipergeométrica generalizada dada por

$$M(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n n!} z^n, \tag{2.6}$$

donde b no puede ser un entero no positivo y donde $(a)_n$ es el símbolo de Pochhammer definido por

$$(a)_n = a(a + 1)(a + 2) \dots (a + n - 1), \qquad (a)_0 = 1. \tag{2.7}$$

La función confluente hipergeométrica de Tricomi U, se define como

$$U(a, b, z) = \frac{\Gamma(1 - b)}{\Gamma(a + 1 - b)} M(a, b, z) + \frac{\Gamma(b - 1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} M(a + 1 - b, 2 - b, z), \tag{2.8}$$

donde la función gamma, la cual se denota con Γ es la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1} \exp(-u)\, du. \tag{2.9}$$

Notar que para que U esté bien definida, ni a ni $a-b+1$ pueden ser enteros no positivos.

Lema 2.1. *Las funciones de Kummer, se relacionan con la familia de funciones iteradas de error complementaria de la siguiente manera*

$$M\left(-\tfrac{n}{2}, \tfrac{1}{2}, -z^2\right) = 2^n \Gamma\left(\tfrac{n}{2}+1\right)\mathcal{E}_n(z), \tag{2.10}$$

$$zM\left(-\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -z^2\right) = 2^{n-1} \Gamma\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\mathcal{F}_n(z), \tag{2.11}$$

donde n es un entero no negativo y $\mathcal{E}_n$ y $\mathcal{F}_n$ se definen por

$$\mathcal{E}_n(z) = \frac{\mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(z) + \mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(-z)}{2}, \tag{2.12}$$

$$\mathcal{F}_n(z) = \frac{\mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(-z) - \mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(z)}{2}. \tag{2.13}$$

Demostración. Ver [54]. ■

Si se generaliza la ecuación diferencial ordinaria (2.4), para el caso en que n sea un número real α no negativo, no necesariamente natural se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + 2z\frac{d\omega}{dz} - 2\alpha\omega = 0. \tag{2.14}$$

Esta ecuación puede transformarse en una ecuación de Kummer mediante el siguiente resultado dado en [37].

Lema 2.2. *Si se realiza la sustitución $u = -z^2$, la ecuación diferencial ordinaria (2.14) se transforma en*

$$u\frac{d^2\omega}{du^2} + \left(\tfrac{1}{2}-u\right)\frac{d\omega}{du} + \frac{\alpha}{2}\omega = 0. \tag{2.15}$$

Demostración. A partir de la sustitución, se tiene que $du = -2zdz$ y entonces

$$z\frac{d\omega}{dz} = z\frac{d\omega}{du}\frac{du}{dz} = 2u\frac{d\omega}{du},$$

y

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} = \frac{d^2\omega}{du^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \frac{d\omega}{du}\frac{d^2u}{dz^2} = -4u\frac{d^2\omega}{du^2} - 2\frac{d\omega}{du}.$$

Luego la ecuación diferencial ordinaria (2.14) se reescribe como

$$-4u\frac{d^2\omega}{du^2} - 2\frac{d\omega}{du} + 4u\frac{d\omega}{du} - 2\alpha\omega = 0, \tag{2.16}$$

de donde dividiendo por -4, se obtiene (2.15). ■

Observación 2.2. *La ecuación diferencial ordinaria (2.15) es una ecuación de Kummer con parámetros* $a = -\alpha/2$ *y* $b = 1/2$.

La solución general de la ecuación (2.14) está dada a partir del siguiente resultado obtenido en [52].

Teorema 2.1. *La solución general de la ecuación (2.14) para* $\alpha \geq 0$ *está dada por*

$$\omega(z) = C_1 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -z^2\right) + C_2 z M\left(-\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -z^2\right), \tag{2.17}$$

donde C_1 *y* C_2 *son constantes arbitrarias.*

Demostración. Se divide la prueba en dos casos, según α sea entero no negativo o no.

Caso α *positivo, no entero:*

Introduciendo la variable $u = -z^2$, por el Lema 2.2, la ecuación diferencial (2.14) se transforma en una ecuación de Kummer, cuya solución ω se puede expresar como

$$\omega(u) = \widehat{C}_1 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, u\right) + \widehat{C}_2 U\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, u\right), \tag{2.18}$$

donde $\widehat{C}_1$ y $\widehat{C}_2$ son constantes arbitrarias. Debido a la definición de U dada por (2.8) se puede obtener fácilmente que ω puede reescribirse de la siguiente manera

$$\omega(u) = \overline{C}_1 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, u\right) + \overline{C}_2 u^{1/2} M\left(-\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, u\right), \tag{2.19}$$

donde $\overline{C}_1$ y $\overline{C}_2$ son constantes arbitrarias. Teniendo en cuenta la sustitución realizada, se llega a que la solución ω de la ecuación diferencial ordinaria (2.14) se representa mediante (2.17). Notar que al ser $u^{1/2} = (-z^2)^{1/2}$, las constantes C_1 y C_2 no necesariamente son reales.

Caso $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ entero no negativo:

Para el caso $\alpha = n$ entero no negativo se tiene que la ecuación diferencial a analizar es la (2.4) cuya solución está dada por las funciones iteradas de error complementario. Es decir

$$\omega(z) = \widehat{C}_1 \mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(z) + \widehat{C}_2 \mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(-z). \tag{2.20}$$

Sean C_1 y C_2 constantes arbitrarias. Si se eligen

$$\widehat{C}_1 = C_1 2^{n-1}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+1\right) - C_2 2^{n-2}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right), \tag{2.21}$$

$$\widehat{C}_2 = C_1 2^{n-1}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+1\right) + C_2 2^{n-2}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right), \tag{2.22}$$

en (2.20) se deduce que

$$\begin{aligned}
\omega(z) =& \left[C_1 2^{n-1}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+1\right) - C_2 2^{n-2}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\right] \mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(z) \\
&+ \left[C_1 2^{n-1}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+1\right) + C_2 2^{n-2}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\right] \mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(-z), \\
=& C_1 2^{n-1}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+1\right)\left[\mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(z) + \mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(-z)\right] \\
&+ C_2 2^{n-2}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\left[\mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(-z) - \mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(z)\right], \\
=& C_1 2^{n}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+1\right)\mathcal{E}_n(z) + C_2 2^{n-1}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\mathcal{F}_n(z).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

De acuerdo a las relaciones (2.10)-(2.11) se llega a que la solución a la ecuación (2.14) para $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ está dada por

$$\omega(z) = C_1 M\left(-\tfrac{n}{2}, \tfrac{1}{2}, -z^2\right) + C_2 z M\left(-\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -z^2\right). \tag{2.24}$$

Se observa que para $\alpha = 0$, la ecuación (2.14) se reduce a

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + 2z\frac{d\omega}{dz} = 0, \tag{2.25}$$

cuya solución general está dada por

$$\omega(z) = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 \operatorname{erf}(z), \tag{2.26}$$

en concordancia con (2.24) dado que

$$M(0, \tfrac{1}{2}, -z^2) = 1, \qquad\qquad M\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -z^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2z}\operatorname{erf}(z). \tag{2.27}$$

■

La importancia del teorema anterior radica en el siguiente corolario

Corolario 2.1. ***(Método de semejanza)***
Sea $T(x,t) = t^{\alpha/2}\omega(\eta)$, donde la variable de similaridad η se define por $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$, con $a > 0$.

i) La función T satisface la ecuación del calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{2.28}$$

si y sólo si ω es solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2\omega}{d\eta^2} + 2\eta\frac{d\omega}{d\eta} - 2\alpha\omega = 0. \tag{2.29}$$

ii) La solución general T viene dada por

$$T(x,t) = t^{\alpha/2}\left[C_1 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\eta^2\right) + C_2 \eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\eta^2\right)\right], \tag{2.30}$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

Demostración. Sea $T(x,t) = t^{\alpha/2}\omega(\eta)$, con $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$. Luego

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^{\alpha/2-1}}{4a^2}\frac{d^2\omega}{d\eta^2}(\eta), \qquad \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = t^{\alpha/2-1}\left(\frac{\alpha}{2}\omega(\eta) - \frac{\eta}{2}\frac{d\omega}{d\eta}(\eta)\right). \tag{2.31}$$

Surge entonces que la ecuación del calor (2.28) se satisface si y sólo si

$$t^{\alpha/2-1}\left(\frac{\alpha}{2}\omega(\eta) - \frac{\eta}{2}\frac{d\omega}{d\eta}(\eta)\right) = a^2\frac{t^{\alpha/2-1}}{4a^2}\frac{d^2\omega}{d^2\eta}(\eta), \tag{2.32}$$

de donde simplificando y reodenando, se obtiene que ω es solución de la ecuación diferencial ordinaria (2.29). En virtud del Teorema 2.1 se sabe que ω viene dada por (2.17), es decir

$$\omega(\eta) = C_1 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\eta^2\right) + C_2\eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\eta^2\right). \tag{2.33}$$

Teniendo en cuenta nuevamente que $T(x,t) = t^{\alpha/2}\omega(\eta)$, se obtiene (2.30). ■

A continuación se enuncian algunas propiedades de las funciones de Kummer, las cuales pueden encontrarse en [54] y serán de utilidad a lo largo de esta Tesis.

Lema 2.3. *Se verifican las siguientes propiedades*

- *Fórmulas de derivación*

$$\frac{d}{dz}M(a,b,z) = \frac{a}{b}M(a+1,b+1,z), \tag{2.34}$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^{b-1}M(a,b,z)\right) = (b-1)z^{b-2}M(a,b-1,z), \tag{2.35}$$

$$\frac{d}{dz}U(a,b,z) = -aU(a+1,b+1,z). \tag{2.36}$$

- *Relación entre U y M*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(b)}M(a,b,z) =& \frac{\exp(a\pi i)}{\Gamma(b-a)}\,U(a,b,z)\\ &+\frac{\exp(-(b-a)\pi i)}{\Gamma(a)}\exp(z)\,U(b-a,b,\exp(-\pi i)z).\end{aligned} \tag{2.37}$$

- *Comportamiento asintótico*

$$\frac{M(a,b,z)}{\Gamma(b)} \sim \frac{\exp(z)z^{a-b}}{\Gamma(a)}, \qquad z \to \infty, \tag{2.38}$$

$$U(a,b,z) \sim z^{-a}, \qquad z \to \infty, \quad |\mathrm{ph}(z)| < \frac{3\pi}{2} - \delta, \tag{2.39}$$

con δ *una constante arbitraria positiva y pequeña y* $a \neq 0, -1, -2, \ldots$

- *Representación integral de U*

$$U(a,b,z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt, \tag{2.40}$$

con $\mathrm{Re}(a) > 0$ *y* $|\mathrm{ph}(z)| < \frac{\pi}{2}$.

- *Relación con la función exponencial*

$$M(a,b,z) = \exp(z) M(b-a, b, -z), \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned} \exp(-z^2) = {} & -2\alpha z^2 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -z^2\right) M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1, \tfrac{3}{2}, -z^2\right) \\ & + M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -z^2\right) M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -z^2\right), \end{aligned} \tag{2.42}$$

donde α *es un número real no negativo.*

- *Valores particulares*

$$M(a,b,0) = M(0,b,z) = 1, \tag{2.43}$$

$$M\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -z^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2z} \operatorname{erf}(z), \tag{2.44}$$

$$U\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, z^2\right) = \sqrt{\pi} \exp(z^2) \operatorname{erfc}(z). \tag{2.45}$$

Capítulo 3

Calor latente dependiente de la posición de la frontera libre

3.1. Problema de Stefan a una fase con condición convectiva en el borde fijo

Motivados por los trabajos [1, 36, 37] en donde se estudian problemas de Stefan con calor latente dependiente de una potencia de la posición y [21] en donde se halla solución exacta a un problema de Stefan clásico con condición convectiva en el borde fijo; se plantea el siguiente problema de Stefan a una fase, para un material homogéneo, semi-infinito, donde se consideran un calor latente dependiente de una potencia de la posición y una condición convectiva en el borde fijo. Dicho problema consiste en hallar la temperatura $T_h = T_h(x,t)$ y la frontera libre $s_h = s_h(t)$ de manera que:

$$\frac{\partial T_h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < s_h(t), \quad t > 0, \tag{3.1a}$$

$$k\frac{\partial T_h}{\partial x}(0,t) = \frac{h}{\sqrt{t}}\left[T_h(0,t) - \theta_\infty t^{\alpha/2}\right], \qquad t > 0, \tag{3.1b}$$

$$T_h(s_h(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{3.1c}$$

$$k\frac{\partial T_h}{\partial x}(s_h(t),t) = -\gamma s_h^\alpha(t)\dot{s}_h(t), \qquad t > 0, \tag{3.1d}$$

$$s_h(0) = 0, \tag{3.1e}$$

donde a^2 es le coeficiente de difusividad térmica, k representa la conductividad térmica y γx^α es el calor latente por unidad de volumen con $\alpha \geq 0$. La temperatura de cambio de fase es cero (3.1c). Se impone una condición convectiva en el borde fijo dada por (3.1b) donde θ_∞ y h caracterizan a la temperatura ambiente y al coeficiente de transferencia de calor en $x = 0$, respectivamente. Notar que $\dot{s}_{_h}(t)$ representa la velocidad de la interfase. Se trabajará bajo las hipótesis $\gamma > 0, h > 0$ y $\theta_\infty > 0$ que corresponden al caso de fusión. Para analizar la solidificación se debe asumir $h > 0$, $\gamma < 0$ y $\theta_\infty < 0$.

El problema (3.1) constituye una generalización al problema analizado en [37], dado que si se toma el límite cuando $h \to \infty$ en la condición (3.1b), se recupera la condición de Dirichlet impuesta en dicho artículo ya que $T_{_h}(0,t) \to t^{\alpha/2}\theta_\infty$. Se utilizará la técnica de similaridad para obtener la solución explícita y se estudiarán las condiciones necesarias para que el problema (3.1) resulte equivalente a los problemas con condición de temperatura y flujo en el borde fijo. Se analiza también el comportamiento límite de la solución cuando el coeficiente de transferencia de calor en el borde fijo h tiende a infinito.

3.1.1. Solución exacta de tipo similaridad

Teniendo en cuenta el método de semejanza introducido en el Capítulo 2, se demuestra el siguiente resultado, el cual provee de una solución exacta al problema (3.1), utilizando las funciones de Kummer.

Teorema 3.1. *El problema de Stefan a una fase (3.1) posee una única solución de tipo similaridad dada por*

$$T_{_h}(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_{_h} M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\eta^2\right) + B_{_h}\eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\eta^2\right)\right], \tag{3.2}$$

$$s_{_h}(t) = 2a\nu_{_h}\sqrt{t}, \tag{3.3}$$

donde $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ *y las constantes* A_h *y* B_h *están definidas por*

$$A_h = \frac{-\nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_h^2\right)} B_h, \tag{3.4}$$

$$B_h = \frac{-\theta_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_h^2\right)}{\left[\frac{k}{2ah} M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_h^2\right) + \nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)\right]}. \tag{3.5}$$

El coeficiente adimensional ν_h *se obtiene como la única solución de la siguiente ecuación:*

$$\frac{k\theta_\infty}{\gamma 2^{\alpha+1} a^{\alpha+2}} f_h(z) = z^{\alpha+1}, \qquad z > 0, \tag{3.6}$$

donde

$$f_h(z) = \frac{1}{\frac{k}{2ah} M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + z M\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, z^2\right)}, \qquad z > 0. \tag{3.7}$$

Demostración. La solución general a la ecuación (3.1a), basada en las funciones de Kummer está dada por el Corolario 2.1 y puede escribirse como

$$T_h(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_h M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\eta^2\right) + B_h \eta M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\eta^2\right)\right], \tag{3.8}$$

donde $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ es la variable de similaridad y A_h, B_h son coeficientes que deben ser determinados a partir de las condiciones restantes del problema.
De las condiciones (3.1c) y (3.1d) se tiene que la frontera libre es de la forma

$$s_h(t) = 2a\nu_h\sqrt{t}. \tag{3.9}$$

donde ν_h es una constante que también debe ser determinada a partir de las condiciones del problema.

De las ecuaciones (3.1c), (3.8) y (3.9) se obtiene que

$$T_h(s(t),t) = t^{\alpha/2}\left[A_h M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_h^2\right) + B_h \nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)\right] = 0, \tag{3.10}$$

y despejando A_h se tiene

$$A_h = \frac{-\nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu_h^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)} B_h. \tag{3.11}$$

Por otra parte, a partir de las reglas de derivación de las funciones de Kummer (2.34)-(2.35) resulta que

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\eta} M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\eta^2\right) &= \tfrac{(-\alpha/2)}{1/2} M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{1}{2}+1,-\eta^2\right)(-2\eta),\\ &= 2\alpha\eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\eta^2\right),\end{aligned} \tag{3.12}$$

y siendo $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\eta}\left[\eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta^2\right)\right] &= \sqrt{-1}\frac{d}{d\eta}\left[(-\eta^2)^{3/2-1} M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta^2\right)\right]\\ &= \sqrt{-1}\left(\tfrac{3}{2}-1\right)\left(-\eta^2\right)^{3/2-2} M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\eta^2\right)(-2\eta)\\ &= M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\eta^2\right).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Utilizando dichas fórmulas se puede calcular la derivada parcial con respecto a la variable espacial de la función temperatura

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_h}{\partial x}(x,t) &= t^{\alpha/2}\left[A_h 2\alpha\eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\eta^2\right) + B_h M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\eta^2\right)\right]\frac{1}{2a\sqrt{t}}\\ &= \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{2a}\left[2A_h\alpha\eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\eta^2\right) + B_h M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\eta^2\right)\right].\end{aligned} \tag{3.14}$$

Dado que $M(a,b,0)=1$, se obtiene que $T_h(0,t) = A_h t^{\alpha/2}$ y $\frac{\partial T_h}{\partial x}(0,t) = \frac{B_h}{2a} t^{(\alpha-1)/2}$. Luego, la condición (3.1b) se satisface si y sólo si

$$k\frac{B_h}{2a} t^{(\alpha-1)/2} = \frac{h}{\sqrt{t}}\left[t^{\alpha/2} A_h - \theta_\infty t^{\alpha/2}\right], \tag{3.15}$$

es decir:

$$k\frac{B_h}{2a} = h\left[A_h - \theta_\infty\right]. \tag{3.16}$$

Reemplazando A_h por (3.11), resulta

$$\frac{k}{2a}B_h + \frac{h\nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu_h^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)}B_h = -h\theta_\infty. \tag{3.17}$$

Se tiene entonces que B_h está dada por

$$B_h = \frac{-h\theta_\infty 2aM\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)}{\left[kM\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)+2ah\nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu_h^2\right)\right]}. \tag{3.18}$$

Hasta aquí, se han obtenido las fórmulas (3.11) y (3.18) para los coeficientes A_h y B_h en función del coeficiente desconocido ν_h que caracteriza a la frontera libre. Para hallar ν_h se utilizará la condición (3.1d), por lo que será necesario calcular $\frac{\partial T_h}{\partial x}(s_h(t),t)$. A partir de la fórmula (3.14) y las identidades (2.41)-(2.42) se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_h}{\partial x}(s_h(t),t) &= \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{a}\left[A_h\alpha\nu_h M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\nu_h^2\right)+\frac{B_h}{2}M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\nu_h^2\right)\right]\\
&= \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{a}\left[\frac{-\nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu_h^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)}B_h\alpha\nu_h M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\nu_h^2\right)+\right.\\
&\quad\left.+\frac{B_h}{2}M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\nu_h^2\right)\right]\\
&= \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{2a}\frac{B_h}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)}\left[-2\alpha\nu_h^2 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\nu_h^2\right)M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},\nu_h^2\right)\right.\\
&\quad\left.+M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\nu_h^2\right)M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\nu_h^2\right)\right],\\
&= \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{2a}\frac{\exp(-\nu_h^2)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)}B_h\\
&= \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{2a}\frac{\exp(-\nu_h^2)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)}\frac{(-h)\theta_\infty 2aM\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)}{\left[kM\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)+2ah\nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu_h^2\right)\right]}\\
&= \frac{-t^{(\alpha-1)/2}h\theta_\infty\exp(-\nu_h^2)}{\exp(-\nu_h^2)\left[kM\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\nu_h^2\right)+2ah\nu_h M\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},\nu_h^2\right)\right]},
\end{aligned}$$

es decir

$$\frac{\partial T_h}{\partial x}(s_h(t),t) = \frac{-t^{(\alpha-1)/2}h\theta_\infty}{\left[kM\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\nu_h^2\right)+2ah\nu_h M\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},\nu_h^2\right)\right]}. \tag{3.19}$$

Luego, teniendo en cuenta que

$$s_h^{\alpha}(t)\dot{s}_h(t) = 2^{\alpha}a^{\alpha+1}\nu_h^{\alpha+1}t^{(\alpha-1)/2}$$

la condición de Stefan (3.1d) es equivalente a

$$\frac{h\theta_\infty}{\left[M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\nu_h^2\right)+\frac{2ah}{k}\nu_h M\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},\nu_h^2\right)\right]} = \gamma\nu_h^{\alpha+1}2^{\alpha}a^{\alpha+1},$$

o equivalentemente a

$$\frac{k\theta_\infty}{\gamma 2^{\alpha+1}a^{\alpha+2}}\frac{1}{\left[\frac{k}{2ah}M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\nu_h^2\right)+\nu_h M\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},\nu_h^2\right)\right]} = \nu_h^{\alpha+1}.$$

Se obtiene de este modo que ν_h debe ser solución de la siguiente ecuación no lineal

$$\frac{k\theta_\infty}{\gamma 2^{\alpha+1}a^{\alpha+2}}f_h(z) = z^{\alpha+1}, \qquad z>0, \tag{3.20}$$

con f_h dada por

$$f_h(z) = \frac{1}{\left[\frac{k}{2ah}M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\right)+zM\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},z^2\right)\right]}, \qquad z>0. \tag{3.21}$$

Es decir, la temperatura T_h y la frontera libre s_h definidas por (3.2) y (3.3) constituyen una solución al problema (3.1a)-(3.1e), con A_h y B_h definidas por las ecuaciones (3.4) y (3.5), respectivamente si y sólo si ν_h verifica la ecuación (3.20). La demostración quedará completa una vez probada la existencia y unicidad de solución de dicha ecuación. Para ello, se estudia el comportamiento de la función f_h.

Utilizando nuevamente las propiedades de las funciones de Kummer (2.34)-(2.35) se tiene

$$\frac{df_h}{dz}(z) = -\left[\frac{k}{ah}(\alpha+1)zM\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2},\frac{3}{2},z^2\right)+M\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{1}{2},z^2\right)\right]f_h^2(z). \tag{3.22}$$

Por lo tanto f_h verifica

$$f_h(0) = \frac{2ah}{k}, \qquad \lim_{z\to\infty} f_h(z) = 0, \qquad \frac{d}{dz} f_h(z) < 0, \qquad \forall z > 0,$$

de lo que se deduce que el lado izquierdo de la ecuación (3.20) es una función estrictamente decreciente en la variable z que va de la constante positiva $\frac{h\theta_\infty}{\gamma 2^\alpha a^{\alpha+1}} > 0$ a 0 cuando z crece de 0 a $+\infty$, mientras que el lado derecho de (3.20) es una función estrictamente creciente en z que va de 0 a $+\infty$. Por lo tanto, existe una única solución ν_h de la ecuación (3.20). Se puede concluir entonces que el problema dado por (3.1a)-(3.1e) tiene una única solución de tipo similaridad. ■

Observación 3.1. *De acuerdo al teorema anterior se tiene* $A_h > 0$ *y* $B_h < 0$*. Por la condición convectiva (3.1b) resulta*

$$T_h(0,t) = t^{\alpha/2}\left[\frac{k}{2ah}B_h + \theta_\infty\right] < t^{\alpha/2}\theta_\infty.$$

En el caso especial en que α sea un entero no negativo, denotado por n, las funciones de Kummer están relacionadas con la familia de integrales iteradas de la función de error complementario y con la función gamma a través de (2.10)-(2.11). A partir de dichas relaciones, la solución al problema (3.1a)-(3.1e), dada por el Teorema 3.1, puede reescribirse para el caso particular en que α sea un natural.

Corolario 3.1. *La solución al problema (3.1a)-(3.1e) para el caso en que* $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ *está dada por:*

$$T_h(x,t) = \frac{-t^{n/2}2^n h\theta_\infty a\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\left[\mathcal{F}_n(\eta)\mathcal{E}_n(\nu_h) - \mathcal{F}_n(\nu_h)\mathcal{E}_n(\eta)\right]}{k\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\mathcal{E}_n(\nu_h) + ah\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathcal{F}_n(\nu_h)}, \tag{3.23}$$

$$s_h(t) = 2a\nu_h\sqrt{t}, \tag{3.24}$$

donde $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ *es la variable de similaridad y* ν_h *es la única solución positiva de la* *siguiente ecuación*

$$\frac{k\theta_\infty}{\gamma a^{(n+2)}2^{2n}\left[\frac{k}{ah}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\mathcal{E}_n(z)+\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathcal{F}_n(z)\right]}=z^{n+1}\exp(z^2),\qquad z>0.\qquad(3.25)$$

Demostración. En efecto, sabemos que si $\alpha = n$ la temperatura T_h viene dada por:

$$T_h(x,t)=t^{n/2}\left[A_h M\left(-\tfrac{n}{2},\tfrac{1}{2},-\eta^2\right)+B_h\eta M\left(-\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta^2\right)\right],$$

donde A_h y B_h están definidos por las fórmulas (3.4) y (3.5), respectivamente. Por consiguiente:

$$\begin{aligned}
T_h(x,t) &= t^{n/2}\left[-\frac{\nu_h M\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu_h^2\right)}{M\left(-\frac{n}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)}M\left(-\tfrac{n}{2},\tfrac{1}{2},-\eta^2\right)B_h+B_h\eta M\left(-\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta^2\right)\right]\\
&= t^{n/2}B_h\left[-\frac{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathcal{F}_n(\nu_h)}{2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\mathcal{E}_n(\nu_h)}2^n\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+1\right)\mathcal{E}_n(\eta)+2^{n-1}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\mathcal{F}_n(\eta)\right]\\
&= t^{n/2}2^{n-1}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right)B_h\left(\tfrac{\mathcal{F}_n(\eta)\mathcal{E}_n(\nu_h)-\mathcal{F}_n(\nu_h)\mathcal{E}_n(\eta)}{\mathcal{E}_n(\nu_h)}\right)\\
&= t^{n/2}2^{n-1}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{\mathcal{F}_n(\eta)\mathcal{E}_n(\nu_h)-\mathcal{F}_n(\nu_h)\mathcal{E}_n(\eta)}{\mathcal{E}_n(\nu_h)}\right)\left(\tfrac{-h\theta_\infty 2aM\left(-\frac{n}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)}{kM\left(-\frac{n}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)+2ah\nu_h M\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu_h^2\right)}\right)\\
&= t^{n/2}2^{n-1}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{\mathcal{F}_n(\eta)\mathcal{E}_n(\nu_h)-\mathcal{F}_n(\nu_h)\mathcal{E}_n(\eta)}{\mathcal{E}_n(\nu_h)}\right)\left(\tfrac{-h\theta_\infty 2a2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\mathcal{E}_n(\nu_h)}{k+2ah\nu_h M\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu_h^2\right)}\right).
\end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior se llega a (3.23). Del mismo modo, la función f_h dada por (3.7) se transforma en:

$$\begin{aligned}
f_h(z) &= \frac{1}{\exp(z^2)\left[\frac{k}{2ah}M\left(-\frac{n}{2},\frac{1}{2},z^2\right)+zM\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-z^2\right)\right]}\\
&= \frac{1}{2^{n-1}\exp(z^2)\left[\frac{k}{ah}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\mathcal{E}_n(z)+\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathcal{F}_n(z)\right]}
\end{aligned}$$

y por lo tanto, la ecuación (3.6) para ν_h, puede reescribirse como (3.25) cuando $\alpha\in\mathbb{N}$.

■

Observación 3.2. *Teniendo en cuenta que* $\mathcal{E}_0(z)=1$, $\mathcal{F}_0(z)=\operatorname{erf}(z)$, $\Gamma(1)=1$ *y* $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, *para el caso* $n=0$, *las funciones (3.23)-(3.24) y la ecuación (3.25) se* *reducen a*

$$T_h(x,t) = \frac{-h\theta_\infty a\sqrt{\pi}\left[erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - erf(\nu_h)\right]}{k\left[1 + \frac{a\sqrt{\pi}h}{k}erf(\nu_h)\right]}, \tag{3.26}$$

$$s_h(t) = 2a\nu_h\sqrt{t}, \tag{3.27}$$

donde ν_h *es la única solución positiva de*

$$\frac{k\theta_\infty}{\gamma a^2\left[\frac{k}{ah} + \sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(z)\right]} = z\exp(z^2), \qquad z > 0. \tag{3.28}$$

Esta solución coincide con la dada en [21] para el problema de Stefan a una fase.

3.1.2. Equivalencia con otros problemas

En esta sección se definen dos nuevos problemas ya estudiados en la literatura y se analiza bajo qué hipótesis los mismos resultan equivalentes al problema (3.1).

Equivalencia con el problema con condición de Dirichlet

Se denota con (P_h) al problema gobernado por las ecuaciones (3.1a)-(3.1e). Si en el mismo, se cambia la condición convectiva impuesta en el borde fijo (3.1b) por una condición de temperatura se obtiene el siguiente problema (P_0), que consiste en hallar la temperatura $T_0 = T_0(x,t)$ y la frontera libre $s_0 = s_0(t)$ de manera que se satisfagan:

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < s_0(t), \quad t > 0, \tag{3.29a}$$

$$T_0(0,t) = \theta_0 t^{\alpha/2} \qquad t > 0, \tag{3.29b}$$

$$T_0(s_0(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{3.29c}$$

$$k\frac{\partial T_0}{\partial x}(s_0(t),t) = -\gamma s_0(t)^\alpha \dot{s}_0(t), \qquad t > 0, \tag{3.29d}$$

$$s_0(0) = 0, \tag{3.29e}$$

donde la temperatura en la frontera fija es caracterizada por $\theta_0 > 0$.

Teorema 3.2. *Existe una única solución de tipo similaridad del problema* (P_0)*, gobernado por las ecuaciones (3.29a)-(3.29e) y está dada por*

$$T_0(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_0 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\eta^2\right) + B_0 \eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\eta^2\right)\right], \tag{3.30}$$

$$s_0(t) = 2a\nu_0\sqrt{t}, \tag{3.31}$$

donde $\eta = \dfrac{x}{2a\sqrt{t}}$*, los coeficientes* A_0 *y* B_0 *están definidos por:*

$$A_0 = \theta_0, \qquad\qquad B_0 = \frac{-\theta_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_0^2\right)}{\nu_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_0^2\right)}, \tag{3.32}$$

y el parámetro ν_0 *está dado por la única solución de la siguiente ecuación*

$$\frac{k\theta_0}{\gamma 2^{\alpha+1} a^{\alpha+2}} f(z) = z^{\alpha+1}, \qquad z > 0 \tag{3.33}$$

con:

$$f(z) = \frac{1}{zM\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, z^2\right)}. \tag{3.34}$$

Demostración. Ver [37]. ■

Una vez definidos los problemas (P_h) y (P_0), se prueba la equivalencia entre ellos bajo ciertas hipótesis sobre los datos. Se entenderá por equivalencia al hecho de que ambos problemas tengan la misma solución, es decir $T_h = T_0$ y $s_h = s_0$.

Teorema 3.3.

a) Sean θ_∞*, h constantes dadas, datos del problema* (P_h) *y* ν_h *dado por la única solución de (3.6). Si se resuelve el problema* (P_0) *con dato* θ_0 *definido por:*

$$\theta_0 = \frac{\theta_\infty \nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)}{\frac{k}{2ah} M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_h^2\right) + \nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)}, \tag{3.35}$$

entonces la solución de (P_0) *coincide con la del problema* (P_h)*.*

b) Sea θ_0 *una constante dada, dato del problema* (P_0) *y* ν_0 *la única solución de la* *ecuación (3.33). Si se resuelve el problema* (P_h) *tomando* $\theta_\infty > \theta_0$ *y*

$$h = \frac{-k\theta_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_0^2\right)}{2a(\theta_0 - \theta_\infty)\nu_0 M\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_0^2\right)}, \tag{3.36}$$

entonces la solución del problema (P_h) *coincide con la de* (P_0)*.*

c) *Si los datos* θ_∞*,* h *del problema* (P_h) *están relacionados con el dato* θ_0 *del problema* (P_0) *a través de la relación (3.35) (equivalente a (3.36)), entonces ambos problemas poseen la misma solución.*

Demostración.

a) Consideramos el problema (P_0) con dato θ_0 definido por (3.35). Probaremos que la solución (T_0, s_0) de dicho problema coincide con el par solución (T_h, s_h) del problema (P_h).

De acuerdo al teorema (3.2), la frontera libre s_0 solución de (P_0) está caracterizada por el coeficiente ν_0 que es la única solución de la ecuación (3.33). Reemplazando θ_0 por (3.35), se tiene que ν_0 es la única solución de

$$\frac{k}{\gamma 2^{\alpha+1}a^{\alpha+2}} \frac{\theta_\infty \nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)}{\left[\frac{k}{2ah} M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_h^2\right) + \nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)\right]} \frac{1}{zM\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, z^2\right)} = z^{\alpha+1}. \tag{3.37}$$

Observemos que esta ecuación tiene por solución a ν_h, dado que si se reemplaza z por ν_h en (3.37), se obtiene la ecuación (3.6). Por la unicidad de solución resulta entonces que $\nu_0 = \nu_h$. Como consecuencia inmediata se obtiene que $s_0 = s_h$.

Para demostrar que T_0 coincide con T_h, probamos que $A_0 = A_h$ y $B_0 = B_h$. En efecto,

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{-\theta_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_0^2\right)}{\nu_0 M\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_0^2\right)} \\ &= \frac{-M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_h^2\right)}{\nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)} \frac{\theta_\infty \nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)}{\left[\frac{k}{2ah} M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_h^2\right) + \nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)\right]} \\ &= B_h, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A_0 = \theta_0 &= \frac{\theta_\infty \nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)}{\frac{k}{2ah} M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_h^2\right) + \nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)} \\ &= \frac{-B_h \nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_h^2\right)} \\ &= A_h. \end{aligned}$$

Queda entonces demostrado a).

b) De manera recíproca, se considera el problema (P_h) con datos $\theta_\infty > \theta_0$ y h dado por (3.36). La solución a este problema (T_h, s_h) está dada por el Teorema 3.1. Para probar que dicha solución coincide con la solución del problema (P_0), primero se prueba que el coeficiente ν_h es igual a ν_0.

Se sabe que ν_h es la única solución de (3.6). Reemplazando h dado por (3.36), surge ν_h es la única solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{k\theta_\infty}{\gamma 2^{\alpha+1} a^{\alpha+2}} \frac{1}{\left[\frac{-(\theta_0-\theta_\infty)\nu_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_0^2\right)}{\theta_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_0^2\right)} M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + zM\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, z^2\right)\right]} = z^{\alpha+1}. \tag{3.38}$$

Si se reemplaza z por ν_0, resulta que dicha ecuación se reduce a (3.33). Por ende, se puede afirmar que ν_0 es solución de (3.38). Ahora bien, como la única solución de (3.38) es ν_h, se tiene que $\nu_h = \nu_0$. Se desprende de manera inmediate que $s_h = s_0$. Para demostrar que $T_h = T_0$, se demuestra primero que $A_h = A_0$ y $B_h = B_0$ de manera análoga a lo hecho en el ítem anterior.

c) La equivalencia de los problemas (P_0) y (P_h) queda demostrada con los dos ítems anteriores.

■

Equivalencia con el problema con condición de Neumann

De manera análoga, se estudia un problema (P_q) que se define a través del problema (P_h), imponiendo un flujo en la frontera fija, en lugar de una condición convectiva. El mismo consiste en hallar la temperatura $T_q = T_q(x,t)$ y la frontera libre $s_q = s_q(t)$ de manera que se satisfaga:

$$\frac{\partial T_q}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T_q}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < s_q(t), \quad t > 0, \tag{3.39a}$$

$$T_q(0,t) = -qt^{(\alpha-1)/2} \qquad t > 0, \tag{3.39b}$$

$$T_q(s_q(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{3.39c}$$

$$k\frac{\partial T_q}{\partial x}(s_q(t),t) = -\gamma s_q(t)^{\alpha} \dot{s}_q(t), \qquad t > 0, \tag{3.39d}$$

$$s_q(0) = 0, \tag{3.39e}$$

donde se impone un flujo en la frontera libre caracterizado por $q > 0$.

Teorema 3.4. *Existe una única solución de tipo similaridad del problema* (P_q)*, gobernado por las ecuaciones (3.39a)-(3.39e) y está dada por*

$$T_q(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_q M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\eta^2\right) + B_q \eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\eta^2\right)\right], \tag{3.40}$$

$$s_q(t) = 2a\nu_q\sqrt{t}, \tag{3.41}$$

donde $\eta = \dfrac{x}{2a\sqrt{t}}$ *es la variable de similaridad, las constantes* A_q *y* B_q *se definen como:*

$$A_q = \frac{-\nu_q M\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_q^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_q^2\right)} B_q, \qquad B_q = \frac{-2qa}{k}, \tag{3.42}$$

con ν_q *dada como la única solución de la siguiente ecuación:*

$$\frac{q}{\gamma 2^{\alpha} a^{\alpha+1}} g(z) = z^{\alpha+1}, \quad z > 0, \tag{3.43}$$

siendo

$$g(z) = \frac{1}{M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\right)}. \tag{3.44}$$

Demostración. Ver [37]. ■

Teniendo la solución exacta al problema (P_q) se estudian las condiciones necesarias para garantizar su equivalencia con el problema (P_h).

Teorema 3.5.

a) Sean θ_∞, h constantes dadas, datos del problema (P_h) y ν_h el coeficiente adimensional dado por la única solución de (3.6). Si se resuelve el problema (P_q) con dato q definido por:

$$q = \frac{k\theta_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)}{2a\left[\frac{k}{2ah}M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)+\nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu_h^2\right)\right]}, \tag{3.45}$$

entonces la solución de (P_q) coincide con la del problem (P_h).

b) Sea q una constante dada, dato del problema (P_q) y ν_q la única solución de la ecuación (3.43). Si se resuelve el problema (P_q) tomando

$$\theta_\infty > \frac{2aq}{k}\frac{\nu_q M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu_q^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_q^2\right)}, \tag{3.46a}$$

$$h = \frac{-qM\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_q^2\right)}{\frac{2aq}{k}\nu_q M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu_q^2\right)-\theta_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_q^2\right)}. \tag{3.46b}$$

entonces la solución del problema (P_h) coincide con la de (P_q).

c) Si los datos θ_∞, h del problema (P_h) están relacionados con el dato q del problema (P_q) a través de la relación (3.45) (equivalente a (3.46)), entonces ambos problemas poseen la misma solución.

Demostración.

a) Se considera el problema (P_q) con un flujo caracterizado por un coeficiente q dado por (3.45). Al resolver dicho problema se obtiene una solución (T_q, s_q) a partir de las fórmulas (3.40)-(3.41). A partir de dichas ecuaciones se tiene que ν_q, el coeficiente que caracteriza a s_q, es la única solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{k\theta_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_h^2\right)}{2a\left[\frac{k}{2ah}M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_h^2\right) + \nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_h^2\right)\right]} \frac{1}{\gamma 2^\alpha a^{\alpha+1}} \frac{1}{M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right)} = z^{\alpha+1}. \tag{3.47}$$

Si se reemplaza z por ν_h la ecuación anterior se reduce a (3.6). De ahí se deduce que ν_h es solución de (3.47). Por ende resulta $\nu_q = \nu_h$, y $s_q(t) = s_h(t)$. Trabajando algebraicamente se obtiene que la temperatura T_q coincide con T_h. Es decir, el problema (P_q) tiene la misma solución que (P_h) cuando el coeficiente que caracteriza el flujo en el borde fijo q está dado por (3.45).

b) Sea θ_∞ dado por (3.46a). Luego h dado por (3.46b) resulta positivo. Bajo estas hipótesis se puede aplicar el Teorema 3.1 al problema (P_h). De las fórmulas (3.2)-(3.3) se obtiene la solución T_h y s_h. Resulta que s_h está caracterizado por un coeficiente ν_q que es la única solución de la ecuación (3.6). Teniendo en cuenta (3.46), se tiene que ν_h es la única ecuación de

$$\frac{k\theta_\infty}{\gamma 2^{\alpha+1}a^{\alpha+2}} \frac{1}{\left[\frac{k}{2a}\left(\frac{\frac{2aq}{k}\nu_q M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu_q^2\right) - \theta_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_q^2\right)}{-qM\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu_q^2\right)}\right) M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + zM\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, z^2\right)\right]} = z^{\alpha+1}. \tag{3.48}$$

Reemplazando z por ν_q, la ecuación (3.48) se reduce a la ecuación (3.43). De esta forma, se deduce que ν_q es solución de (3.48). Además, por la unicidad de solución resulta $\nu_h = \nu_q$. Por lo tanto, sigue que $s_h = s_q$. Trabajando de manera algebraica, se puede obtener fácilmente que $A_h = A_q$, $B_h = B_q$ y concluir que $T_h = T_q$. Se ha probado entonces que el problema (P_h) tiene la misma solución que el problema (P_q) cuando los datos θ_∞ y h satisfacen (3.46).

c) De los dos ítems anteriores se deduce fácilmente la equivalencia de los problemas.

■

3.1.3. Comportamiento límite

En esta sección se analiza el comportamiento límite de la solución del problema (P_h) dado por (3.1a)-(3.1e), cuando el coeficiente h que caracteriza la transferencia de calor en la frontera fija tiende a infinito.

Se define a continuación el siguiente problema (P) que consiste en hallar la temperatura $T = T(x,t)$ y $s = s(t)$ de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{3.49a}$$

$$T(0,t) = \theta_\infty t^{\alpha/2} \qquad t > 0, \tag{3.49b}$$

$$T(s(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{3.49c}$$

$$k\frac{\partial T}{\partial x}(s(t),t) = -\gamma s(t)^\alpha \dot{s}(t), \qquad t > 0, \tag{3.49d}$$

$$s(0) = 0, \tag{3.49e}$$

Como puede observarse, dicho problema corresponde al caso en que se impone una condición de temperatura en el borde fijo del material $x = 0$. La solución a este problema fue dada en [37], y puede obtenerse a partir del Teorema 3.2 reemplazando θ_0 por θ_∞. Es decir:

$$T(x,t) = t^{\alpha/2}\left[AM\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\eta^2\right) + B\eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\eta^2\right)\right], \tag{3.50}$$

$$s(t) = 2a\nu\sqrt{t}, \tag{3.51}$$

donde $\eta = \dfrac{x}{2a\sqrt{t}}$ es la variable de similaridad y las constantes C y D están dadas por:

$$A = \theta_\infty, \qquad B = \frac{-\theta_\infty M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\nu^2\right)}{\nu M\left(-\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\nu^2\right)}, \tag{3.52}$$

y el coeficiente adimensional ν es la única solución de la ecuación:

$$\frac{k\theta_\infty}{\gamma 2^{\alpha+1} a^{\alpha+2}} f(z) = z^{\alpha+1}, \qquad z > 0, \tag{3.53}$$

con f definido por (3.34).

Una vez definido (P), se enuncia y demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3.6. *El problema* (P_h) *converge al problema* (P) *cuando el coeficiente* h *tiende a infinito. Por "convergencia" se entenderá que:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to+\infty} \nu_h & = \nu, \\ \lim\limits_{h\to+\infty} s_h(t) & = s(t), \qquad \forall t>0, \\ \lim\limits_{h\to+\infty} T_h(x,t) & = T(x,t), \quad \forall t>0,\ 0<x<s(t). \end{cases}$$

Demostración. Sea f_h definida por (3.7), luego se verifica que si $h_1 < h_2$ entonces

$$f_{h_1}(z) < f_{h_2}(z), \qquad \forall z \geq 0.$$

Si se denota con ν_{h_1} y ν_{h_2} a las únicas soluciones de las ecuaciones $\dfrac{k\theta_\infty}{\gamma 2^{\alpha+1}a^{\alpha+2}} f_{h_1}(z) = z^{\alpha+1}$ y $\dfrac{k\theta_\infty}{\gamma 2^{\alpha+1}a^{\alpha+2}} f_{h_2}(z) = z^{\alpha+1}$ respectivamente, se tiene que $\nu_{h_1} < \nu_{h_2}$.

Por otra parte, para cada $z>0$ fijo se cumple

$$f_h(z) = \frac{1}{\frac{k}{2ah} M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + \frac{1}{f(z)}} < f(z), \qquad z>0,$$

con f dado por (3.34). De donde surge que $\nu_h < \nu$.

A partir de las observaciones anteriores, se tiene que $\{\nu_h\}_h$ es una sucesión creciente en h acotada superiormente por ν. Por ende, existe el límite de ν_h cuando $h \to \infty$.

Siendo $\lim\limits_{h\to\infty} f_h(z) = f(z), \quad \forall z>0$, resulta que $\nu_h \uparrow \nu$ cuando $h\to\infty$. Luego la convergencia de $s_h(t) \uparrow s(t)$, $\forall t>0$ resulta inmediata. Para probar la convergencia de la temperatura, se observa que fijado $t>0$ y $0<x<s(t)$, y dado que $s_h \uparrow s$, existirá un $h^* = h^*(x)$ tal que para todo $h>h^*$, $x<s_h(t)$. Luego se obtiene de manera algebraica que $A_h \to A$ y $B_h \to B$, resultando así que $T_h(x,t)\to T(x,t)$, para cada $t>0$ y $0<x<s(t)$ (convergencia puntual).

■

3.1.4. Ejemplos computacionales

Por el Teorema 3.1, la solución al problema (P_h) está caracterizada por un coeficiente adimensional ν_h dado como la única solución de la ecuación (3.6). Dicha ecuación puede reescribirse como $F_h(z) = 0$, $z > 0$, donde F_h se define de la siguiente manera

$$F_h(z) = \frac{k\theta_\infty}{\gamma 2^{\alpha+1} a^{\alpha+2}} f_h(z) - z^{\alpha+1}, \qquad z > 0, \tag{3.54}$$

con f_h dada por (3.7).

Para aproximar la única solución de la ecuación no lineal anterior, se utiliza el método de Newton teniendo en cuenta que

$$\frac{dF_h}{dz}(z) = \frac{h\theta_\infty}{\gamma 2^{\alpha} a^{\alpha+2}} \frac{df_h}{dz}(z) - (\alpha+1)z^{\alpha}. \tag{3.55}$$

Se implementa dicho método utilizando el software Matlab, haciendo uso del comando 'hypergeom' para representar a la función de kummmer $M(a, b, z)$. Sin pérdida de generalidad se asumen $\gamma = a = k = 1$.

Las siguientes Figuras 3.1-3.4 presentan para distintos valores de los datos θ_∞ y α, el valor ν_h obtenido en función de h.

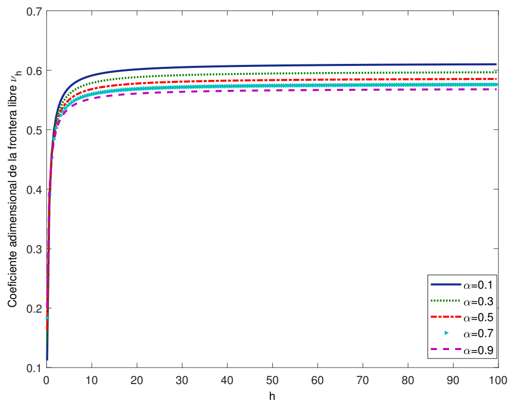

Figura 3.1: Gráfica de ν_h para $\theta_\infty = 1$

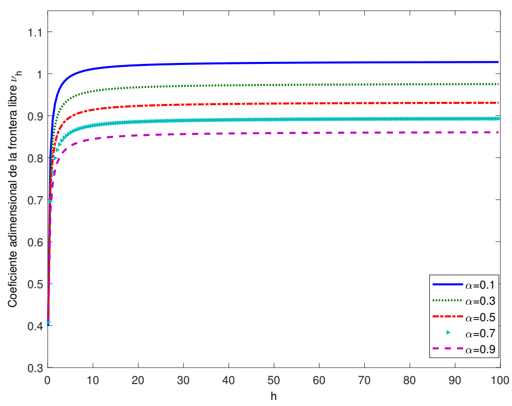

Figura 3.2: Gráfica de ν_h para $\theta_\infty = 5$

Se puede observar que en todos los casos ν_h crece en función de h. Además, puede apreciarse gráficamente que a medida que h crece, el valor ν_h tiende a estabilizarse en un

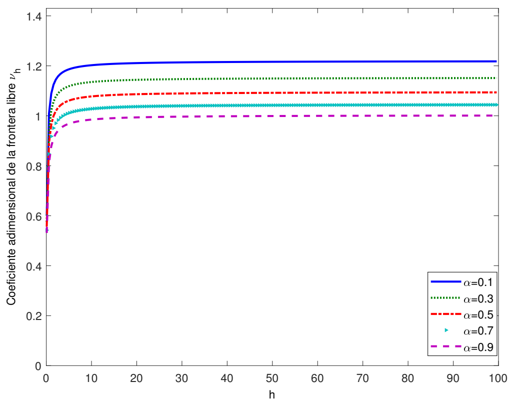

Figura 3.3: Gráfica de ν_h para θ_∞=10

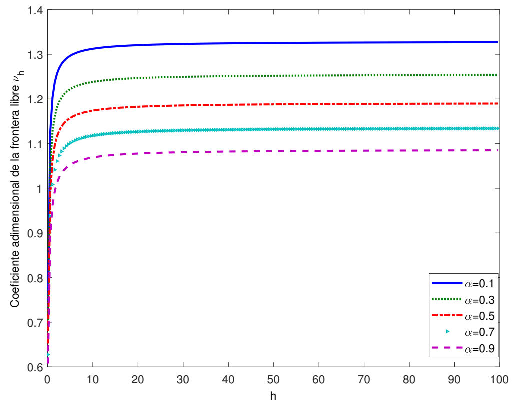

Figura 3.4: Gráfica de ν_h para $\theta_\infty = 15$

valor. Este hecho se encuentra en concordancia con el resultado obtenido en el Teorema 3.6, el cual asegura que existe el límite de ν_h cuando $h \to \infty$ y $\lim\limits_{h\to\infty} \nu_h = \nu$, donde ν se corresponde con el problema (P). Por esta razón, de igual manera que lo hicimos para ν_h, se grafica ν. Suponiendo nuevamente que $\gamma = a = k = 1$, en las Figuras 3.5-3.8, se comparan los coeficientes ν_h y ν para distintos valores de θ_∞ y α.

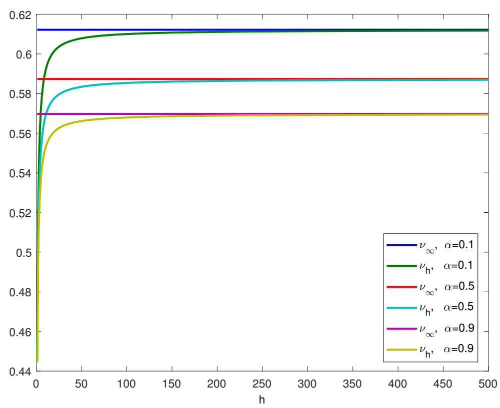

Figura 3.5: Gráfica de ν_h vs. ν para $\theta_\infty = 1$

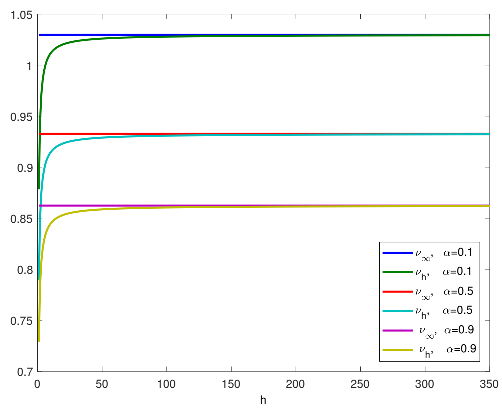

Figura 3.6: Gráfica de ν_h vs. ν para $\theta_\infty = 5$

En la Figura 3.9, se grafica la variación de la temperatura T_h con respecto a la posición x y el tiempo t. Para ello se fijan los siguientes valores particulares: $\gamma = k = a = 1$, $\alpha = 0{,}4$, $h = 0{,}5$ y $\theta_\infty = 1$. Como se trabaja con un problema de fusión, para cada valor x fijo de la posición, se puede observar en qué momento ocurre el cambio de fase.

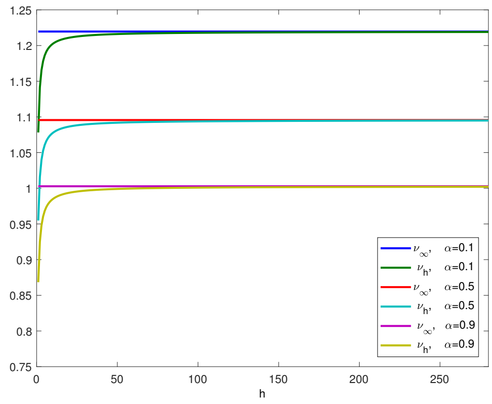

Figura 3.7: Gráfica de ν_h vs. ν para $\theta_\infty = 10$

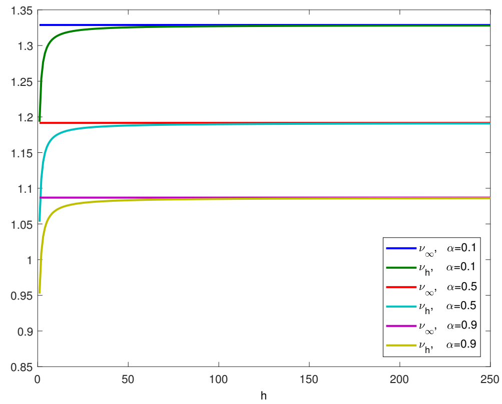

Figura 3.8: Gráfica de ν_h vs. ν para $\theta_\infty = 15$

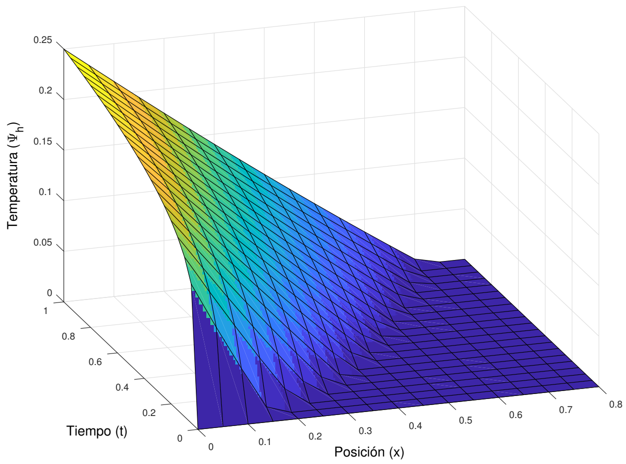

Figura 3.9: Gráfica de la temperatura T_h, con $h = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}4$, $\theta_\infty = 1$

3.2. Problema de Stefan a dos fases con condición convectiva en el borde fijo

En esta sección se generalizan los resultados obtenidos para el problema (P_h), extendiéndolo a un problema de Stefan a dos fases.

Se analiza la existencia y unicidad de solución de un problema de Stefan a dos fases, para un material semi-infinito, homogéneo, en donde el calor latente es una potencia de la posición y donde se impone una condición convectiva en el borde fijo $x = 0$. Matemáticamente, este problema consiste en encontrar la temperatura en la fase líquida $T_{lh} = T_{lh}(x,t)$, la temperatura en la fase sólida $T_{sh} = T_{sh}(x,t)$, y la frontera libre que separa ambas fases $r_h = r_h(t)$ de manera que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T_{lh}}{\partial t} = a_l^2 \frac{\partial^2 T_{lh}}{\partial x^2}, && 0 < x < r_h(t), \quad t > 0, && (3.56a)\\
&\frac{\partial T_{sh}}{\partial t} = a_s^2 \frac{\partial^2 T_{sh}}{\partial x^2}, && x > r_h(t), \quad t > 0, && (3.56b)\\
&\frac{\partial T_{lh}}{\partial x}(0,t) = \frac{h}{\sqrt{t}}\left[T_{lh}(0,t) - \theta_\infty t^{\alpha/2}\right] && t > 0, && (3.56c)\\
&T_{lh}(r_h(t),t) = T_s(r_h(t),t) = 0, && t > 0, && (3.56d)\\
&k_s \frac{\partial T_{sh}}{\partial x}(r_h(t),t) - k_l \frac{\partial T_{lh}}{\partial x}(r_h(t),t) = -\gamma r_h^\alpha(t)\dot{r}_h(t), && t > 0, && (3.56e)\\
&T_{sh}(x,0) = -\theta_i x^\alpha, && x > 0, && (3.56f)\\
&r_h(0) = 0, && && (3.56g)
\end{aligned}$$

donde los subíndices l y s representan las fases líquida y sólida respectivamente. Se denota a^2 el coeficiente de difusión térmica. El calor latente por unidad de volumen viene dado como una potencia de la posición γx^α, con $\alpha \geq 0$. La temperatura inicial dada por (3.56f) depende de la posición. Se tiene además que la temperatura de cambio de fase es cero. En la condición convectiva (3.56c) los coeficientes h y θ_∞ caracterizan al coeficiente de transferencia de calor en $x = 0$ y a la temperatura ambiente, respectivamente. Se asumirá $\gamma, \theta_i, \theta_\infty, h > 0$ lo que corresponde al caso de fusión.

La principal contribución de esta sección consiste en generalizar los resultados obtenidos en el capítulo anterior, encontrando una solución exacta de tipo similaridad para el problema de Stefan a dos fases dado por (3.56a)-(3.56g), con calor latente dependiente de la posición y una condición convectiva en el borde fijo. Se intentará también recuperar las solución dada en [3] para un problema con condición de temperatura en el borde fijo, haciendo tender el coeficiente de transferencia de calor h, en $x = 0$ a infinito.

3.2.1. Solución exacta de tipo similaridad

El siguiente teorema establece la existencia y unicidad de solución al problema (3.56) bajo ciertas hipótesis sobre los datos. Además, se provee la solución exacta de tipo similaridad.

Teorema 3.7. *Si el coeficiente h satisface la siguiente desigualdad*

$$h > \frac{2^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)k_s\theta_i a_s^{\alpha-1}}{\theta_\infty\sqrt{\pi}}, \tag{3.57}$$

entonces existe un proceso de fusión instantáneo y el problema de frontera libre dado por (3.56a)-(3.56g) con α real positivo, no entero, tiene una única solución de tipo similaridad dada por:

$$T_{lh}(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_{lh}M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\eta_l^2\right) + B_{lh}\eta_l M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta_l^2\right)\right], \tag{3.58}$$

$$T_{sh}(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_{sh}M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\eta_s^2\right) + B_{sh}\eta_s M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta_s^2\right)\right], \tag{3.59}$$

$$r_h(t) = 2a_l\mu_h\sqrt{t}, \tag{3.60}$$

donde $\eta_l = \frac{x}{2a_l\sqrt{t}}$, $\eta_s = \frac{x}{2a_s\sqrt{t}}$, y las constantes A_{lh}, B_{lh}, A_{sh} y B_{sh} están dadas por

$$A_{lh} = \frac{-\mu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\mu_h^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)}B_{lh}, \tag{3.61}$$

$$B_{lh} = \frac{-\theta_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)}{\frac{k_l}{2a_l h}M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right) + \mu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\mu_h^2\right)}, \tag{3.62}$$

$$A_{sh} = \frac{-\mu_h\omega M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\mu_h^2\omega^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\omega^2\right)}B_{sh}, \tag{3.63}$$

$$B_{sh} = \frac{-\theta_i 2^{\alpha+1}a_s^{\alpha}M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\omega^2\right)}{U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\omega^2\right)}, \tag{3.64}$$

con $\omega = \frac{a_l}{a_s}$, y el coeficiente adimensinal μ_h es la única solución positiva de la siguiente ecuación

$$-\frac{k_s\theta_i a_s^{\alpha-1}}{\gamma a_l^{\alpha+1}}f_1(z) + \frac{k_l\theta_\infty}{\gamma 2^{\alpha+1}a_l^{\alpha+2}}f_{2h}(z) = z^{\alpha+1}, \qquad z > 0, \tag{3.65}$$

en donde las funciones f_1 y f_{2h} están definidas por

$$f_1(z) = \frac{1}{U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\omega^2\right)}, \qquad z>0, \tag{3.66}$$

$$f_{2h}(z) = \frac{1}{\frac{k_l}{2a_l h}M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\right)+zM\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},z^2\right)}, \qquad z>0. \tag{3.67}$$

Demostración. La solución general de las ecuaciones (3.56a)-(3.56b) basada en las funciones de Kummer está dada por el Corolario 2.1

$$T_{lh}(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_{lh}M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\eta_l^2\right)+B_{lh}\eta_l M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\eta_l^2\right)\right], \tag{3.68}$$

$$T_{sh}(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_{sh}M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\eta_s^2\right)+B_{sh}\eta_s M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\eta_s^2\right)\right], \tag{3.69}$$

donde las variables de similaridad están definidas por $\eta_l = \frac{x}{2a_l\sqrt{t}}$, $\eta_s = \frac{x}{2a_s\sqrt{t}}$ y los coeficientes A_{lh}, B_{lh}, A_{sh} y B_{sh} deben ser determinados.

Debido a la condición (3.56d) se obtiene que la frontera libre debe ser de la forma

$$r_h(t) = 2a_l\mu_h\sqrt{t}, \tag{3.70}$$

en donde el coeficiente μ_h deberá ser determinado a partir del resto de las condiciones del problema.

Se observa que la condición $T_{lh}(r_h(t),t)=0$ en (3.56d) es equivalente a

$$t^{\alpha/2}\left[A_{lh}M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)+B_{lh}\mu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\mu_h^2\right)\right]=0, \tag{3.71}$$

de donde, despejando A_{lh} se obtiene la fórmula (3.61). De manera análoga, de la condición $T_{sh}(r_h(t),t)=0$ en (3.56d), se sigue

$$t^{\alpha/2}\left[A_{sh}M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\omega^2\mu_h^2\right)+B_{sh}\mu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\omega^2\mu_h^2\right)\right]=0, \tag{3.72}$$

y se obtiene la fórmula (3.63) para A_{sh}.

Por otro lado, en virtud de las fórmulas de derivación (2.34)-(2.35) para las funciones de Kummer se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{lh}}{\partial x}(x,t) &= \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{a_l}\left[A_{lh}\alpha\eta_l M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\eta_l^2\right)\right.\\
&\quad\left.+\tfrac{B_{lh}}{2}M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\eta_l^2\right)\right], \qquad (3.73)\\
\frac{\partial T_{sh}}{\partial x}(x,t) &= \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{a_s}\left[A_{sh}\alpha\eta_s M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\eta_s^2\right)+\right.\\
&\quad\left.+\tfrac{B_{sh}}{2}M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\eta_s^2\right)\right]. \qquad (3.74)
\end{aligned}$$

Dado que $M(a,b,0)=1$, surge

$$T_{lh}(0,t)=t^{\alpha/2}A_{lh}, \qquad \frac{\partial T_{lh}}{\partial x}(0,t)=\frac{t^{(\alpha-1)/2}}{a_l}B_{lh}. \tag{3.75}$$

De este modo, la condición convectiva en el borde fijo (3.56c) se convierte en

$$k_l\frac{B_{lh}}{2a_l}=h\left[A_{lh}-\theta_\infty\right]. \tag{3.76}$$

Reemplazando A_{lh} por (3.61) resulta

$$B_{lh}\left(\frac{k_l}{2a_l}+\frac{h\mu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\mu_h^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)}\right)=-h\theta_\infty, \tag{3.77}$$

es decir

$$B_{lh}\left(\frac{k_l M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)+2a_l h\mu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\mu_h^2\right)}{2a_l M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)}\right)=-h\theta_\infty. \tag{3.78}$$

Luego, se obtiene que

$$B_{lh}=\frac{-2h\theta_\infty a_l M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)}{k_l M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)+2a_l h\mu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\mu_h^2\right)}, \tag{3.79}$$

equivalente a la fórmula (3.62).

Con el fin de utilizar la condición (3.56f), es necesario calcular $T_{sh}(x,0)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} T_{sh}(x,0) &= \lim_{t\to 0} T_{sh}(x,t) = A_{sh}\left[\lim_{t\to 0} t^{\alpha/2} M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\eta_s^2\right)\right] \\ &+ B_{sh}\left[\lim_{t\to 0} t^{\alpha/2}\eta_s M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta_s^2\right)\right] \end{aligned} \tag{3.80}$$

Teniendo en cuenta la fórmula (2.37) resulta

$$\begin{aligned} M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\eta_s^2\right) &= \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}\exp\left(-\tfrac{\alpha}{2}\pi i\right) U\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\eta_s^2\right)\right. \\ &+ \left.\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\exp\left(-\tfrac{(\alpha+1)}{2}\pi i\right)\exp\left(-\eta_s^2\right) U\left(\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\eta_s^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.81}$$

y

$$\begin{aligned} M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta_s^2\right) &= \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\exp\left((-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2})\pi i\right) U\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta_s^2\right)\right. \\ &+ \left.\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}\exp\left(-(\tfrac{\alpha}{2}+1)\pi i\right)\exp\left(-\eta_s^2\right) U\left(\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},\eta_s^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Se observa que si α es un entero par no negativo, entonces $\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$ no está definida y la relación (3.81) no es válida. De igual manera, si α es un entero impar no negativo entonces $\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)$ tampoco está definida y la relación (3.82) no puede ser utilizada. De este hecho, surge la restricccción para α de ser un real positivo, no entero.

En virtud de (3.81), y del hecho que $\exp(-\pi i) = -1$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} t^{\alpha/2} M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\eta_s^2\right) &= \lim_{t\to 0} t^{\alpha/2}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}(-1)^{-\alpha/2} U\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\eta_s^2\right)\right. \\ &+ \left.\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}(-1)^{(\alpha+1)/2}\exp\left(-\eta_s^2\right) U\left(\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\eta_s^2\right)\right] \\ &= \lim_{t\to 0} t^{\alpha/2}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}(-1)^{-\alpha/2}\frac{U\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\eta_s^2\right)}{\left(-\eta_s^2\right)^{\alpha/2}}\left(-\eta_s^2\right)^{\alpha/2}\right. \\ &+ \left.\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}(-1)^{(\alpha+1)/2}\exp\left(-\eta_s^2\right)\frac{U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\eta_s^2\right)}{\left(\eta_s^2\right)^{-(\alpha+1)/2}}\left(\eta_s^2\right)^{-(\alpha+1)/2}\right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}\eta_s^{\alpha} t^{\alpha/2}\ \frac{U\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\eta_s^2\right)}{\left(-\eta_s^2\right)^{\alpha/2}}\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}(-1)^{(\alpha+1)/2} t^{\alpha/2}\exp\left(-\eta_s^2\right)\eta_s^{-(\alpha+1)}\ t^{\alpha/2}\ \frac{U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\eta_s^2\right)}{\left(\eta_s^2\right)^{-(\alpha+1)/2}}\right]. \tag{3.83}$$

Puesto que $\eta_s^{\alpha} t^{\alpha/2} = \left(\frac{x}{2a_s t^{1/2}}\right)^{\alpha} t^{\alpha/2} = \frac{x^\alpha}{2^\alpha a_s^\alpha}$, resulta

$$\lim_{t\to 0}\left(\exp\left(-\eta_s^2\right)\eta_s^{-(\alpha+1)} t^{\alpha/2}\right) = \lim_{t\to 0}\left[\exp\left(\frac{-x^2}{4a_s^2 t}\right)\left(\frac{x}{2a_s t^{1/2}}\right)^{-(\alpha+1)} t^{\alpha/2}\right] = 0,$$

y de (2.39) sigue que

$$\lim_{t\to 0}\ t^{\alpha/2} M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\eta_s^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}\frac{x^\alpha}{2^\alpha a_s^\alpha}. \tag{3.84}$$

Por otra parte, en virtud de (3.82) se tiene que

$$\lim_{t\to 0}\ t^{\alpha/2}\eta_s M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\eta_s^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(-1)^{(\alpha-1)/2}}{2\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\lim_{t\to 0}\left(t^{\alpha/2}\eta_s U\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\eta_s^2\right)\right)$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}\,(-1)^{\alpha/2+1}}{2\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}\lim_{t\to 0}\ \left(t^{\alpha/2}\eta_s\exp\left(-\eta_s^2\right)U\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},\eta_s^2\right)\right). \tag{3.85}$$

De manera análoga a lo hecho anteriormente se demuestra que

$$\lim_{t\to 0}\ t^{\alpha/2}\eta_s U\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\eta_s^2\right) = \lim_{t\to 0}\ t^{\alpha/2}\eta_s \frac{U\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\eta_s^2\right)}{\left(-\eta_s^2\right)^{(\alpha-1)/2}}\left(-\eta_s^2\right)^{(\alpha-1)/2}$$

$$= \lim_{t\to 0}\ t^{\alpha/2}\eta_s^{\alpha}(-1)^{(\alpha-1)/2}\ \frac{U\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\eta_s^2\right)}{\left(-\eta_s^2\right)^{(\alpha-1)/2}} = \frac{x^\alpha}{2^\alpha a_s^\alpha}(-1)^{(\alpha-1)/2}, \tag{3.86}$$

y

$$\lim_{t\to 0}\ t^{\alpha/2}\eta_s\exp\left(-\eta_s^2\right)U\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},\eta_s^2\right) = \lim_{t\to 0}\ t^{\alpha/2}\eta_s\exp\left(-\eta_s^2\right)\frac{U\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},\eta_s^2\right)}{\left(\eta_s^2\right)^{-(\alpha/2+1)}}\left(\eta_s^2\right)^{-(\alpha/2+1)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\ t^{\alpha/2}\eta_s^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\eta_s^2\right)\frac{U\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},\eta_s^2\right)}{\left(\eta_s^2\right)^{-(\alpha/2+1)}} = 0. \tag{3.87}$$

Por ende, teniendo en cuenta (3.86) y (3.87), el límite (3.85) es

$$\lim_{t\to 0} t^{\alpha/2}\eta_{_s} M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta_{_s}^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\frac{x^\alpha}{2^{\alpha+1}a_{_s}^\alpha}. \tag{3.88}$$

Volviendo a (3.80) y en virtud de (3.84) y (3.88) se obtiene

$$T_{_{sh}}(x,0) = A_{_{sh}}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}\frac{x^\alpha}{2^\alpha a_{_s}^\alpha} + B_{_{sh}}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\frac{x^\alpha}{2^{\alpha+1}a_{_s}^\alpha}. \tag{3.89}$$

A partir de la condición (3.56f)

$$A_{_{sh}}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}\frac{x^\alpha}{2^\alpha a_{_s}^\alpha} + B_{_{sh}}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\frac{x^\alpha}{2^{\alpha+1}a_{_s}^\alpha} = -\theta_{_i} x^\alpha.$$

Reemplazando $A_{_{sh}}$ por (3.63) se tiene

$$B_{_{sh}}\left[\frac{-\mu_{_h}\omega M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\mu_{_h}^2\omega^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_{_h}^2\omega^2\right)}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\right] = -\theta_{_i} 2^\alpha a_{_s}^\alpha,$$

es decir

$$\begin{aligned}B_{_{sh}}&\left[-\mu_{_h}\omega M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\mu_{_h}^2\omega^2\right)\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}\right.\\ &\left.+\frac{\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\mu_{_h}^2\omega^2\right)\right] = -\theta_{_i}2^\alpha a_{_s}^\alpha M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\mu_{_h}^2\omega^2\right).\end{aligned}$$

Dado que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$ y $M(a,b,z)=\exp(z)M(b-a,b,-z)$ resulta

$$\begin{aligned}B_{_{sh}}&\left[\mu_{_h}\omega M\left(\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},\mu_{_h}^2\omega^2\right)\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}\exp\left(-\mu_{_h}^2\omega^2\right)\right.\\ &\left.+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}M\left(\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\mu_{_h}^2\omega^2\right)\exp\left(-\mu_{_h}^2\omega^2\right)\right] = -\theta_{_i}2^\alpha a_{_s}^\alpha M\left(\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\mu_{_h}^2\omega^2\right)\exp\left(-\mu_{_h}^2\omega^2\right).\end{aligned}$$

Por la definición de la función de Kummer U se tiene

$$B_{_{sh}}U\left(\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\mu_{_h}^2\omega^2\right) = -\theta_{_i}2^\alpha a_{_s}^\alpha M\left(\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\mu_{_h}^2\omega^2\right), \tag{3.90}$$

de donde se obtiene la fórmula (3.64) para B_{sh}.

Hasta ahora se han determinado los coeficientes A_{lh}, B_{lh}, A_{sh}y B_{sh} en función de μ_h. Resta entonces, utilizar la condición de Stefan (3.56e) para así obtener a μ_h. Para ello primero se calcula $\frac{\partial T_{lh}}{\partial x}(r_h(t),t)$ y $\frac{\partial T_{sh}}{\partial x}(r_h(t),t)$.

Por un lado, teniendo en cuenta (3.73) se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{lh}}{\partial x}(r_h(t),t) &= \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{a_l}\left[A_{lh}\alpha\mu_h M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\mu_h^2\right)\right.\\
&\quad\left.+\ \frac{B_{lh}}{2}M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\mu_h^2\right)\right]\\
&= \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{a_l}B_{lh}\left[\frac{-\mu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\mu_h^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)}\alpha\mu_h M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\mu_h^2\right)\right.\\
&\quad\left.+\tfrac{1}{2}M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\mu_h^2\right)\right]\\
&= \frac{t^{(\alpha-1)/2}B_{lh}}{2a_l M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)}\left[-2\alpha\mu_h^2 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\mu_h^2\right)M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\mu_h^2\right)\right.\\
&\quad\left.+\ M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\mu_h^2\right)M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\mu_h^2\right)\right].
\end{aligned}$$

Por las propiedades (2.41)-(2.42) se tiene

$$\frac{\partial T_{lh}}{\partial x}(r_h(t),t) = \frac{t^{(\alpha-1)/2}B_{lh}}{2a_l M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)}\exp(-\mu_h^2). \tag{3.91}$$

Reemplazando B_{lh} por (3.62) resulta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{lh}}{\partial x}(r_h(t),t) &= \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{2a_l M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)}\frac{-\exp(-\mu_h^2)\theta_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)}{\left[\frac{k_l}{2a_l h}M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)+\mu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\mu_h^2\right)\right]}\\
&= \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{2a_l}\frac{-\exp(-\mu_h^2)\theta_\infty}{\left[\frac{k_l}{2a_l h}M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\right)+\mu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\mu_h^2\right)\right]}\\
&= \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{2a_l}\frac{-\exp(-\mu_h^2)\theta_\infty}{\exp(-\mu_h^2)\left[\frac{k_l}{2a_l h}M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\right)+\mu_h M\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},\mu_h^2\right)\right]}.
\end{aligned}$$

Simplificando se obtiene

$$\frac{\partial T_{lh}}{\partial x}(r_h(t),t) = \frac{-t^{(\alpha-1)/2}}{2a_l}\frac{\theta_\infty}{\left[\frac{k_l}{2a_l h}M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\right)+\mu_h M\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},\mu_h^2\right)\right]}. \tag{3.92}$$

Procediendo de manera análoga, a partir de (3.63), (3.64) y (3.74) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T_{sh}}{\partial x}(r_h(t),t) =& \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{a_s}\left[A_{sh}\alpha\mu_h M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\mu_h^2\right) + \frac{B_{sh}}{2}M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\mu_h^2\right)\right] \\
=& \frac{t^{(\alpha-1)/2}B_{sh}}{2a_s M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\omega^2\right)}\left[\, M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\mu_h^2\omega^2\right) M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\mu_h^2\omega^2\right)\right. \\
& \left. -2\alpha\mu_h^2\omega^2 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\mu_h^2\omega^2\right) M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\mu_h^2\omega^2\right)\right] \\
=& \frac{t^{(\alpha-1)/2}B_{sh}\exp\left(-\mu_h^2\omega^2\right)}{2a_s M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\mu_h^2\omega^2\right)} = \frac{t^{(\alpha-1)/2}B_{sh}}{2a_s M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\omega^2\right)} \\
=& \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{2a_s M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\omega^2\right)} \frac{(-\theta_i)2^{\alpha+1}a_s^\alpha M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\omega^2\right)}{U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\omega^2\right)}.
\end{aligned}
\tag{3.93}
$$

Simplificando resulta

$$
\frac{\partial T_{sh}}{\partial x}(r_h(t),t) = \frac{-t^{(\alpha-1)/2}\theta_i 2^\alpha a_s^{\alpha-1}}{U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\omega^2\right)}. \tag{3.94}
$$

Volviendo a la condicion (3.56e), teniendo en cuenta las fórmulas para las derivadas (3.92) y (3.94) se tiene

$$
\begin{aligned}
\gamma r_h^\alpha(t)\dot{r}_h(t) =& -k_s\frac{t^{(\alpha-1)/2}\theta_i 2^\alpha a_s^{\alpha-1}}{U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\omega^2\right)} \\
& + k_l\frac{t^{(\alpha-1)/2}}{2a_l}\frac{\theta_\infty}{\left[\frac{k_l}{2a_l h}M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\right)+\mu_h M\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},\mu_h^2\right)\right]}
\end{aligned}
\tag{3.95}
$$

Dado que r_h está dada por (3.60), se tiene que

$$
r_h^\alpha(t)\dot{r}_h(t) = (2a_l\mu_h\sqrt{t})^\alpha\ \frac{\mu_h a_l}{\sqrt{t}} = 2^\alpha\mu_h^{\alpha+1}a_l^{\alpha+1}t^{(\alpha-1)/2},
$$

y por ende la condición de Stefan resulta equivalente a

$$
\begin{aligned}
\gamma 2^\alpha\mu_h^{\alpha+1}a_l^{\alpha+1}t^{(\alpha-1)/2} =& -k_s\frac{t^{(\alpha-1)/2}\theta_i 2^\alpha a_s^{\alpha-1}}{U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\omega^2\right)} \\
& + k_l\frac{t^{(\alpha-1)/2}}{2a_l}\frac{\theta_\infty}{\left[\frac{k_l}{2a_l h}M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\right)+\mu_h M\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},\mu_h^2\right)\right]}.
\end{aligned}
\tag{3.96}
$$

Al simplificar se tiene

$$\begin{aligned}\mu_h^{\alpha+1} &= \frac{-k_s\theta_i a_s^{\alpha-1}}{\gamma a_l^{\alpha+1} U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\omega^2\right)} \\ &+ \frac{k_l}{\gamma 2^{\alpha+1} a_l^{\alpha+2}} \frac{\theta_\infty}{\left[\frac{k_l}{2a_l h} M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\mu_h^2\right) + \mu_h M\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},\mu_h^2\right)\right]}.\end{aligned} \tag{3.97}$$

De esta forma surge que μ_h debe ser solución de la ecuación no lineal

$$-\frac{k_s\theta_i a_s^{\alpha-1}}{\gamma a_l^{\alpha+1}} f_1(z) + \frac{k_l\theta_\infty}{\gamma 2^{\alpha+1} a_l^{\alpha+2}} f_{2h}(z) = z^{\alpha+1}, \qquad z>0, \tag{3.98}$$

con f_1 y f_{2h} dadas por (3.66) y (3.67) respectivamente.

Para concluir el teorema resta probar la existencia y unicidad de solución de la ecuación anterior. Con este objetivo, se estudia primero el comportamiento de las funciones f_1 y f_{2h}.

Se observa que

$$\frac{d}{dz} U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\omega^2\right) = -z\omega^2(\alpha+1) U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2},\frac{3}{2},z^2\omega^2\right), \tag{3.99}$$

donde la representación integral de la función U acorde a (2.40) resulta

$$U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2},\frac{3}{2},z^2\omega^2\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \exp(-z^2\omega^2)\xi^{(\alpha+1)/2}(1+\xi)^{(\alpha/2+1)} d\xi > 0 \tag{3.100}$$

pues $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{(\alpha+1)/2}\exp(-t)dt > 0$.

De este modo se deduce que $\frac{d}{dz}U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\omega^2\right) < 0$. Al ser $f_1(z) = \frac{1}{U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\omega^2\right)}$, se tiene que $\frac{df_1}{dz}(z) > 0$. Más aún, por la definición de U, f_1 satisface las siguientes propiedades:

$$\frac{df_1}{dz}(z) > 0,\ \ \forall z>0, \qquad f_1(0) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \qquad \lim_{z\to\infty} f_1(z) = +\infty \tag{3.101}$$

Por otra parte, la función f_{2h} está definida de manera análoga a f_h estudiada en el problema a una fase, la cual satisface las siguientes propiedades:

$$\frac{df_{2h}}{dz}(z) < 0, \quad \forall z > 0, \qquad f_{2h}(0) = \frac{2a_l h}{k_l}, \qquad \lim_{z\to\infty} f_{2h}(z) = 0. \tag{3.102}$$

De este modo, el primer sumando del lado izquierdo de la ecuación (3.98) es una función decreciente en z que va de $\Delta_1 = -\frac{k_s\theta_i a_s^{\alpha-1}}{\gamma a_l^{\alpha+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$ a $-\infty$. Además el segundo sumando del lado izquierdo de la ecuación (3.98) también es una función decreciente que va de $\Delta_2 = \frac{h\theta_\infty}{\gamma 2^\alpha a_l^{\alpha+1}}$ a 0 cuando z crece de 0 a $+\infty$

Como consecuencia se puede asegurar que el lado izquierdo de la ecuación (3.98) decrece de $\Delta_1 + \Delta_2$ a $-\infty$. Como el lado derecho crece de 0 a $+\infty$ se tiene que la ecuación tendrá una única solución si y sólo si

$$\Delta_1 + \Delta_2 > 0,$$

lo que es equivalente a la condición (3.57). Queda, de esta forma, demostrado el teorema.

■

Observación 3.3. *Desigualdades similares a (3.57) han sido obtenidas para un proceso de cambio de fase intantáneo en [21, 55, 56].*

Corolario 3.2. *Si α es un real positivo no entero y el coeficiente h satisface la siguiente desigualdad:*

$$0 < h \leq \frac{2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right) k_s \theta_i a_s^{\alpha-1}}{\theta_\infty \sqrt{\pi}} \tag{3.103}$$

entonces el problema de frontera libre (3.56a)-(3.56g) se reduce a un problema clásico de transferencia de calor para la fase sólida inicial gobernado por las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = a_s^2 \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2}, \qquad x > 0, \quad t > 0, \tag{3.104a}$$

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x}(0,t) = \frac{h}{\sqrt{t}}\left[T_s(0,t) - \theta_\infty t^{\alpha/2}\right], \qquad t > 0, \tag{3.104b}$$

$$T_s(x,0) = -\theta_i x^\alpha, \qquad x > 0, \tag{3.104c}$$

cuya solución explícita es

$$T_s(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_s M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\eta_s^2\right) + B_s\eta_s M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta_s^2\right)\right], \tag{3.105}$$

donde $\eta_s = \frac{x}{2a_s\sqrt{t}}$ *y los coeficientes* A_s, B_s *están dados por*

$$A_s = \frac{-\theta_i a_s^\alpha k_s\Gamma(\alpha+1) + \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)ha_s\theta_\infty}{\left[k_s\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right) + ha_s\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right]}, \tag{3.106}$$

$$B_s = \frac{2a_s h(A_s-\theta_\infty)}{k_s}. \tag{3.107}$$

Demostración. Por el Corolario 2.1 se tiene que si T_s satisface (3.104a) entonces es de la forma

$$T_s(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_s M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\eta_s^2\right) + B_s\eta_s M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta_s^2\right)\right], \tag{3.108}$$

donde los coeficientes A_s, B_s deben determinarse a partir del resto de las condiciones del problema.

Recordando que

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_s}{\partial x}(x,t) = \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{a_s}&\left[A_s\alpha\eta_s M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\eta_s^2\right)+\right.\\ &\left.+\tfrac{B_s}{2}M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\eta_s^2\right)\right].\end{aligned} \tag{3.109}$$

se tiene que la condición convectiva en el borde fijo (3.104b) es equivalente a

$$k_s\frac{t^{(\alpha-1)/2}B_s}{2a_s} = \frac{h}{\sqrt{t}}\left[t^{\alpha/2}A_s - \theta_\infty t^{\alpha/2}\right]. \tag{3.110}$$

Despejando B_s se obtiene la fórmula (3.107).

En virtud de (3.89) se tiene el valor de $T_s(x,0)$. Luego la condición (3.104c) se reduce a

$$A_s\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)} + B_s\frac{\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)} = -\theta_i 2^\alpha a_s^\alpha$$

que es equivalente a

$$A_s \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)} + \frac{2a_s h(A_s - \theta_\infty)}{k_s} \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)} = -\theta_i 2^\alpha a_s^\alpha.$$

Trabajando algebraicamente se tiene

$$A_s = \frac{-\theta_i 2^\alpha a_s^\alpha + \frac{a_s h \theta_\infty}{k_s} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}}{\sqrt{\pi}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)} + \frac{a_s h}{k_s}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\right]} \tag{3.111}$$

■

Caso: α entero, no negativo

En esta subsección se pretende hallar la solución exacta al problema (3.56) para el caso particular en que α sea un entero no-negativo. Haciendo uso de las fórmulas (2.10)-(2.11) se obtiene el siguiente resultado

Lema 3.1. *Si el coeficiente h satisface la desigualdad:*

$$h > \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) k_s \theta_i a_s^{n-1}}{\theta_\infty \sqrt{\pi}}, \tag{3.112}$$

entonces la solución exacta al problema (3.56a)-(3.56g), donde $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, está dada por

$$T_{lh}(x,t) = -\frac{t^{n/2} 2^n \theta_\infty \Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\left[\mathcal{F}_n(\eta_l)\mathcal{E}_n(\mu_h) - \mathcal{F}_n(\mu_h)\mathcal{E}_n(\eta_l)\right]}{\frac{k_l}{a_l h}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\mathcal{E}_n(\mu_h) + \Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathcal{F}_n(\mu_h)}, \tag{3.113}$$

$$T_{sh}(x,t) = t^{n/2} 2^n \theta_i a_s^n \Gamma(n+1)\left[\frac{\mathcal{E}_n(\eta_s)\mathcal{F}_n(\mu_h\omega) - A_n(\mu_h\omega)\mathcal{F}_n(\eta_s)}{\mathcal{E}_n(\mu_h\omega) - \mathcal{F}_n(\mu_h\omega)}\right], \tag{3.114}$$

$$r_h(t) = 2a_l\, \mu_h \sqrt{t}, \tag{3.115}$$

donde las variables de similaridad son $\eta_l = \frac{x}{2a_l\sqrt{t}}$, $\eta_s = \frac{x}{2a_s\sqrt{t}}$, $\omega = \frac{a_l}{a_s}$ y μ_h es la única solución de la ecuación:

$$\frac{h\theta_\infty}{\gamma 2^n a_{l}^{n+1}}\left[\exp(z^2)2^n\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+1\right)\mathcal{E}_n(z)+\tfrac{2^n a_l h}{k_l}\exp(z^2)\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\mathcal{F}_n(z)\right]^{-1}$$
$$-\frac{k_s\theta_i a_s^{n-1}}{\gamma a_l^{n+1}}\left[2^n\exp(z^2\omega^2)\sqrt{\pi}\left(\mathcal{E}_n(z\omega)-\mathcal{F}_n(x\omega)\right)\right]^{-1}=z^{n+1},\qquad z>0. \quad (3.116)$$

Demostración. La desigualdad (3.112), las funciones temperatura (3.113)-(3.114), la frontera libre dada por (3.115) y la ecuación (3.116) para el parámetro μ_h se pueden deducir aplicando el mismo razonamiento que en el Teorema 3.7 y utilizando las relaciones entre las funciones de Kummer y la familia de integrales repetidas de la función de error complementaria (2.10)-(2.11).

Se nota que para seguir los argumentos del Teorema (3.7) se debe probar que los límites (3.84) y (3.88) siguen siendo válidos para el caso en que $\alpha\in\mathbb{N}_0$. Esto puede ser probado fácilmente a través de la fórmula siguiente presentada en [57]

$$\lim_{t\to 0}\ t^{n/2}\mathcal{E}_n\left(\eta_s\right)=\lim_{t\to 0}\ t^{n/2}\mathcal{F}_n\left(\eta_s\right)=\frac{x^n}{\Gamma\left(n+1\right)2^n a_s^n}, \quad (3.117)$$

y la fórmula de duplicación de Legendre para la función Gamma [58]

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x). \quad (3.118)$$

■

Corolario 3.3. *Teniendo en cuenta que* $\mathcal{E}_0(z)=1$, $\mathcal{F}_0(z)=\operatorname{erf}(z)$, $\Gamma(1)=1$ *y* $\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, *para el caso* $n=0$, *la condición (3.112), las funciones (3.113)-(3.114) y la frontera libre se reducen a:*

$$h>\frac{k_s\theta_i}{\theta_\infty a_s\sqrt{\pi}} \quad (3.119)$$
$$T_{lh}(x,t)=\frac{\theta_\infty\sqrt{\pi}\left[\operatorname{erf}(\mu_h)-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_l\sqrt{t}}\right)\right]}{\frac{k_l}{ha_l}+\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(\mu_h)}, \quad (3.120)$$

$$T_{sh}(x,t) = -\theta_i \left[1 - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_s\sqrt{t}}\right)}{\operatorname{erf}(\mu_h\omega)}\right], \tag{3.121}$$

$$r_h(t) = 2a_l\,\mu_h\sqrt{t}, \tag{3.122}$$

$$\tag{3.123}$$

donde μ_h es la única solución de la siguiente ecuación:

$$-\frac{k_s\theta_i}{\gamma a_l a_s\sqrt{\pi}}\frac{\exp(-x^2\omega^2)}{\operatorname{erfc}(x\omega)} + \frac{\theta_\infty}{\gamma a_l}\frac{\exp(-x^2)}{\left[\frac{1}{h} + \frac{a_l\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(x)}{k_l}\right]} = x, \qquad x > 0. \tag{3.124}$$

De este modo, se recuperan las fórmulas obtenidas en [21], que en contraposición con nuestro probema corresponden a una proceso de solidificación.

Observación 3.4. *Los resultados obtenidos en 3.3 para el problema de Stefan a una fase con condición convectiva en el borde fijo se pueden recuperar a partir de [41].*

3.2.2. Comportamiento límite

En esta subsección se estudia el comportamiento límite de la solución del problema dado por (3.56a)-(3.56g) cuando el coeficiente h que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo tiende a infinito. El principal motivo para realiza este análisis consiste en que la condición convectiva (3.56c) dada por

$$k_l\frac{\partial T_{lh}}{\partial x}(0,t) = \frac{h}{\sqrt{t}}[T_{lh}(0,t) - \theta_\infty t^{\alpha/2}], \tag{3.125}$$

constituye una generalización de la condición de Dirichlet, en el sentido que si se toma el límite cuando $h \to \infty$ en (3.125) se obtiene $T_{lh}(0,t) \to \theta_\infty t^{\alpha/2}$. Por lo tanto, probaremos que la solución al problema de Stefan con condición convectiva en el borde fijo converge a la solución del problema con condición de temperatura en $x = 0$. Se observa que la solución al problema (3.56) se nota con un subíndice h con el fin de hacer hincapié en su dependencia con el coeficiente h que caracteriza a la condición convectiva.

Teorema 3.8. *Se considera el problema gobernado por (3.56a)-(3.56g), cuya solución T_{lh}, T_{sh}, r_h y μ_h está dada por (3.58), (3.59), (3.60) y (3.65) respectivamente. Tomando límite cuando $h \to \infty$ se obtiene*

$$T_{lh}(x,t) \to T_l(x,t), \qquad 0 < x < r(t), \quad t > 0, \tag{3.126}$$

$$T_{sh}(x,t) \to T_s(x,t), \qquad x > r(t), \quad t > 0, \tag{3.127}$$

$$r_h(t) \to r(t), \qquad t > 0, \tag{3.128}$$

donde $T_l = T_l(x,t), T_s = T_s(x,t)$ y $r = r(t)$ son solución del siguiente problema

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} = a_l^2 \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < r(t), \quad t > 0, \tag{3.129a}$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = a_s^2 \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2}, \qquad x > r(t), \quad t > 0, \tag{3.129b}$$

$$T_l(0,t) = \theta_\infty t^{\alpha/2} \qquad t > 0, \tag{3.129c}$$

$$T_l(r(t),t) = T_s(r(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{3.129d}$$

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x}(r(t),t) - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x}(r(t),t) = \gamma r(t)^\alpha \dot{r}(t), \qquad t > 0, \tag{3.129e}$$

$$T_s(x,0) = -\theta_i x^\alpha, \qquad x > 0, \tag{3.129f}$$

$$r(0) = 0, \tag{3.129g}$$

con $r(t) = 2a_l \mu \sqrt{t}$ y donde se impone una condición de temperatura dada por $\theta_\infty t^{\alpha/2}$ en el borde fijo $x = 0$.

Demostración. La solución al problema (3.129) puede obtenerse siguiendo un razonamiento similar al dado en el Teorema 3.7, obteniéndose

$$T_l(x,t) = t^{\alpha/2} \left[A_l\, M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\mu^2\right) + B_l\, \mu M\left(-\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\mu_\infty^2\right)\right], \tag{3.130}$$

$$T_s(x,t) = t^{\alpha/2} \left[A_s\, M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\mu^2\right) + B_s\, \mu M\left(-\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\mu^2\right)\right], \tag{3.131}$$

$$r(t) = 2a_l \mu \sqrt{t}, \tag{3.132}$$

donde

$$A_{l} = \theta_{\infty}, \qquad B_{l} = -\frac{\theta_{\infty} M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\mu^2\right)}{\mu M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\mu^2\right)},$$

$$A_{s} = -\frac{\mu\omega M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\mu^2\omega^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\mu^2\omega^2\right)} B_{s}, \qquad B_{s} = -\frac{\theta_{i} 2^{\alpha+1} a_{s}^{\alpha} M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \mu^2\omega^2\right)}{U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \mu^2\omega^2\right)},$$

siendo $\omega = \frac{a_l}{a_s}$ y μ la única solución de la siguiente ecuación

$$-\frac{k_{s}\theta_{i} a_{s}^{\alpha-1}}{\gamma a_{l}^{\alpha+1}} f_1(z) + \frac{k_{l}\theta_{\infty}}{2^{\alpha+1} a_{l}^{\alpha+2}\gamma} f_2(z) = z^{\alpha+1}, \qquad z > 0, \tag{3.133}$$

con

$$f_2(z) = \frac{1}{zM\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, z^2\right)}, \qquad z > 0, \tag{3.134}$$

y f_1 definida por (3.66). El hecho de que μ sea la única solución de la ecuación (3.133) se deriva analizando el crecimiento de las funciones f_1 y f_2. Se nota en particular que el comportamiento de f_1 fue analizado en la prueba del teorema (3.56d), obteniendo que f_1 es una función creciente que verifica $f_1(0) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)}{\sqrt{\pi}}$ y $f_1(+\infty) = +\infty$. Por otra parte, puede deducirse a través de las propiedades de las funciones de Kummer, que f_2 es una función decreciente que satisface $f_2(0) = +\infty$ y $f_2(+\infty) = 0$. Por consiguiente se puede asegurar que el lado izquierdo de la ecuación (3.133) es una función decreciente en la variable z que va de $+\infty$ a $-\infty$.

Cabe destacar que la solución al problema (3.129) fue obtenida en [3], a partir de un problema con condición de flujo.

Se prueba entonces que la solución al problema (3.56a)-(3.56g) converge a la solución de (3.129a)-(3.129g) cuando $h \to \infty$.

Se observa para ello que f_{2h} verifica

$$f_{2h}(z) = \frac{1}{\frac{k_l}{2a_l h} M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + \frac{1}{f_2(z)}} < f_2(z).$$

Se tiene entonces que $\{f_{2h}\}_h$ es una sucesión creciente de funciones acotada por f_2.

Luego, por la definición de μ_h y μ, se puede garantizar que $\{\mu_h\}_h$ es una sucesión monótona creciente acotada por μ.

Del hecho de que $f_{2h}(z) \to f_2(z)$, para todo $z > 0$ cuando $h \to \infty$, y de la unicidad de solución para (3.133) se deduce que $\mu_h \to \mu$, cuando $h \to \infty$. De esta forma resulta trivial que $r_h(t) \to r(t)$, para todo $t > 0$.

Una vez obtenida la convergencia de μ_h, se puede obtener de manera algebraica que $A_{lh} \to A_l$, $B_{lh} \to B_l$, $A_{sh} \to A_s$ y $B_{sh} \to B_s$, cuando $h \to \infty$. Por consiguiente resulta $T_{lh}(x,t) \to T_l(x,t)$, para $0 < x < r(t)$, $t > 0$ y $T_{sh}(x,t) \to T_s(x,t)$ para $x > r(t)$, $t > 0$ si $h \to \infty$.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Calor latente dependiente de la posición y velocidad de la frontera libre en el problema de Stefan a una fase

En este capítulo, se estudiará un problema de tipo Stefan a una fase para un material semi-infinito con diferentes condiciones en el borde fijo y calor latente variable. La diferencia con el capítulo anterior radica en que el calor latente no sólo depende de una potencia de la posición sino también de una potencia de la velocidad. Es decir, se define $L = \gamma s^{\beta}(t)\dot{s}^{\delta}(t)$, donde γ, β y δ son constantes dadas. Cabe mencionar que esto constituye una generalización a diferentes problemas ya estudiados, en el sentido que si se fija $\beta = \delta = 0$ se recupera el problema de Stefan clásico, para $\beta \in \mathbb{R}_0^+$, $\delta = 0$ se obtienen los resultados obtenidos en [36, 37] y si $\beta = 0$ y $\delta = -1$ se recupera lo dado en [2].

4.1. Condición de temperatura en el borde fijo

Se estudia el siguiente problema de Stefan a una fase, para un material homogéneo, semi-infinito, donde se considera un calor latente dependiente de una potencia de la posición y de la velocidad, con una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo. Dicho problema consiste en hallar la temperatura $U_0 = U_0(x,t)$ y la frontera libre $S_0 = S_0(t)$ de manera que:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < S_0(t), \quad t > 0, \tag{4.1a}$$

$$U_0(0,t) = \theta_0 t^{\alpha/2}, \qquad t > 0, \tag{4.1b}$$

$$U_0(S_0(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{4.1c}$$

$$k\frac{\partial U_0}{\partial x}(S_0(t),t) = -\gamma S_0^{\beta}(t)\dot{S}_0^{\delta}(t), \qquad t > 0, \tag{4.1d}$$

$$S_0(0) = 0, \tag{4.1e}$$

donde a^2 es le coeficiente de difusividad térmica y k representa la conductividad térmica. La temperatura de cambio de fase es cero (4.1c). Se impone una condición de temperatura dependiente del tiempo en el borde fijo $x = 0$ caracterizada por el coeficiente θ_0. Notar que $\dot{S}_0(t)$ representa la velocidad de la interfase. La característica principal de este problema radica en que el calor latente está dado de la forma $L = \gamma S(t)^{\beta}\dot{S}(t)^{\delta}$, donde γ, β y δ son constantes arbitrarias dadas. Se asume que $\gamma > 0$, $\theta_0 > 0$, lo cual corresponderá a un problema de fusión.

4.1.1. Solución exacta de tipo similaridad

Teorema 4.1. *Sean β y δ constantes reales tales que $\beta \geq \max(\delta, -\delta-1)$. Si $\alpha = \beta - \delta$, existe una única solución al problema (4.1) y viene dada por*

$$U_0(x,t) = t^{\alpha/2}\left[C_0 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\eta^2\right) + D_0 \eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\eta^2\right)\right], \qquad 0 < x < S_0(t), \tag{4.2}$$

$$S_0(t) = 2a\xi_0\sqrt{t}, \qquad t > 0, \tag{4.3}$$

donde $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ es la variable de similaridad y las constantes C_0 y D_0 se definen de la siguiente forma:

$$C_0 = \theta_0, \qquad D_0 = \frac{-\theta_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\xi_0^2\right)}{\xi_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\xi_0^2\right)}, \tag{4.4}$$

siendo el coeficiente adimensional ξ_0 la única solución positiva de la siguiente ecuación

$$\frac{k\theta_0}{\gamma a^{\beta+\delta+2}2^{\beta+1}}f(z) = z^{\beta+\delta+1}, \qquad z > 0, \tag{4.5}$$

donde f viene dada por (3.34), es decir

$$f(z) = \frac{1}{zM\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, z^2\right)}, \qquad z > 0. \tag{4.6}$$

Demostración. A partir de lo probado en el Corolario 2.1 se tiene que

$$U_0(x,t) = t^{\alpha/2}\left[C_0 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\eta^2\right) + D_0\eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\eta^2\right)\right] \tag{4.7}$$

donde C_0 y D_0 son constantes que deben ser determinadas de las condiciones de borde del problema.

Por las condiciones (4.1c) y (4.1d), la frontera libre adopta la forma

$$s(t) = 2a\xi_0\sqrt{t}, \tag{4.8}$$

donde ξ_0 es una constante positiva a determinar.

En virtud de la condición de temperatura impuesta en la frontera fija (4.1b) y teniendo en cuenta que $M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = 1$, se sigue

$$U_0(0,t) = t^{\alpha/2}C_0 = t^{\alpha/2}\theta_0, \tag{4.9}$$

de donde se desprende que $C_0 = \theta_0$.

A partir de (4.8) y el valor de C_0 se obtiene

$$U_0(S_0(t),t) = t^{\alpha/2}\left[\theta_0 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\xi_0^2\right) + D_0\xi_0 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\xi_0^2\right)\right].$$

Al ser la temperatura de cambio de fase (4.1c) nula, se puede determinar D_0

$$D_0 = \frac{-\theta_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\xi_0^2\right)}{\xi_0 M\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\xi_0^2\right)}. \tag{4.10}$$

Hasta ahora se tiene que la frontera libre y D_0 están expresados en función del coeficiente desconocido ξ_0. Para hallar su valor, se utiliza la condición de Stefan (4.1d). Previamente se necesita calcular la derivada parcial respecto de x de la temperatura U_0, la cual está dada por

$$\frac{\partial U_0}{\partial x}(x,t) = \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{a}\left[\eta C_0 \alpha M\left(-\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, -\eta^2\right) + \frac{D_0}{2} M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\eta^2\right)\right]. \tag{4.11}$$

Luego, en virtud de (4.8) y (4.11), la condición de Stefan es equivalente a

$$\begin{aligned} -\frac{kt^{(\alpha-1)/2}}{a}&\left[C_0 \alpha \xi_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, -\xi_0^2\right) + \frac{D_0}{2} M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\xi_0^2\right)\right] \\ &= \gamma 2^\beta \xi^{\beta+\delta+1} a^{\beta+\delta+1} t^{(\beta-\delta-1)/2}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Como C_0, D_0 y ξ_0 no dependen del tiempo, la igualdad anterior, es decir (4.12), tiene sentido si y sólo si $t^{(\alpha-1)/2} = t^{(\beta-\delta-1)/2}$, siendo necesario que

$$\alpha = \beta - \delta. \tag{4.13}$$

Por consiguiente, asumiendo que es válida la relación (4.13) que vincula los parámetros α, β y δ, se tiene que

$$\begin{aligned} &\frac{k\theta_0}{2a\xi_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\xi_0^2\right)}\left[-2\alpha\xi_0^2 M\left(-\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, -\xi_0^2\right) M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\xi_0^2\right) + \right. \\ &\left. + M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\xi_0^2\right) M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\xi_0^2\right)\right] = \gamma 2^\beta a^{\beta+\delta+1} \xi^{\beta+\delta+1}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

A partir de las identidades (2.41)-(2.42), la ecuación (4.14) se convierte en:

$$\frac{k\theta_0}{\gamma a^{\beta+\delta+2} 2^{\beta+1}} \frac{1}{\xi_0 M\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, \xi_0^2\right)} = \xi_0^{\beta+\delta+1}. \tag{4.15}$$

De allí se tiene que ξ_0 debe ser solución de la siguiente ecuación

$$\frac{k\theta_0}{\gamma a^{\beta+\delta+2}2^{\beta+1}} f(z) = z^{\beta+\delta+1}, \qquad z > 0, \tag{4.16}$$

donde

$$f(z) = \frac{1}{zM\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, z^2\right)}. \tag{4.17}$$

Al igual que lo hecho en el capítulo anterior, se sabe que

$$\frac{df}{dz}(z) = -f^2(z)M\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{1}{2}, z^2\right). \tag{4.18}$$

Resulta así que el lado izquierdo de la ecuación (4.16) dado por $I(z) = \frac{k\theta_0}{\gamma a^{\beta+\delta+2}2^{\beta+1}} f(z)$ verifica:

$$\frac{d}{dz}I(z) = -\frac{k\theta_0}{\gamma a^{\beta+\delta+2}2^{\beta+1}} f^2(z)M\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{1}{2}, z^2\right) < 0, \tag{4.19}$$

$$I(0) = +\infty, \tag{4.20}$$

$$I(+\infty) = 0, \tag{4.21}$$

mientras que el lado derecho de la ecuación (4.16) dado por $D(z) = z^{\beta+\delta+1}$ satisface:

$$\frac{d}{dz}D(z) = (\beta+\delta+1)z^{\beta+\delta} > 0, \qquad (\text{ si } \beta+\delta+1 \geq 0) \tag{4.22}$$

$$D(0) = 0, \tag{4.23}$$

$$D(+\infty) = +\infty. \tag{4.24}$$

Por lo tanto, de (4.19)-(4.21) y (4.22)-(4.24), y asumiendo $\beta+\delta+1 \geq 0$, se puede concluir que la ecuación (4.16) tiene una única solución positiva, la cual se denota con ξ_0.

Cabe mencionar que debido a (4.13), i.e $\alpha = \beta - \delta$, pedir $\alpha \geq 0$, y $\beta+\delta+1 \geq 0$, es equivalente a que se verifique $\beta \geq \max(\delta, -\delta-1)$.

■

Las soluciones de determinados problemas examinados en la literatura pueden obtenerse como un caso particular del Teorema 4.1, fijando valores particulares para β, δ y por ende α. Se analizan a continuación algunos casos especiales.

Corolario 4.1. *La solución al problema de Stefan clásico con condición de temperatura en la frontera fija $x = 0$, puede recuperarse a partir del Teorema 4.1 fijando $\beta = \delta = 0$.*

Demostración. En el problema de Stefan clásico, el calor latente se considera constante, es decir $L = \gamma$. Esto corresponde al caso $\beta = 0$ y $\delta = 0$. Se observa que estos valores verifican las hipótesis del teorema ya que $\beta \geq \text{máx}(0, -1)$. Además, fijados β y δ, resulta $\alpha = \beta - \delta = 0$. Teniendo en cuenta que

$$M\left(0, \tfrac{1}{2}, -\eta^2\right) = 1, \quad \text{y} \quad M\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\eta^2\right) = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2\eta}\operatorname{erf}(\eta), \tag{4.25}$$

se obtiene que la temperatura es de la forma $U_0(x,t) = C_0 + D_0 \operatorname{erf}(\eta)$, lo cual coincide con lo dado en la literatura ([13, 59, 60, 61, 62, 63, 64]).

■

Observación 4.1. *En [1] y [35] se han considerado problemas de Stefan a una y dos fases respectivamente, con calor latente dependiente linealmente de la posición. Las soluciones obtenidas en dichos artículos no podrán recuperarse a partir del Teorema 4.1, dado que la condición impuesta en el borde fijo es diferente a la de nuestro problema.*

Para el caso en que se fije $\beta = 1$, $\delta = 0$, se obtiene que el calor latente es de la forma $L = \gamma s(t)$. Fijando $\alpha = 1$, se puede aplicar el Teorema 4.1. En virtud de la siguiente propiedad

$$M\left(-\tfrac{n}{2}, \tfrac{1}{2}, -z^2\right) = 2^{n-1}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}+1\right)\left[i^n \operatorname{erfc}(z) + i^n \operatorname{erfc}(-z)\right], \quad \textit{con } n \in \mathbb{N}$$

y teniendo en cuenta que $i\operatorname{erf}(z) = \frac{\exp(-z^2)}{\sqrt{\pi}} + z\operatorname{erfc}(z)$ y $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, la temperatura viene dada por:

$$U_0(x,t) \;=\; C_0\left[\sqrt{t}\exp(-\eta^2) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}x\operatorname{erfc}(\eta)\right] + \frac{D_0}{2}x. \tag{4.26}$$

Corolario 4.2. *Las soluciones dadas en [36] y [37] para el problema de Stefan a una fase con condición de temperatura en la frontera fija y calor latente variable como una potencia de la posición, puede recuperarse a partir del Teorema 4.1 automáticamente fijando* $\beta \in \mathbb{R}_0^+$ *y* $\delta = 0$*, siendo* $\alpha = \beta$*.*

Observación 4.2. *Para el estudio de la consolidación del suelo [2], se analiza un problema de frontera libre en donde el calor latente adopta la forma* $L = \dfrac{\gamma}{\dot{s}(t)}$*. Cabe mencionar que dicho caso no corresponde a un problema de Stefan pero sí a un problema de frontera libre con condición implícita en la frontera: [38, 39]. Para este caso resulta* $\beta = 0$*,* $\delta = -1$*. Fijando* $\alpha = 1$ *se está en condiciones de aplicar el Teorema 4.1. En este caso resulta que la tempratura se expresa de la forma (4.26). Además la función* f *a partir de la cual se determina el coeficiente* ξ_0 *que caracteriza a la frontera libre se transforma en*

$$f(z) = \frac{1}{zM\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right)} = \frac{1}{z\exp(z^2)M\left(0, \frac{3}{2}, -z^2\right)} = \frac{\exp(-z^2)}{z}, \qquad z > 0. \tag{4.27}$$

4.1.2. Ejemplos computacionales

Se presentan a continuación algunos ejemplos numéricos. Por el Teorema 4.1, se tiene que la solución al problema 4.1 está caracterizado por un coeficiente adimensional ξ_0 definido como la única solución de la ecuación (4.16). Dicha ecuación puede reescribirse como $G_0(z) = 0$ con

$$G_0(z) = \frac{\text{Ste}}{2^{\beta+1}} f(z) - z^{\beta+\delta+1}, \qquad z > 0, \tag{4.28}$$

donde f está dado por (4.6) y el parámetro adimensional Ste se define por:

$$\text{Ste} = \frac{k\theta_\infty}{\gamma a^{\beta+\delta+2}}. \tag{4.29}$$

Para hallar la raíz de la función G_0 se aplica, el método de Newton. Se calculan los

Tabla 4.1: Coeficiente ξ_0 para distintos valores de Ste, δ, β.

		Ste = 0,1	Ste = 0,3	Ste = 0,5	Ste = 0,7	Ste = 0,9
$\delta = 0$,	$\beta = 0$	0.2200	0.3699	0.4648	0.5365	0.5946
	$\beta = 1$	0.2846	0.3998	0.4652	0.5125	0.5499
$\delta = -1/2$,	$\beta = 0$	0.1456	0.2804	0.3733	0.4459	0.5057
	$\beta = 1$	0.2234	0.3366	0.4036	0.4528	0.4922
$\delta = 1$,	$\beta = 1$	0.3877	0.5015	0.5634	0.6073	0.6418
	$\beta = 3$	0.4134	0.4891	0.5281	0.5550	0.5759

valores del coeficiente ξ_0 para diferentes valores de los parámetros: Ste, β, δ. En la Tabla 4.1 se presentan los valores de ξ_0 en función de Ste, fijando diferentes valores de δ y β.

Para visualizar mejor los resultados obtenidos en la tabla, se grafican los valores de ξ_0 en función de Ste para distintos valores de δ y β (ver Figura 4.1).

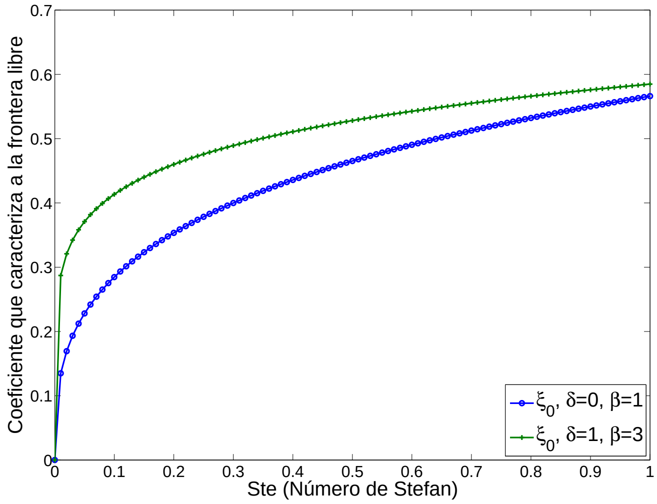

Figura 4.1: Gráfica de ξ_0 en función de Ste para diferentes valores de β y δ.

4.2. Condición de flujo en el borde fijo

Se estudia el siguiente problema de Stefan a una fase, para un material homogéneo, semi-infinito, donde se consideran el calor latente dependiente de una potencia de la posición y de la velocidad, con una condición de tipo Neumann en el borde fijo. Dicho problema consiste en hallar la temperatura $U_q = U_q(x,t)$ y la frontera libre $S_q = S_q(t)$ de manera que:

$$\frac{\partial U_q}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U_q}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < S_q(t), \quad t > 0, \tag{4.30a}$$

$$k \frac{\partial U_q}{\partial x}(0,t) = -q t^{(\alpha-1)/2}, \qquad t > 0, \tag{4.30b}$$

$$U_q(S_q(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{4.30c}$$

$$k \frac{\partial U_q}{\partial x}(S_q(t),t) = -\gamma S_q^{\beta}(t) \dot{S}_q^{\delta}(t), \qquad t > 0, \tag{4.30d}$$

$$S_q(0) = 0, \tag{4.30e}$$

donde a^2 es le coeficiente de difusividad térmica y k representa la conductividad térmica. La temperatura de cambio de fase es cero (4.30c). Se impone una condición de flujo en el borde fijo caracterizado por $q > 0$. La característica principal de este problema radica en que el calor latente está dado de la forma $L = \gamma S(t)^{\beta} \dot{S}^{\delta}(t)$, donde $\gamma > 0$ y β y δ son constantes arbitrarias dadas.

4.2.1. Solución exacta de tipo similaridad

Se presenta a continuación el siguiente resultado que permite obtener la solución exacta de tipo similaridad al problema (4.30)

Teorema 4.2. *Sean β y δ constantes reales tal que $\beta \geq \max(\delta, -1-\delta)$. Fijando $\alpha = \beta - \delta$, existe una única solución de tipo similaridad (U_q, S_q) para el problema (4.30) y viene dada por*

$$U_q(x,t) = t^{\alpha/2} \left[C_q M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\eta^2\right) + D_q \eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\eta^2\right) \right], \tag{4.31}$$

$$S_q(t) = 2a\, \xi_q \sqrt{t}, \tag{4.32}$$

donde $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ es la variable de similaridad y las constantes C_q y D_q se definen de la *siguiente forma:*

$$C_{_q} = \frac{2aq\xi_{_q}}{k} \frac{M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\xi_{_q}^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\xi_{_q}^2\right)}, \tag{4.33}$$

$$D_{_q} = \frac{-2aq}{k}, \tag{4.34}$$

siendo el coeficiente adimensional $\xi_{_q}$ *la única solución positiva de la siguiente ecuación*

$$\frac{q}{\gamma 2^{\beta} a^{\beta+\delta+1}} g(z) = z^{\beta+\delta+1}, \qquad z > 0, \tag{4.35}$$

donde la función g *coincide con (3.44) y está definida por*

$$g(z) = \frac{1}{M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\right)}. \tag{4.36}$$

Demostración. Para encontrar solución de tipo similaridad para el problema (4.30), se trabaja de manera análoga a lo realizado en la demostración del Teorema 4.1. Se tiene que si $U_{_q}$ verifica la ecuación del calor (4.30a), de acuerdo al Corolario 2.1 debe adoptar la forma

$$U_{_q}(x,t) = t^{\alpha/2}\left[C_{_q} M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\eta^2\right) + D_{_q}\eta M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\eta^2\right)\right]. \tag{4.37}$$

donde la variable de similaridad está definida por $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ y las constantes $C_{_q}$, $D_{_q}$ deberán hallarse en función del resto de las condiciones del problema.

Se observa que a partir de la temperatura de cambio de fase (4.30c) que la frontera libre adopta la forma

$$S_{_q}(t) = 2a\,\xi_{_q}\sqrt{t}, \tag{4.38}$$

donde $\xi_{_q}$ es un coeficiente positivo adimensional que deberá hallarse en función de las condiciones del problema.

Teniendo en cuenta que $U_{_q}$ viene dado por (4.37) y $S_{_q}$ por (4.38), encontrar la solución al problema (4.30), consiste en determinar los coeficientes $C_{_q}$, $D_{_q}$ y $\xi_{_q}$.

De la condición de flujo impuesta en la frontera fija $x = 0$ dada por (4.30b), se obtiene de manera inmediata que

$$D_{_q} = \frac{-2aq}{k}. \tag{4.39}$$

Además de la condición (4.30c) se puede deducir que

$$C_{_q} = \frac{2aq\xi_{_q}}{k}\frac{M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\xi_{_q}^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\xi_{_q}^2\right)}, \tag{4.40}$$

obteniendo $C_{_q}$ en función de $\xi_{_q}$.

Finalmente, a partir de la la condición de tipo Stefan dada por (4.30d) se determinará el coeficiente $\xi_{_q}$. Para ello, se observa que dadas las fórmulas de derivación para las funciones de Kummer (2.34)-(2.35) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_{_q}}{\partial x}\left(S_{_q}(t),t\right) = \frac{t^{(\alpha-1)/2}q}{kM\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\xi_{_q}^2\right)}&\Big[2\alpha\xi_{_q}^2 M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},-\xi_{_q}^2\right)M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\xi_{_q}^2\right)\\ &-M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\xi_{_q}^2\right)M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\xi_{_q}^2\right)\Big].\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las relaciones (2.41)-(2.42), la derivada parcial de $U_{_q}$ con respecto a x en la frontera libre es

$$\frac{\partial U_{_q}}{\partial x}\left(S_{_q}(t),t\right) = \frac{-t^{(\alpha-1)/2}q}{kM\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\xi_{_q}^2\right)}. \tag{4.41}$$

Luego, resulta que la condición (4.30d) es equivalente a

$$\frac{t^{(\alpha-1)/2}q}{M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\xi_{_q}^2\right)} = \gamma 2^\beta a^{\beta+\delta+1} t^{\frac{\beta-\delta-1}{2}}\xi_{_q}^{\beta+\delta+1},$$

ecuación que tiene sentido si y sólo si $\frac{\alpha-1}{2} = \frac{\beta-\delta-1}{2}$, ya que γ, $\xi_{_q}$ y a no dependen del tiempo. Por consiguiente, existirá solución de similaridad al problema (4.30) si

$$\alpha = \beta - \delta \geq 0, \tag{4.42}$$

y si ξ_q es una solución positiva de la siguiente ecuación:

$$\frac{q}{\gamma 2^{\beta} a^{\beta+\delta+1}} g(z) = z^{\beta+\delta+1}, \qquad z > 0 \tag{4.43}$$

con g dada por (4.36).

Para probar la existencia y unicidad de solución a la ecuación anterior basta con estudiar el comportamiento de la función g. Se prueba fácilmente que g satisface:

$$\frac{dg}{dz}(z) = \frac{-2(\alpha+1)zM\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2},\frac{3}{2},z^2\right)}{M^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\right)} < 0, \tag{4.44}$$

$$g(0^+) = 1 > 0, \tag{4.45}$$

$$g(+\infty) = 0. \tag{4.46}$$

De dichas propiedades se deduce que el lado izquierdo de la ecuación (4.43) es una función estrictamente decreciente en la variable z y que decrece de $\frac{q}{\gamma 2^{\beta} a^{\beta+\delta+1}} > 0$ a 0 cuando z crece de 0 a $+\infty$. Por otra parte, el lado derecho de la ecuación (4.43), si $\beta+\delta+1>0$, resulta ser una función estrictamente creciente en z que crece de 0 to $+\infty$.

En conclusión, si $\beta+\delta+1>0$, se puede asegurar que la ecuación (4.43) tiene una única solución positiva, la cual se denota con ξ_q.

Por último, cabe mencionar que las restricciones (4.42), i.e. $\alpha=\beta-\delta\geq 0$ y $\beta+\delta+1>0$ implican que $\beta \geq \text{máx}(\delta, -1-\delta)$.

■

Especificando diferentes valores para β y δ en el resultado anterior, pueden recuperarse algunas soluciones de la literatura. Esos casos son establecidos en los siguientes corolarios

Corolario 4.3. *La solución al problema de Stefan clásico con condición de flujo en la frontera fija dado en [55], puede recuperarse a partir del Teorema 4.2 fijando* $\beta=\delta=0$.

Demostración. Tomando $\beta=\delta=0$ y por ende $\alpha=0$, el calor latente resulta constante $L=\gamma$ como en el problema de Stefan clásico. Se observa además que la condición de flujo en el borde fijo $x=0$ resulta $k\frac{\partial U_q}{\partial x}(0,t) = -\frac{q}{\sqrt{t}}$. Del hecho que $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},z\right)=\exp(z)$, se puede asegurar que ξ_q resulta definida como la única solución a la siguiente ecuación:

$$\frac{q}{\gamma a}\exp(-z^2) = z, \qquad z > 0,$$

lo cual coincide con la solución dada en [55]. ■

Corolario 4.4. *Las soluciones dadas en los artículos [36], [37] pueden obtenerse a partir del Teorema 4.2 tomando $\beta \in \mathbb{R}^+$ y $\delta = 0$.*

Demostración. Tomando $\delta = 0$, se obtiene que el calor latente está definido por $L = \gamma s^{\beta}(t)$, es decir, por una potencia de la posición. Para dicho caso, tomando $\alpha = \beta$ se recuperan de forma automática las soluciones obtenidas en la literatura.

■

4.2.2. Ejemplos computacionales

Se presentan a continuación algunos ejemplos numéricos. Por el Teorema 4.2, se sabe que la solución al problema 4.30 está caracterizado por un coeficiente adimensional ξ_q definido como la única solución de la ecuación (4.43). Dicha ecuación puede reescribirse como $G_q(z) = 0$ con

$$G_q(z) = \frac{R}{2^{\beta}}g(z) - z^{\beta+\delta+1}, \tag{4.47}$$

donde g está dado por (4.36) y el parámetro adimensional R se define por:

$$R = \frac{q}{\gamma a^{\beta+\delta+1}}. \tag{4.48}$$

Para hallar la raíz de la función G_q se aplica, al igual que en la sección anterior el método de Newton teniendo en cuenta que de (4.44) resulta

$$\frac{dG_q}{dz}(z) = \frac{-R(\alpha+1)zM\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2},\frac{3}{2},z^2\right)}{2^{\beta-1}\left[M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\right)\right]^2}. \tag{4.49}$$

Se calculan los valores del coeficiente ξ_q para diferentes valores de los parámetros: R, β, δ. En la Tabla 4.2 se presentan los valores de ξ_q en función de R, fijando diferentes valores de δ y β.

Tabla 4.2: Coeficiente ξ_q para distintos valores de R, δ y β.

		$R=0{,}1$	$R=0{,}2$	$R=0{,}3$	$R=0{,}4$	$R=0{,}5$
$\delta=0$,	$\beta=0$	0.0990	0.1927	0.2777	0.3531	0.5237
	$\beta=1$	0.2138	0.2912	0.3453	0.3875	0.4225
$\delta=-1/2$,	$\beta=0$	0.0100	0.0398	0.0879	0.1496	0.2172
	$\beta=1$	0.1319	0.2016	0.2543	0.2970	0.2952
$\delta=1$,	$\beta=1$	0.3534	0.4357	0.4904	0.5321	0.5661
	$\beta=3$	0.3838	0.4323	0.4627	0.4851	0.5031

Para visualizar mejor los resultados obtenidos en la tabla, se grafican los valores de ξ_q en función del parámetro R para distintos valores de δ y β (ver Figura 4.2).

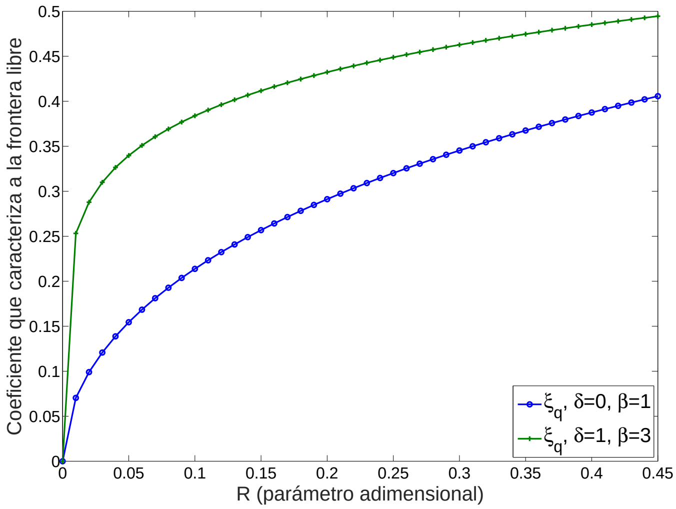

Figura 4.2: Gráfica de ξ_q en función de R para diferentes valores de β y δ.

Dado que el calor latente se comporta como una función de la frontera libre, se grafica L en función del tiempo, para ver su evolución. En función del teorema 4.2 se tiene

$$L = \gamma S_q^{\beta}(t)\dot{S}_q^{\delta}(t) = \gamma\left(2\xi_q a\sqrt{t}\right)^{\beta}\left(\frac{\xi_q a}{\sqrt{t}}\right)^{\delta} = \gamma 2^{\beta} a^{\beta+\delta}\xi_q^{\beta+\delta} t^{\frac{\beta-\delta}{2}} \tag{4.50}$$

Se puede entonces observar gráficamente (Figura 4.3) lo que se deduce de manera analítica, en el sentido que si $\delta=0$, $\beta=1$, el calor latente se comporta como una potencia p del

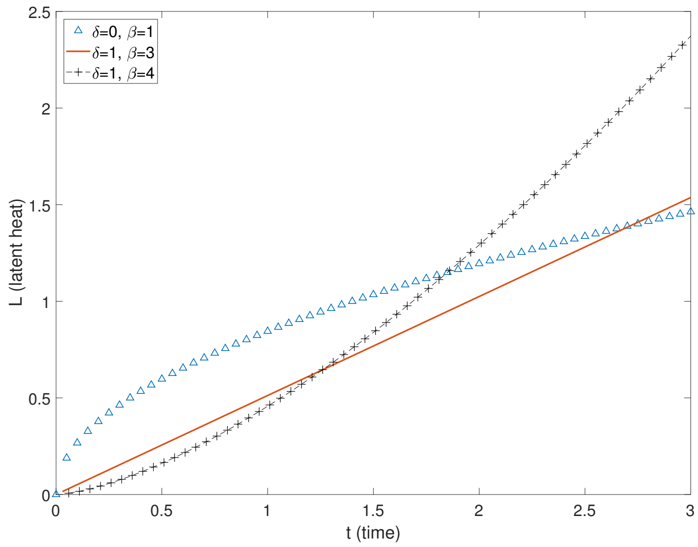

Figura 4.3: Gráfica del calor latente L en función del tiempo para $R = 0{,}5$, $a = 1$, $\gamma = 1$.

tiempo i.e $L \sim t^p$, con $p = \frac{1}{2} < 1$. En el caso en que $\delta = 1$, $\beta = 3$, se obtiene $p = 1$ y para $\delta = 1$, $\beta = 4$, la potencia se convierte en $p = \frac{3}{2} > 1$.

4.2.3. Equivalencia con el problema con condición de tipo Dirichlet en el borde fijo

En la sección anterior se estudió el problema de tipo Stefan (4.1), el cual a diferencia del problema (4.30) tiene una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo caracterizada por $\theta_{{}_0}$, es decir

$$U_{{}_0}(0,t) = t^{\alpha/2}\theta_{{}_0} > 0, \qquad t > 0. \tag{4.51}$$

La solución a dicho problema fue dada en el Teorema 4.1.

Se estudian a continuación condiciones necesarias y suficientes para que los problemas con condición de temperatura en el borde fijo (4.1), y con condición de flujo en el borde fijo (4.30), resulten equivalentes.

Teorema 4.3. *Sean β y δ constantes reales que satisfacen $\beta \geq \text{máx}(\delta, -1-\delta)$ y sea $\alpha = \beta - \delta$. Entonces, el problema (4.30) resulta equivalente al problema (4.1), si el parámetro q que caracteriza al flujo en el borde fijo en el problema (4.30) se relaciona con el parámetro*

θ_0 del problema (4.1) a través de la siguiente expresión

$$\theta_0 = \frac{2aq}{k}\frac{\xi M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\xi^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\xi^2\right)}. \tag{4.52}$$

El coeficiente ξ hace referencia a la única solución de la ecuación (4.43) la cual coincidirá con la única solución de (4.5)

Demostración. Se considera primero el problema (4.30) con un flujo en el borde fijo $x = 0$, caracterizado por q, cuya solución $\left(U_q, S_q\right)$ está dada por (4.31), (4.32) bajo las hipótesis de que β y δ verifiquen $\beta \geq \text{máx}(\delta, -1-\delta)$, y $\alpha = \beta - \delta$. Se observa que si se calcula $U_q(0,t)$ se obtiene que:

$$U_q(0,t) = \frac{t^{\alpha/2}2aq\xi_q}{k}\frac{M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\xi_q^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\xi_q^2\right)},$$

donde ξ_q está definida como la única solución de la ecuación (4.43).

Se supone ahora que

$$\theta_0 = \frac{U_q(0,t)}{t^{\alpha/2}} = \frac{2aq\xi_q}{k}\frac{M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\xi_q^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\xi_q^2\right)},$$

y se resuelve el problema (4.1) con dicho dato. La solución (U_0, S_0) se obtiene a partir del teorema 4.1. La frontera libre S_0 está caracterizada por el coeficiente ξ_0, el cual es la única solución de la ecuación (4.5), y por lo tanto es solución de

$$\frac{q\,\xi_q}{\gamma a^{\beta+\delta+1}2^{\beta}}\frac{M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\xi_q^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\xi_q^2\right)}\frac{1}{zM\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},z^2\right)} = z^{\beta+\delta+1}, \qquad z>0. \tag{4.53}$$

Se nota que si $z = \xi_q$, la ecuación anterior se reduce a la ecuación (4.43). Esto significa que $z = \xi_q$ es solución a la ecuación (4.53). Como la única solución a (4.53) es ξ_0, se sigue que $\xi_0 = \xi_q$. Por consiguiente se puede deducir fácilmente que $C_0 = C_q$, $D_0 = D_q$ obteniendo que (U_0, S_0) con θ_0 dado en función de q, coincide con la solución (U_q, S_q) del problema

(4.30).

De manera recíproca, se considera el problema (4.1) con dato $\theta_0 > 0$ dado, cuya solución (U_0, S_0) está dada por (4.2) y (4.3) bajo las hipótesis de que β y δ sean constantes que verifiquen $\beta \geq \text{máx}(\delta, -1-\delta)$, y $\alpha = \beta - \delta$. Se observa que si se calcula $\frac{\partial U_0}{\partial x}(0,t)$ se obtiene que

$$\frac{\partial U_0}{\partial x}(0,t) = \frac{-t^{(\alpha-1)/2}\theta_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2} - \xi_0^2\right)}{2a\xi_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\xi_0^2\right)}$$

Se define entonces $q = -\frac{k}{t^{(\alpha-1)/2}}\frac{\partial U_0}{\partial x}(0,t) = \frac{k\theta_0}{2a}\frac{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\xi_0^2\right)}{\xi_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\xi_0^2\right)}$, donde ξ_0 es el coeficiente que caracteriza a la frontera libre S_0.

Se considera el problema (4.30) con dato q en función de θ_0. La solución (U_q, S_q) puede obtenerse a partir de las fórmulas (4.37) y (4.32). Además la frontera libre S_q se caracteriza por un coeficiente ξ_q que es la única solución de (4.43), y por lo tanto de:

$$\frac{k\theta_0}{\gamma 2^{\beta+1}a^{\beta+\delta+2}}\frac{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\xi_0^2\right)}{\xi_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\xi_0^2\right)}\frac{1}{M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\right)} = z^{\beta+\delta+1}, \qquad z > 0 \tag{4.54}$$

La ecuación anterior tiene a $z = \xi_0$ como solución dado que si se reemplaza a z por ξ_0 se obtiene que la ecuación (4.54) es equivalente a (4.5). Como la única solución de (4.54) es ξ_q, resulta que $\xi_q = \xi_0$.Mediante cálculos algebriacos se obtiene también que $C_q = C_0$, $D_q = D_0$ y que entonces la solución (U_q, S_q) al problema (4.30) con dato q dado en función de θ_0 coincide con la solución (U_0, S_0) del problema (4.1).

■

4.3. Condición convectiva en el borde fijo

A continuación se estudia el problema de tipo Stefan para un material semi-infinito, con calor latente dependiente de una potencia de la posición y de la velocidad, con una condición de tipo Robin en el borde fijo. Dicho problema consiste en hallar la temperatura

$U_h = U_h(x,t)$ y la frontera libre $S_h = S_h(t)$ de manera que:

$$\frac{\partial U_h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U_h}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < S_h(t), \quad t > 0, \tag{4.55a}$$

$$k\frac{\partial U_h}{\partial x}(0,t) = \frac{h}{\sqrt{t}}\left[U_h(0,t) - \theta_\infty t^{\alpha/2}\right], \qquad t > 0, \tag{4.55b}$$

$$U_h(S_h(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{4.55c}$$

$$k\frac{\partial U_h}{\partial x}(S_h(t),t) = -\gamma S_h^\beta(t)\dot{S}_h^\delta(t), \qquad t > 0, \tag{4.55d}$$

$$S_h(0) = 0, \tag{4.55e}$$

donde al igual que antes a^2 es le coeficiente de difusividad térmica y k representa la conductividad térmica. La temperatura de cambio de fase es cero (4.30c). Se impone una condición convectiva en el borde fijo, donde la transferencia de calor está caracterizada por $h > 0$ y la temperatura ambiente por $\theta_\infty > 0$.

4.3.1. Solución exacta de tipo similaridad

Se presenta a continuación el siguiente resultado que permite obtener la solución exacta de tipo similaridad al problema (4.55)

Teorema 4.4. *Sean β y δ constantes reales tal que $\beta \geq \text{máx}(\delta, -1-\delta)$. Fijando $\alpha = \beta - \delta$, existe una única solución de tipo similaridad (U_h, S_h) para el problema (4.55) y viene dada por*

$$U_h(x,t) = t^{\alpha/2}\left[C_h M\left(-\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}, -\eta^2\right) + D_h \eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\eta^2\right)\right], \tag{4.56}$$

$$S_h(t) = 2a\, \xi_h \sqrt{t}, \tag{4.57}$$

donde $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ es la variable de similaridad y las constantes C_h y D_h se definen de la siguiente forma:

$$C_h = \frac{k}{2ah} D_h + \theta_\infty, \tag{4.58}$$

$$D_h = \frac{-\theta_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\xi_h^2\right)}{\left[\xi_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\xi_h^2\right) + \frac{k}{2ah} M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\xi_h^2\right)\right]}, \tag{4.59}$$

siendo el coeficiente adimensional ξ_h la única solución positiva de la siguiente ecuación

$$\frac{\theta_\infty k}{2^{\beta+1} a^{\beta+\delta+2}\gamma} f_h(z) = z^{\beta+\delta+1}, \qquad z > 0 \tag{4.60}$$

donde f_h coincide con (3.7) y está definida por

$$f_h(z) = \frac{1}{\left[\frac{k}{2ah} M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + z M\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, z^2\right)\right]}. \tag{4.61}$$

Demostración. De acuerdo al Corolario 2.1 se tiene que si U_h verifica la ecuación del calor entonces adoptará la siguiente forma:

$$U_h(x,t) = t^{\alpha/2}\left[C_h M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\eta^2\right) + D_h \eta M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\eta^2\right)\right], \tag{4.62}$$

donde C_h y D_h deberán ser determinadas a partir del resto de las condiciones del problema.

Además, por (4.55c) la frontera libre se puede escribir como

$$S_h(t) = 2a\,\xi_h \sqrt{t}. \tag{4.63}$$

donde ξ_h es un coeficiente positivo, adimensional que deberá ser determinado.

Teniendo en cuenta que U_h y S_h se representan a partir de (4.62) y(4.63) , respectivamente; encontrar la solución al problema (4.55) consistirá en determinar el valor de los coeficientes C_h, D_h y ξ_h.

Se observa que

$$\frac{\partial U_h}{\partial x}(x,t) = \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{2a}\left[2C_h \alpha\eta M\left(-\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, -\eta^2\right) + D_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\eta^2\right)\right]$$

donde $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$. Por consiguiente $\frac{\partial U_h}{\partial x}(0,t) = t^{(\alpha-1)/2}\frac{D_h}{2a}$. A partir de la condición convectiva impuesta en el borde fijo (4.55b) se tiene que:

$$C_h = \frac{k}{2ah}D_h + \theta_\infty. \tag{4.64}$$

Por otra parte, en virtud de la condición de temperatura en la frontera libre (4.55c), se puede deducir que

$$D_h = \frac{-\theta_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\xi_h^2\right)}{\left[\xi_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\xi_h^2\right) + \frac{k}{2ah}M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\xi_h^2\right)\right]}, \tag{4.65}$$

obteniendo a D_h en función del coeficiente ξ_h.

Para hallar el valor de ξ_h, se aplica la condición de tipo Stefan (4.55d), pero previamente, se observa que $\frac{\partial U_h}{\partial x}\left(S_h(t,t\right)$ está dado por

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_h}{\partial x}\left(S_h(t),t\right) = \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{a}&\left[\frac{D_h}{2}\left(\frac{k\alpha\xi_h}{ah}M\left(-\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, -\xi_h^2\right) + M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\xi_h^2\right)\right) + \right.\\ &\left. +\theta_\infty \alpha\xi_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, -\xi_h^2\right)\right]\end{aligned}$$

A partir de las relaciones (2.41) y (2.42), reemplazando D_h por (4.65), la derivada parcial de U_h se reduce a

$$\frac{\partial U_h}{\partial x}\left(S_h(t),t\right) = \frac{-t^{(\alpha-1)/2}\theta_\infty}{2a\left[\xi_h M\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, \xi_h^2\right) + \frac{k}{2ah}M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \xi_h^2\right)\right]}. \tag{4.66}$$

Reemplazando (4.66) en la condición (4.55d) sigue que

$$\frac{t^{(\alpha-1)/2}k\theta_\infty}{2a\left[\xi_h M\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, \xi_h^2\right) + \frac{k}{2ah}M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \xi_h^2\right)\right]} = \gamma 2^\beta a^{\beta+\delta+1} t^{(\beta-\delta-1)/2}\xi_h^{\beta+\delta+1},$$

la cual tiene sentido, si y sólo si $\frac{\alpha-1}{2} = \frac{\beta-\delta-1}{2}$, ya que ni γ, ni ξ_h, ni a dependen del tiempo. Luego para que exista solución de similaridad al problema (4.55) debe ser

$$\alpha = \beta - \delta \geq 0, \tag{4.67}$$

y ξ_h solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{\theta_\infty k}{2^{\beta+1}a^{\beta+\delta+2}\gamma} f_h(z) = z^{\beta+\delta+1}, \qquad z>0 \tag{4.68}$$

con

$$f_h(z) = \frac{1}{\left[\frac{k}{2ah}M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\right)+zM\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},z^2\right)\right]}. \tag{4.69}$$

Resta entonces probar la existencia y unicidad de solución para la ecuación (4.68). Tal como fue hecho en el Capítulo 3 se obtiene que f_h satisface

$$\frac{df_h}{dz}(z) = \frac{-\left[M\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{1}{2},z^2\right)+\frac{k}{ah}(\alpha+1)zM\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2},\frac{3}{2},z^2\right)\right]}{\left[zM\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},z^2\right)+\frac{k}{2ah}M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\right)\right]^2}<0, \tag{4.70}$$

$$f_h(0^+) = \frac{2ah}{k}, \tag{4.71}$$

$$f_h(+\infty) = 0. \tag{4.72}$$

Se deduce entonces que el lado izquierdo de la ecuación (4.68) es una función estrictamente decreciente en la variable z, que decrece de $\frac{h\theta_\infty}{\gamma 2^\beta a^{\beta+\delta+1}}>0$ a 0 cuando z crece de 0 a $+\infty$, mientras que el lado derecho de (4.68), si $\beta+\delta+1>0$, resulta ser una función creciente que va de 0 a $+\infty$.

Se concluye así que si $\beta+\delta+1>0$, se puede asegurar que (4.68) tiene una única solución, y por lo tanto, el problema (4.55) también tiene una única solución.

De las restricciones $\alpha=\beta-\delta\geq 0$ y $\beta+\delta+1>0$ obtenemos que debe ser $\beta \geq \max(\delta, -1-\delta)$.

■

Especificando diferentes valores para β y δ en el teorema anterior, pueden recuperarse algunas soluciones de la literatura como corolario.

Corolario 4.5. *La solución al problema de Stefan a una fase clásico con condición convectiva en el borde fijo, puede obtenerse del Teorema 4.4 fijando $\beta=\delta=0$ (Ver [21]).*

Corolario 4.6. *La solución al problema* (P_h) *estudiado en el Capítulo 3, puede recuperarse a partir del Teorema 4.4 fijando $\beta\in\mathbb{R}^+$ y $\delta=0$ (Ver [41]).*

4.3.2. Ejemplos computacionales

En esta sección se presentan algunos ejemplos computacionales, con el objetivo de ilustrar en forma gráfica el comportamiento de la solución al problema (4.55) para diferentes valores de los parámetros.

De acuerdo al Teorema 4.4, la solución al problema (4.55) está caracterizada por el coeficiente adimensional ξ_h definido como la única solución a la ecuación (4.68), la cual puede reescribirse como $G_h(z) = 0$ con

$$G_h(z) = \frac{\text{Ste}}{2^{\beta+1}} f_h(z) - z^{\beta+\delta+1}, \tag{4.73}$$

donde f_h está dada por (4.61) y el número de Stefan es

$$\text{Ste} = \frac{\theta_\infty k}{\gamma a^{\beta+\delta+2}}. \tag{4.74}$$

Introduciendo el número generalizado de Biot

$$\text{Bi} = \frac{hk}{a}, \tag{4.75}$$

la función f_h puede reescribirse como

$$f_h(z) = \frac{1}{\frac{1}{2\text{Bi}} M\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + zM\left(\frac{\alpha}{2} + 1, \frac{3}{2}, z^2\right)}.$$

Al igual que en las secciones anteriores, se resuelve dicha ecuación a través del método de Newton en donde de acuerdo con (4.70), resulta

$$\frac{dG_h}{dz}(z) = -\frac{\text{Ste}}{2^{\beta+1}} \frac{\left[M\left(\frac{\alpha}{2} + 1, \frac{1}{2}, z^2\right) + \frac{(\alpha+1)}{\text{Bi}} zM\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right)\right]}{\left[\frac{1}{2\text{Bi}} M\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + zM\left(\frac{\alpha}{2} + 1, \frac{3}{2}, z^2\right)\right]^2} - (\beta + \delta + 1) z^{\beta+\delta}. \tag{4.76}$$

Se calcula el coeficiente ξ_h para diferentes valores de los parámetros Ste, Bi, β y δ. En la Tabla 4.3 se presentan los valores numéricos obtenidos para ξ_h para diferentes valores de Bi, β y δ, fijando Ste $= 0{,}5$.

Tabla 4.3: Coeficiente ξ_h para Ste $= 0{,}5$ y distintos valores de Bi, δ, β.

	Ste=0.5	Bi=1	Bi=10	Bi=50	Bi=100
$\delta = 0$,	$\beta = 0$	0.2926	0.4422	0.4601	0.4625
	$\beta = 1$	0.3490	0.4485	0.4617	0.4635
$\delta = -1/2$,	$\beta = 0$	0.1430	0.3375	0.3617	0.3648
	$\beta = 1$	0.2701	0.3837	0.3994	0.4015
$\delta = 1$,	$\beta = 1$	0.4736	0.5514	0.5609	0.5621
	$\beta = 3$	0.4615	0.5181	0.5260	0.5270

En la Figura 4.4, se grafica ξ_h en función del número de Biot especificando diferentes valores para el número de Stefan, δ y β.

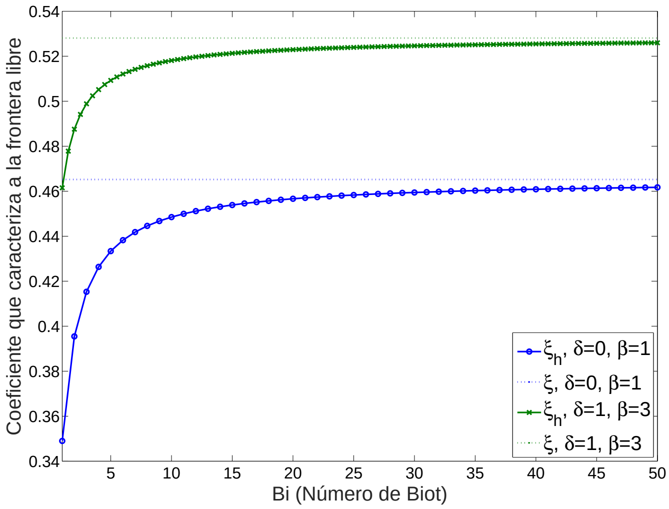

Figura 4.4: Gráfica de ξ_h en función de Bi, fijando Ste $= 0{,}5$.

Dado que el calor latente se comporta como una función de la frontera libre, se lo podría graficar, al igual que en la sección anterior, con el objetivo de observar su evolución en el tiempo. Analíticamente se puede deducir fácilmente que

$$L = \gamma S_h^{\beta}(t)\dot{S}_h^{\delta}(t) = \gamma\left(2\xi_h a\sqrt{t}\right)^{\beta}\left(\frac{\xi_h a}{\sqrt{t}}\right)^{\delta} = \gamma 2^{\beta} a^{\beta+\delta}\xi_h^{\beta+\delta} t^{\frac{\beta-\delta}{2}}. \tag{4.77}$$

Por lo tanto, el calor latente se comporta como una potencia del tiempo, más aún, se tiene que $L \sim t^p$ con $p < 1$ si $\beta - \delta < 2$, $p = 1$ si $\beta - \delta = 2$ y $p > 1$ en caso de que $\beta - \delta > 2$.

En todos los casos, β debe ser tal que $\beta \geq \text{máx}\{\delta, -1-\delta\}$ para satisfacer las hipótesis del Teorema 4.4.

4.3.3. Equivalencia con el problema con condición de tipo Dirichlet en el borde fijo

En la Sección 4.1 se estudió el problema de tipo Stefan (4.1), el cual a diferencia del problema (4.55) tenía una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo caracterizada por θ_0, es decir

$$U_0(0,t) = t^{\alpha/2}\theta_0 > 0, \qquad t > 0. \tag{4.78}$$

La solución a dicho problema fue dada en el Teorema 4.1.

Se estudian a continuación condiciones necesarias y suficientes para que los problemas con condición de temperatura en el borde fijo (4.1), y con condición convectiva en el borde fijo (4.55), resulten equivalentes. Por equivalencia se entenderá que ambos problemas posean la misma solución.

Teorema 4.5. *Sean β y δ constantes reales que satisfacen $\beta \geq \text{máx}(\delta, -1-\delta)$ y sea $\alpha = \beta - \delta$. Entonces, el problema (4.55) resulta equivalente al problema (4.1), si los parámetros h y θ_∞ que caracterizan la condición convectiva en $x = 0$ en el problema (4.55) se relacionan con el parámetro θ_0 del problema (4.1) de la siguiente manera*

$$\theta_0 = \frac{\theta_\infty \xi M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\xi^2\right)}{\frac{k}{2ah} M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\xi^2\right) + \xi M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\xi^2\right)}. \tag{4.79}$$

El coeficiente ξ hace referencia a la única solución de la ecuación (4.68) la cual coincidirá con la única solución de (4.5)

Demostración. En primer lugar, se considera el problema (4.55) con datos $\theta_\infty > 0$, $h > 0$, cuya solución (U_h, S_h) está dada por (4.56) y (4.57), bajo las hipótesis de que β y δ sean constantes que verifiquen $\beta \geq \text{máx}(\delta, -1-\delta)$, y $\alpha = \beta - \delta$. Si se calcula $U_h(0,t)$ se obtiene que:

$$U_h(0,t) = t^{\alpha/2} \frac{\theta_\infty \xi_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\xi_h^2\right)}{\frac{k}{2ah} M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\xi_h^2\right) + \xi_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},-\xi_h^2\right)}$$

con ξ_h dado como la única solución de la ecuación (4.68).

Se supone entonces que se fija el dato $\theta_0 = \frac{U_h(0,t)}{t^{\alpha/2}}$ y se resuelve el problema con condición de temperatura (4.1). El par solución de dicho problema vendrá dado por (U_0, S_0). En dicha solución, la frontera libre S_0 se caracteriza por un coeficiente adimensional ξ_0 que se obtiene como la única solución de la ecuación (4.5), la cual puede reescribirse reemplazando θ_0 de la siguiente forma

$$\frac{k}{\gamma 2^{\beta+1} a^{\beta+\delta+2}} \frac{\theta_\infty \xi_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\xi_h^2\right)}{\left[\xi_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},-\xi_h^2\right) + \frac{k}{2ah} M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\xi_h^2\right)\right]} \frac{1}{\left[z M\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},z^2\right)\right]} = z^{\beta+\delta+1} \tag{4.80}$$

Si se toma $z = \xi_h$, la ecuación anterior se reduce a la ecuación (4.68). Esto significa que $z = \xi_h$ es solución a la ecuación (4.80). Dado que la única solución a la ecuación (4.80) está dada por ξ_0, se tiene que $\xi_0 = \xi_h$. Por consiguiente, se obtiene fácilmente que $C_0 = C_h$ y $D_0 = D_h$. Esto implica de manera inmediata que la solución (U_0, S_0) al problema (4.1) con dato θ_0 dado en función de h y θ_∞, coincide con la solución (U_h, S_h) del problema (4.55).

De manera recíproca, se considera el problema con condición de temperatura en el borde fijo (4.1) con dato $\theta_0 > 0$, cuya solución (U_0, S_0) está dada por las fórmulas (4.2) y (4.3) bajo las hipótesis de que β y δ sean constantes tales que $\beta \geq \text{máx}(\delta, -1-\delta)$, y $\alpha = \beta - \delta$. Si se calcula $\frac{\partial U_0}{\partial x}(0,t)$ se obtiene:

$$\frac{\partial U_0}{\partial x}(0,t) = \frac{-t^{(\alpha-1)/2} \theta_0 M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}-\xi_0^2\right)}{2a\xi_0 M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\xi_0^2\right)}.$$

Se fijan $\theta_\infty > \theta_0$ y $h = \dfrac{k\frac{\partial U_0}{\partial x}(0,t)}{(\theta_0 - \theta_\infty) t^{(\alpha-1)/2}}$. Se considera de esta forma, el problema con condición convectiva en el borde fijo, gobernado por (4.55) con datos h y θ_∞ dados en función de θ_0. La solución (U_h, S_h) se obtiene a partir de las fórmulas (4.56) y (4.57), donde la frontera libre está caracterizada por un coeficiente adimensional ξ_h que es la única solución de (4.68). Reemplazando h, puede reescribirse dicha ecuación como

$$\frac{\theta_\infty k}{2^{\beta+1}a^{\beta+\delta+2}\gamma}\frac{1}{\left[\frac{k}{2ah}M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\right)+zM\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},z^2\right)\right]}=z^{\beta+\delta+1},\qquad z>0. \tag{4.81}$$

La ecuación anterior tiene a $z=\xi_0$ como solución, ya que si se reemplaza z por ξ_0 se obtiene que (4.81) es equivalente a (4.5). Como (4.81 tiene una única solución dada por ξ_h, podemos asegurar que $\xi_h=\xi_0$. Además mediante algunos cálculos algebraicos se obtiene $C_h=C_0$, y $D_h=D_0$. Por consiguiente, resulta que la solución (U_h,S_h) al problema (4.55) con datos h y θ_∞ en función de θ_0 coincide con la solución (U_0,S_0) del problema (4.1).

■

4.3.4. Comportamiento límite

Se analiza en esta sección, el comportamiento límite de la solución al problema (4.55) cuando el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en la frontera fija $x=0$, dado por h tiene a infinito.

Se define a continuación el siguiente problema que consiste en hallar la temperatura $U=U(x,t)$ y la frontera libre $S=S(t)$ de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\qquad 0<x<S(t),\quad t>0, \tag{4.82a}$$

$$U(0,t)=\theta_\infty t^{\alpha/2},\qquad t>0, \tag{4.82b}$$

$$U(S(t),t)=0,\qquad t>0, \tag{4.82c}$$

$$k\frac{\partial U}{\partial x}(S(t),t)=-\gamma S(t)^\alpha \dot{S}(t),\qquad t>0, \tag{4.82d}$$

$$S(0)=0, \tag{4.82e}$$

Como puede observarse, dicho problema corresponde al caso en que se impone una condición de temperatura caracterizada por θ_∞ en el borde fijo del material $x=0$. La solución a este problema fue dada en el Teorema 4.1, y puede obtenerse reemplazando θ_0 por θ_∞. Es decir:

$$U(x,t) = t^{\alpha/2}\left[CM\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\eta^2\right) + D\eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta^2\right)\right], \tag{4.83}$$

$$S(t) = 2a\xi\sqrt{t}, \tag{4.84}$$

donde $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ es la variable de similaridad y las constantes C y D se definen de la siguiente forma:

$$C = \theta_\infty, \qquad D = \frac{-\theta_\infty M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\xi^2\right)}{\xi M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\xi^2\right)}, \tag{4.85}$$

siendo el coeficiente adimensional ξ la única solución positiva de la siguiente ecuación

$$\frac{k\theta_\infty}{\gamma a^{\beta+\delta+2}2^{\beta+1}} f(z) = z^{\beta+\delta+1}, \qquad z>0, \tag{4.86}$$

donde f viene dada por (3.34), es decir

$$f(z) = \frac{1}{zM\left(\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{3}{2},z^2\right)}, \qquad z>0. \tag{4.87}$$

Una vez definido el problema (4.82), se enuncia el siguiente teorema de convergencia.

Teorema 4.6. *Sean β y δ constantes reales que verifican $\beta \geq \text{máx}(\delta,-1-\delta)$, y $\alpha = \beta-\delta$. Entonces, el problema (4.55) converge al problema (4.82) cuando $h\to\infty$. En este contexto, por "convergencia"se entenderá que:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to+\infty} \xi_h & = \xi, \\ \lim\limits_{h\to+\infty} S_h(t) & = S(t), \qquad \forall t>0, \\ \lim\limits_{h\to+\infty} U_h(x,t) & = U(x,t), \quad \forall t>0,\ 0<x<S(t). \end{cases}$$

Demostración. La solución al problema con condición convectiva en el borde fijo (4.55) está caracterizada por un coeficiente adimensional ξ_h, el cual depende del parámetro h, y está definido como única solución de la ecuación (4.68), i.e

$$f_h(z) = \frac{2^{\beta+1} z^{\beta+\delta+1}}{\text{Ste}}, \qquad z > 0$$

siendo f_h dado por (4.61).

Por otro lado, la frontera libre S del problema (4.82) se caracteriza por un coeficiente adimensional ξ el cual se define como la única solución a la ecuación (4.86), la cual puede reescribirse como

$$f(z) = \frac{2^{\beta+1} z^{\beta+\delta+1}}{\text{Ste}}, \qquad z > 0,$$

siendo f dada por (4.87).

Se sabe que

$$f(z) - f_h(z) = \frac{k}{2ah} \frac{f(z) M\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right)}{\left[\frac{1}{f(z)} + \frac{k}{2ah} M\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right)\right]} > 0, \qquad z \geq 0,$$

y que f_h y f son funciones estrictamente decrecientes en la variable z que decrecen de $\frac{2ah}{k}$ a 0 y de $+\infty$ a 0, respectivamente.

Entonces, por definición se tiene que $0 < \xi_h < \xi$, para cualquier $h > 0$. Además como $\{f_h\}_h$ es una sucesión creciente de funciones, se puede asegurar que existe el límite de ξ_h cuando h tiende a infinito. Como $f_h(z) \uparrow f(z)$, $\forall z > 0$, resulta que $\xi_h \uparrow \xi$. Surge de manera inmediata que $S_h(t) \uparrow S(t)$ cuando $h \to \infty$, para cualquier $t > 0$. Luego, fijado $0 < x < S(t)$, existirá $h^* = h^*(x)$ tal que $0 < x < S_h(t)$ para cualquier $h > h^*$. Trabajando algebráicamente se demuestra que $C_h \to C$ y $D_h \to D$ cuando $h \to \infty$, de donde surge de manera inmediata que $U_h(x,t) \to U(x,t)$, para cada $t > 0$ y $0 < x < S(t)$. Es decir, se demuestra convergencia puntual.

■

Capítulo 5

Soluciones aproximadas para problemas de Stefan a una fase con calor latente dependiente de la posición

En este capítulo se estudian diferentes aproximaciones para los problemas (P) y (P_h) definidos por (3.49) y (3.1), respectivamente. Recordemos que el problema (P) consiste en hallar la temperatura $T = T(x,t)$ y la frontera libre $s = s(t)$ que verifiquen las siguientes condiciones

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{5.1a}$$

$$T(0,t) = \theta_\infty t^{\alpha/2} \qquad t > 0, \tag{5.1b}$$

$$T(s(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{5.1c}$$

$$k\frac{\partial T}{\partial x}(s(t),t) = -\gamma s(t)^\alpha \dot{s}(t), \qquad t > 0, \tag{5.1d}$$

$$s(0) = 0, \tag{5.1e}$$

mientras que (P_h) consiste en hallar el par (T_h, s_h) que verifiquen (5.1a), (5.1c)-(5.1e), reemplazando la condición de tipo Dirichlet (5.1b) por la siguiente condición convectiva

$$k\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \frac{h}{\sqrt{t}}\left[T(0,t) - \theta_\infty t^{\alpha/2}\right], \qquad t > 0. \tag{5.1b*}$$

En el Capítulo 3 se explicitaron los coeficientes físicos involucrados y se dieron las soluciones exactas de dichos problemas.

El principal aspecto de este capítulo radicará en la posibilidad de comparar las aproximaciones que se obtendrán a partir del método de balance integral clásico, el método de balance integral modificado [25] y el método de balance integral refinado [26], con las soluciones exactas correspondientes.

El método de balance integral introducido en [24] es un conocido método de aproximación de solución a problemas de Stefan, el cual transforma la ecuación del calor, en una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo, asumiendo un perfil cuadrático en el espacio para la temperatura. Para dichos perfiles, diferenes variantes a este método han sido establecidos en [25].

A continuación se describirán detalladamente los métodos aproximados a utilizar.

5.1. Métodos de balance integral y variantes

Como uno de los mecanismos de conducción del calor es la difusión, la excitación en el borde fijo $x = 0$ (por ejemplo, una temperatura, un flujo de calor, una condición convectiva) no se propaga inmediatamente a todo el material semi-infinito $x > 0$ sino que su efecto se percibe en un intervalo acotado $[0, \delta(t)]$ (para cada instante de tiempo $t > 0$) fuera del cual la temperatura permanece igual a la temperatura inicial. El método del balance integral calórico [24] postula la existencia de una función $\delta = \delta(t)$ que mide la profundidad de la capa térmica. En los problemas de cambio de fase se toma la capa térmica como la frontera libre, es decir $\delta(t) = s(t)$.

El método de balance integral clásico introducido en [24] para resolver problemas que involucran un cambio de fase consiste en transformar la ecuación del calor (5.1a) en una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo mediante: asumir un perfil de temperatura adecuado consistente con las condiciones de frontera, integrar (5.1a) con respecto a la variable espacial en el intervalo $(0, s(t))$, y sustituir la condición de Stefan (5.1d) por una nueva ecuación obtenida a partir de la temperatura de cambio de fase (5.1c). Es decir, si se deriva respecto del tiempo a la condición (5.1c), y se considera la ecuación del calor (5.1a) se obtiene

$$\frac{\partial T}{\partial x}(s(t),t)\dot{s}(t) + a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(s(t),t) = 0. \tag{5.2}$$

Despejando $\dot{s}$ y reemplazándola en la condición de tipo Stefan (5.1d) resulta

$$\frac{k}{\gamma s^{\alpha}(t)}\left[\frac{\partial T}{\partial x}(s(t),t)\right]^2 = a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(s(t),t). \tag{5.1d*}$$

Esta nueva condición sustituirá a la condición de Stefan en el problema aproximado obtenido a partir del método de balance integral clásico.

Por otra parte utilizando la ecuación (5.1a) y la condición (5.1c) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} T(x,t)dx &= \int_0^{s(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t)dx + T(s(t),t)\dot{s}(t) \\
&= \int_0^{s(t)} a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)dx = a^2\left[\frac{\partial T}{\partial x}(s(t),t) - \frac{\partial T}{\partial x}(0,t)\right].
\end{aligned}$$

Utilizando la condición (5.1d) resulta

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} T(x,t)dx = -a^2\left[\frac{\gamma}{k}s^{\alpha}(t)\dot{s}(t) + \frac{\partial T}{\partial x}(0,t)\right]. \tag{5.1a*}$$

El **método de balance integral clásico**, introducido en [24] propone aproximar la solución del problema (P) mediante la resolución de un problema aproximado que surge de reemplazar la ecuación del calor (5.1a) por (5.1a*) y la condición de Stefan (5.1d) por (5.1d*) manteniendo el resto de las condiciones del problema (P) iguales. Se propone entonces el problema gobernado por (5.1a*), (5.1b),(5.1c), (5.1d*) y (5.1e).

En [25], se propone una **variante al método de balance integral clásico**, el cual consiste en resolver un problema en el que sólo se reemplaza la ecuación del calor (5.1a) por la del balance integral (5.1a*), manteniendo el resto de las condiciones de (P) iguales. Es decir, se propone el siguiente problema aproximado gobernado por (5.1a*), (5.1b)-(5.1e).

Por otra parte, a partir de la ecuación del calor (5.1a), y la condición (5.1c) se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^{s(t)}\int_0^x \frac{\partial T}{\partial t}(z,t)dzdx &= \int_0^{s(t)}\int_0^x a^2\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z,t)dz\,dx\\ &= \int_0^{s(t)} a^2\left[\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)-\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)\right]dx\\ &= a^2\left[T(s(t),t)-T(0,t)-\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)s(t)\right], \end{aligned}\tag{5.3}$$

es decir

$$\int_0^{s(t)}\int_0^x \frac{\partial T}{\partial t}(z,t)dzdx = -a^2\left[T(0,t)+\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)s(t)\right]. \tag{5.1a†}$$

El **método de balance integral refinado** introducido en [26] propone aproximar la solución del problema (P), mediante la resolución del problema aproximado gobernado por (5.1a†), (5.1b)-(5.1e). Es decir, se reemplaza la ecuación (5.1a) por (5.1a†).

Para la resolución de los problemas aproximados que acaban de presentarse, se propone un **perfil cuadrático en el espacio para la temperatura**:

$$\widetilde{T}(x,t) = \widetilde{A}\theta_\infty\left(1-\frac{x}{\widetilde{s}(t)}\right)+\widetilde{B}\theta_\infty\left(1-\frac{x}{\widetilde{s}(t)}\right)^2, \tag{5.4}$$

donde $\widetilde{T}$ y $\widetilde{s}$ serán aproximaciones de T y s respectivamente.

Cabe mencionar que para obtener aproximaciones al problema (P$_h$), bastará considerar los mismos problemas aproximados planteados para (P), cambiando la condición en el borde fijo (5.1b) por (5.1b*).

5.2. Aproximaciones al problema de Stefan a una fase con condición de temperatura en el borde fijo

Previo a presentar las diferentes aproximaciones para el problema (P), se recuerda que su solución fue dada en (3.50)-(3.53). Siendo el coeficiente de difusión $a^2 = \dfrac{k}{\rho c}$, e introduciendo el siguiente parámetro adimensional

$$\text{Ste} = \frac{k\theta_\infty}{\gamma a^{\alpha+2}} \tag{5.5}$$

al cual llamamos número de Stefan generalizado, dicha solución puede reescribirse de la siguiente manera

$$T(x,t) = t^{\alpha/2}\left[AM\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\eta^2\right) + B\eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta^2\right)\right], \tag{5.6}$$

$$s(t) = 2a\nu\sqrt{t}, \tag{5.7}$$

donde $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ y

$$A = \theta_\infty, \qquad B = \frac{-\theta_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu^2\right)}{\nu M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu^2\right)}, \tag{5.8}$$

siendo ν la única solución positiva de la siguiente ecuación

$$\frac{\text{Ste}}{2^{\alpha+1}} f(z) = z^{\alpha+1}, \qquad z > 0, \tag{5.9}$$

con $f(z) = \dfrac{1}{zM\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},z^2\right)}$.

5.2.1. Solución aproximada a través del método de balance integral clásico

El método de balance integral clásico postula aproximar la solución del problema (P) mediante la resolución de un problema aproximado, al cual denotamos con (P_1). Dicho problema consiste en hallar la temperatura $T_1 = T_1(x,t)$ y la frontera libre $s_1 = s_1(t)$ de manera que se satisfagan: (5.1a*), (5.1b),(5.1c), (5.1d*) y (5.1e). Es decir:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{s_1(t)} T_1(x,t)dx = -a^2\left[\frac{\gamma}{k}s_1^\alpha(t)\dot{s}_1(t) + \frac{\partial T_1}{\partial x}(0,t)\right], \quad 0 < x < s_1(t), \quad t>0, \tag{5.10a}$$

$$T_1(0,t) = \theta_\infty t^{\alpha/2} \qquad t>0, \tag{5.10b}$$

$$T_1(s_1(t),t) = 0, \qquad t>0, \tag{5.10c}$$

$$\frac{k}{\gamma s_1^\alpha(t)}\left[\frac{\partial T_1}{\partial x}(s_1(t),t)\right]^2 = a^2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}(s_1(t),t), \qquad t>0, \tag{5.10d}$$

$$s_1(0) = 0, \tag{5.10e}$$

asumiendo que T_1 adopta un perfil cuadrático en el espacio

$$T_1(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_1\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_1(t)}\right) + B_1\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_1(t)}\right)^2\right] \tag{5.11}$$

donde A_1 y B_1 serán constantes a determinar.

Teorema 5.1. *Si* $0 < \mathrm{Ste} < 1$*, existe al menos una solución al problema (5.10), al cual denotamos con* (P_1)*, que está dada por*

$$T_1(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_1\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_1(t)}\right) + B_1\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_1(t)}\right)^2\right], \tag{5.12}$$

$$s_1(t) = 2a\nu_1\sqrt{t}, \tag{5.13}$$

donde las constantes A_1, B_1 *son:*

$$A_1 = \frac{-2\left[3\ 2^\alpha\nu_1^{\alpha+2} + \mathrm{Ste}\left((-3+(1+\alpha)\nu_1^2\right)\right]}{\mathrm{Ste}\left(3+(1+\alpha)\nu_1^2\right)}, \tag{5.14}$$

$$B_1 = \frac{3\left[2^{\alpha+1}\nu_1^{\alpha+2} + \mathrm{Ste}\left(-1+(1+\alpha)\nu_1^2\right)\right]}{\mathrm{Ste}\left(3+(1+\alpha)\nu_1^2\right)}, \tag{5.15}$$

y ν_1 *es una solución de la ecuación siguiente:*

$$z^{2\alpha+4}(-3)\ 2^{2\alpha+1}(\alpha-2) + z^{2\alpha+2}(-9)\ 2^{2\alpha+1} + z^{4+\alpha}(-3)\ \ 2^\alpha(\alpha-3)(\alpha+1)\mathrm{Ste}$$

$$+ z^{\alpha+2}(-3)\ 2^{\alpha+1}(\alpha+7)\mathrm{Ste} + z^{\alpha}9\ 2^{\alpha}\mathrm{Ste} + z^4 2(\alpha+1)^2\mathrm{Ste}^2$$

$$+ z^2(-12)(\alpha+1)\mathrm{Ste}^2 + 18\mathrm{Ste}^2 = 0, \qquad z > 0. \tag{5.16}$$

Demostración. Primero se observa que adoptar el perfil dado por (5.11), hace que se verifique automáticamente la condición (5.10c).

Por la condición de temperatura impuesta en el borde fijo (5.10b) se tiene que

$$A_1 + B_1 = 1 \tag{5.17}$$

De acuerdo al perfil adoptado se verifica

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}(x,t) = -t^{\alpha/2}\theta_\infty \left[\frac{A_1}{s_1(t)} + \frac{2B_1}{s_1(t)}\left(1 - \frac{x}{s_1(t)}\right)\right],$$

y

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}(x,t) = t^{\alpha/2}\theta_\infty \frac{2B_1}{s_1^2(t)}.$$

En virtud de la condición (5.10d) se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{k}{\gamma s_1^\alpha(t)} t^\alpha \theta_\infty^2 \frac{A_1^2}{s_1^2(t)} = a^2 t^{\alpha/2}\theta_\infty \frac{2B_1}{s_1^2(t)}.$$

De donde surge que

$$s_1(t) = \left(\frac{A_1^2}{2B_1}\frac{k\theta_\infty}{\gamma a^2}\right)^{1/\alpha}\sqrt{t}.$$

Definiendo ν_1 de manera que $2a\nu_1 = \left(\frac{A_1^2}{2B_1}\frac{k\theta_\infty}{\gamma a^2}\right)^{1/\alpha}$, resulta

$$s_1(t) = 2a\nu_1\sqrt{t} \tag{5.18}$$

donde ν_1 es una incógnita que se relaciona con A_1 y B_1 de la siguiente manera

$$A_1^2 = \frac{2^{\alpha+1}\nu_1^\alpha}{\mathrm{Ste}} B_1. \tag{5.19}$$

De la ecuación (5.10a) y el siguiente cálculo

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s_1(t)} T_1(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_0^{s_1(t)} t^{\alpha/2}\left[A_1\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_1(t)}\right)+B_1\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_1(t)}\right)^2\right]dx$$
$$= \theta_\infty\left(\frac{A_1}{2}+\frac{B_1}{3}\right)\left(\tfrac{\alpha}{2}t^{\alpha/2-1}s_1(t)+t^{\alpha/2}\dot{s}_1(t)\right),$$

surge que

$$\theta_\infty\left(\tfrac{A_1}{2}+\tfrac{B_1}{3}\right)\left(\tfrac{\alpha}{2}t^{\alpha/2-1}s_1(t)+t^{\alpha/2}\dot{s}_1(t)\right) = -a^2\left[\frac{\gamma}{k}s_1^\alpha(t)\dot{s}_1(t)+t^{\alpha/2}\theta_\infty\tfrac{(A_1+2B_1)}{s_1(t)}\right]. \quad (5.20)$$

De acuerdo a (5.18), resulta

$$A_1\left((\alpha+1)\nu_1^2-1\right)+B_1\left(\tfrac{2}{3}(\alpha+1)\nu_1^2-2\right) = \frac{-2^{\alpha+1}\nu_1^{\alpha+2}}{\text{Ste}}. \quad (5.21)$$

De este modo, se obtienen tres ecuaciones (5.17), (5.19) y (5.21), que relacionan a los coeficientes desconocidos A_1, B_1 y ν_1.

De (5.17) y (5.21) se obtiene, a través de la regla de Cramer, que A_1 y B_1 están dados en función de ν_1 por (5.14), (5.15), respectivamente.

Luego, de la ecuación (5.19) surge que ν_1 debe ser solución positiva de la ecuación (5.16).

Para la existencia de solución al problema (P$_1$) resta probar que la función $w_1 = w_1(z)$, definida como el lado izquierdo de (5.16), tiene al menos una raíz positiva. Esto se prueba fácilmente evaluando $w_1(0) = 18\text{Ste}^2 > 0$ y

$$w_1(1) = -\alpha^2(3\ 2^\alpha - 2\text{Ste})\text{Ste} - 2\alpha(3\ 4^\alpha + 4\text{Ste}^2) - 2(3\ 4^\alpha + 3\ 2^{\alpha+2}\text{Ste} - 4\text{Ste}^2)$$

Al suponer Ste < 1, resulta que $3\ 2^\alpha - 2\text{Ste} > 0$, y

$$3\ 4^\alpha + 3\ 2^{\alpha+2}\text{Ste} - 4\text{Ste}^2 > 2^{\alpha+2}\text{Ste} - 4\text{Ste}^2 = 4\text{Ste}(3\ 2^\alpha - \text{Ste}) > 0.$$

De donde se obtiene $w_1(1) < 0$. Por ende, se puede asegurar que existe al menos una solución de la ecuación (5.16) en el intervalo $(0, 1)$. ■

Con el fin de testear la exactitud del método de balance integral clásico, se comparan gráficamente, para valores de Ste < 1, el coeficiente ν_1 que caracteriza a la frontera libre aproximada s_1 con el coeficiente ν que caracteriza a la frontera libre s, para distintos valores de la potencia α que define al calor latente (ver Figura 5.1).

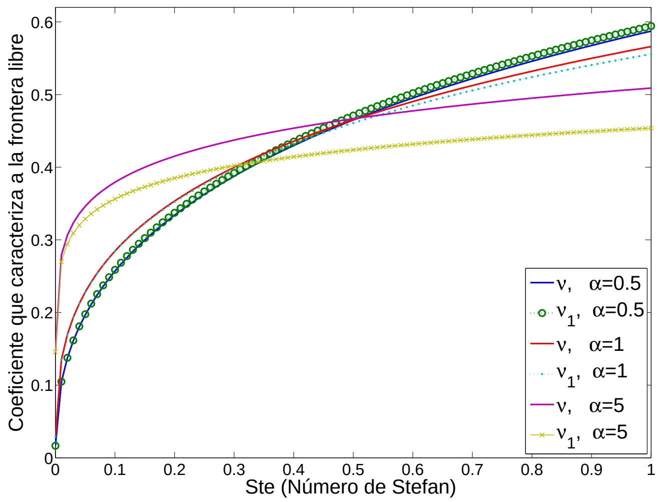

Figura 5.1: Comparación de ν y ν_1 para distintos valores de α

Cabe mencionar, que se considera Ste < 1 no sólo por la hipótesis del Teorema 5.1, sino también porque generalmente los materiales de cambio de fase bajo temperaturas adecuadas (realistas) presentan un número de Stefan menor a 1 (ver [65]).

5.2.2. Solución aproximada a través del método de balance integral modificado

El método de balance integral modificado postula aproximar la solución del problema (P) mediante la resolución de un problema aproximado al cual denotamos (P$_2$). Dicho problema consiste en hallar la temperatura $T_2 = T_2(x,t)$ y la frontera libre $s_2 = s_2(t)$ de manera que se satisfagan: (5.1a*), (5.1b)-(5.1e). Es decir:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{s_2(t)} T_2(x,t)dx = -a^2\left[\frac{\gamma}{k}s_2^{\alpha}(t)\dot{s}_2(t)+\frac{\partial T_2}{\partial x}(0,t)\right], \quad 0<x<s_2(t), \quad t>0, \tag{5.22a}$$

$$T_2(0,t)=\theta_\infty t^{\alpha/2} \qquad t>0, \tag{5.22b}$$

$$T_2(s_2(t),t)=0, \qquad t>0, \tag{5.22c}$$

$$k\frac{\partial T_2}{\partial x}(s_2(t),t)=-\gamma s_2(t)^{\alpha}\dot{s}_2(t), \qquad t>0, \tag{5.22d}$$

$$s_2(0)=0, \tag{5.22e}$$

asumiendo que T_2 adopta un perfil cuadrático en el espacio como en (5.4).

Teorema 5.2. *La solución al problema (5.22), al cual llamamos* (P_2)*, está dada por:*

$$T_2(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_2\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_2(t)}\right)+B_2\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_2(t)}\right)^2\right], \tag{5.23}$$

$$s_2(t) = 2a\nu_2\sqrt{t}, \tag{5.24}$$

donde las constantes A_2, B_2 *son:*

$$A_2=\frac{6\mathrm{Ste}-2\mathrm{Ste}\,\nu_2^2(\alpha+1)-3\,2^{\alpha+1}\nu_2^{\alpha+2}}{\mathrm{Ste}\,\left(\nu_2^2(\alpha+1)+3\right)}, \tag{5.25}$$

$$B_2=\frac{-3\mathrm{Ste}\,+3\mathrm{Ste}\,\nu_2^2(\alpha+1)+3\,2^{\alpha+1}\nu_2^{\alpha+2}}{\mathrm{Ste}\,\left(\nu_2^2(\alpha+1)+3\right)}, \tag{5.26}$$

y donde ν_2 *es la única solución de*

$$z^{\alpha+4}2^{\alpha}(\alpha+1)+z^{\alpha+2}3\,2^{\alpha+1}+z^2\mathrm{Ste}(\alpha+1)-3\mathrm{Ste}=0, \qquad z>0. \tag{5.27}$$

Demostración. Se observa que la condición (5.22c) se verifica automáticamente por el perfil de temperatura elegido.

De la condición de Stefan (5.22d) y (5.23) se tiene que

$$-kt^{\alpha/2}\theta_\infty\frac{A_2}{s_2(t)}=-\gamma s_2^{\alpha}(t)\dot{s}_2(t). \tag{5.28}$$

De allí surge que

$$s_2(t) = \left(\frac{(\alpha+2)}{(\frac{\alpha}{2}+1)} \frac{k\theta_\infty}{\gamma} A_2 \right)^{1/(\alpha+2)} \sqrt{t}. \tag{5.29}$$

Si se introduce la variable ν_2 de manera que $2a\nu_2 = \left(\frac{(\alpha+2)}{(\frac{\alpha}{2}+1)} \frac{k\theta_\infty}{\gamma} A_2 \right)^{1/(\alpha+2)}$, la frontera libre se expresa de la forma

$$s_2(t) = 2a\,\nu_2\sqrt{t}, \tag{5.30}$$

donde se verifica la siguiente relación

$$A_2 = \frac{2^{\alpha+1}\nu_2^{\alpha+2}}{\text{Ste}}. \tag{5.31}$$

De la condición en el borde fijo (5.22b) surge que

$$A_2 + B_2 = 1. \tag{5.32}$$

Por otra parte, en virtud de (5.22a) resulta

$$A_2\left((\alpha+1)\nu_2^2 - 1\right) + B_2\left(\tfrac{2}{3}(\alpha+1)\nu_2^2 - 2\right) = \frac{-2^{\alpha+1}\nu_2^{\alpha+2}}{\text{Ste}}. \tag{5.33}$$

De las ecuaciones (5.31), (5.32) y (5.33) surge que A_2 y B_2 se escriben en función de ν_2 a través de (5.25) y (5.26), respectivamente. Así como también que ν_2 debe ser solución de la ecuación (5.27). Para que el teorema quede demostrado, resta probar que la ecuación (5.27) tiene una única solución positiva. Esto es equivalente a probar que la función $w_2 = w_2(z)$ tiene una única raíz real positiva, siendo w_2 el lado izquierdo de (5.27). Ahora bien, eso resulta trivial ya que

$$w_2(0) = -3\text{Ste} < 0, \qquad w_2(+\infty) = +\infty, \qquad \frac{dw_2}{dz}(z) > 0, \quad \forall z > 0.$$

■

En la Figura 5.2 se comparan gráficamente, para valores de Ste < 1, el coeficiente ν_2

que caracteriza a la frontera libre aproximada s_2 con el coeficiente ν que caracteriza a la frontera libre s, para distintos valores de la potencia α que define al calor latente.

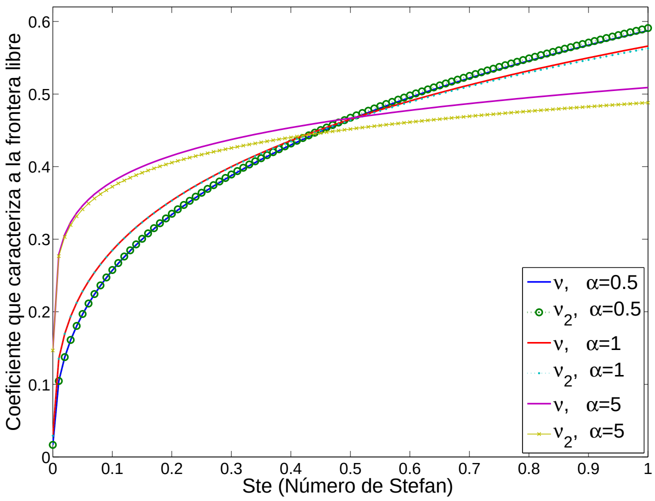

Figura 5.2: Comparación de ν y ν_2 para distintos valores de α

5.2.3. Solución aproximada a través del método de balance integral refinado

El método de balance integral modificado postula aproximar la solución del problema (P) mediante la resolución de un problema aproximado al cual denotamos (P_3). Dicho problema consiste en hallar la temperatura $T_3 = T_3(x,t)$ y la frontera libre $s_3 = s_3(t)$ de manera que se satisfagan: (5.1a†), (5.1b)-(5.1e). Es decir:

$$\int_0^{s_3(t)}\int_0^x \frac{\partial T_3}{\partial t}(z,t)dzdx = -a^2\left[T_3(0,t)+\frac{\partial T_3}{\partial x}(0,t)s_3(t)\right], \quad 0<x<s_3(t), t>0, \quad (5.34a)$$

$$T_3(0,t) = \theta_\infty t^{\alpha/2} \qquad t>0, \quad (5.34b)$$

$$T_3(s_3(t),t) = 0, \qquad t>0, \quad (5.34c)$$

$$k\frac{\partial T_3}{\partial x}(s_3(t),t) = -\gamma s_3(t)^\alpha \dot{s}_3(t), \qquad t>0, \quad (5.34d)$$

$$s_3(0) = 0, \qquad (5.34e)$$

asumiendo que T_3 adopta un perfil cuadrático en el espacio como en (5.4).

Teorema 5.3. *La solución al problema (5.34), al cual llamamos* (P_3)*, está dada por:*

$$T_3(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_3\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_3(t)}\right)+B_3\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_3(t)}\right)^2\right], \tag{5.35}$$

$$s_3(t) = 2a\nu_3\sqrt{t}, \tag{5.36}$$

donde las constantes A_3, B_3 *son:*

$$A_3 = \frac{6\mathrm{Ste} - 2\mathrm{Ste}\,\nu_3^2(\alpha+1) - 3\;2^{\alpha+1}\nu_3^{\alpha+2}}{\mathrm{Ste}\;\left(\nu_3^2(\alpha+1)+3\right)}, \tag{5.37}$$

$$B_3 = \frac{-3\mathrm{Ste}\; + 3\mathrm{Ste}\,\nu_3^2(\alpha+1) + 3\;2^{\alpha+1}\nu_3^{\alpha+2}}{\mathrm{Ste}\;\left(\nu_3^2(\alpha+1)+3\right)}, \tag{5.38}$$

y donde ν_3 *es la única solución de*

$$z^{\alpha+4}2^{\alpha+1}\alpha + z^{\alpha+2}3\;2^{\alpha+2} + z^2\mathrm{Ste}(2+3\alpha) - 6\mathrm{Ste} = 0, \qquad z>0. \tag{5.39}$$

Demostración. La demostración resulta análoga a la del Teorema 5.2. Basta observar que la única diferencia radica en la ecuación (5.34a), la cual resulta equivalente a

$$\nu_3^2\left[A_3\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\alpha\right)+B_3\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{\alpha}{2}\right)\right] = B_3 \tag{5.40}$$

■

En la Figura 5.3 se comparan gráficamente, para valores de $\mathrm{Ste} < 1$, el coeficiente ν_3 que caracteriza a la frontera libre aproximada s_3 con el coeficiente ν que caracteriza a la frontera libre s, para distintos valores de la potencia α que define al calor latente.

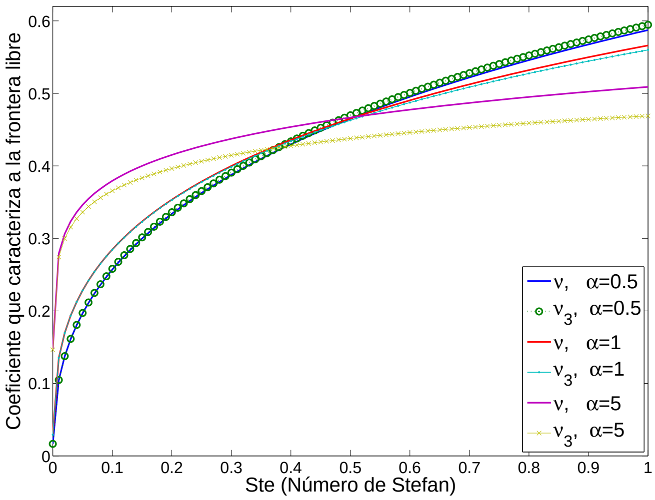

Figura 5.3: Comparación de ν y ν_3 para distintos valores de α

5.2.4. Comparaciones entre soluciones aproximadas

En las secciones anteriores se han aplicado tres métodos diferentes para aproximar la solución al problema de Stefan (P), con calor latente variable, dependiente de una potencia de la posición.

Para cada uno de estos métodos, es decir, para cada problema (P$_i$), $i = 1, 2, 3$ se han comparado gráficamente los coeficientes adimensionales ν_i que caracterizan a la frontera libre aproximada s_i, con el coeficiente ν que caracteriza a la frontera exacta s.

El objetivo será entonces, para diferentes valores del número de Stefan, comparar numéricamente el calor de ν dado por (5.9) con los valores aproximados ν_1, ν_2 y ν_3 dados por (5.16), (5.27) y (5.39), respectivamente.

Para que las comparaciones sean más representativas, en la Tablas 5.1-5.3 se muestran los valores del coeficiente exacto ν, del aproximado ν_i y el error porcentual cometido en cada caso $E(\nu_i) = 100\left|\frac{\nu-\nu_i}{\nu}\right|$, $i = 1, 2, 3$ para diferentes valores de Ste y α.

Se observa a partir de las tablas que para $\alpha = 0{,}5$, los errores cometidos por los métodos son menores que para $\alpha = 0$ o $\alpha = 5$. En todos los casos, el método que mejor aproxima a la frontera libre exacta del problema (P) es el dado por el método de balance integral modificado (P$_2$).

Tabla 5.1: Coeficientes adimensionales de las fronteras libres y sus errores relativos respecto de la solución exacta fijando $\alpha = 0$.

Ste	ν	ν_1	$E_{\text{rel}}(\nu_1)$	ν_2	$E_{\text{rel}}(\nu_2)$	ν_3	$E_{\text{rel}}(\nu_3)$
0.1	0.2200	0.2232	1.4530 %	0.2209	0.3947 %	0.2218	0.7954 %
0.2	0.3064	0.3143	2.5729 %	0.3087	0.7499 %	0.3111	1.5213 %
0.3	0.3699	0.3827	3.4575 %	0.3738	1.0707 %	0.3780	2.1856 %
0.4	0.4212	0.4388	4.1687 %	0.4270	1.3618 %	0.4330	2.7953 %
0.5	0.4648	0.4869	4.7478 %	0.4723	1.6266 %	0.4804	3.3561 %
0.6	0.5028	0.5290	5.2236 %	0.5122	1.8683 %	0.5222	3.8729 %
0.7	0.5365	0.5666	5.6173 %	0.5477	2.0895 %	0.5599	4.3501 %
0.8	0.5669	0.6006	5.9443 %	0.5799	2.2923 %	0.5941	4.7913 %
0.9	0.5946	0.6316	6.2165 %	0.6094	2.4786 %	0.6255	5.1999 %
1.0	0.6201	0.6600	6.4432 %	0.6365	2.6500 %	0.6547	5.5786 %

Tabla 5.2: Coeficientes adimensionales de las fronteras libres y sus errores relativos respecto de la solución exacta, fijando $\alpha = 0{,}5$.

Ste	ν	ν_1	$E_{\text{rel}}(\nu_1)$	ν_2	$E_{\text{rel}}(\nu_2)$	ν_3	$E_{\text{rel}}(\nu_3)$
0.1	0.2569	0.2587	0.6956 %	0.2574	0.2001 %	0.2580	0.4012 %
0.2	0.3339	0.3372	0.9999 %	0.3349	0.3147 %	0.3360	0.6321 %
0.3	0.3876	0.3921	1.1718 %	0.3891	0.3974 %	0.3907	0.7995 %
0.4	0.4298	0.4353	1.2678 %	0.4318	0.4596 %	0.4338	0.9260 %
0.5	0.4650	0.4711	1.3143 %	0.4674	0.5067 %	0.4698	1.0225 %
0.6	0.4953	0.5018	1.3264 %	0.4980	0.5423 %	0.5007	1.0959 %
0.7	0.5220	0.5288	1.3133 %	0.5249	0.5684 %	0.5280	1.1508 %
0.8	0.5458	0.5528	1.2814 %	0.5491	0.5869 %	0.5523	1.1905 %
0.9	0.5675	0.5745	1.2352 %	0.5709	0.5989 %	0.5744	1.2173 %
1.0	0.5873	0.5943	1.1777 %	0.5909	0.6054 %	0.5946	1.2334 %

Por otra parte, a partir de los resultados obtenidos en las secciones anteriores, también se compara la temperatura exacta T con la temperatura aproximada T_i, $i = 1, 2, 3$, dadas por (5.11), (5.23) y (5.35), respectivamente, fijando $\alpha = 5$, Ste $= 0{,}5$, $\theta_\infty = 30, a = 1$

Tabla 5.3: Coeficientes adimensionales de las fronteras libres y sus errores relativos respecto de la solución exacta, fijando $\alpha = 5$.

Ste	ν	ν_1	$E_{\mathrm{rel}}(\nu_1)$	ν_2	$E_{\mathrm{rel}}(\nu_2)$	ν_3	$E_{\mathrm{rel}}(\nu_3)$
0.1	0.3793	0.3563	6.0700 %	0.3723	1.8469 %	0.3656	3.6135 %
0.2	0.4151	0.3849	7.2853 %	0.4055	2.3333 %	0.3963	4.5496 %
0.3	0.4374	0.4020	8.0816 %	0.4256	2.6810 %	0.4145	5.2154 %
0.4	0.4537	0.4143	8.6859 %	0.4403	2.9615 %	0.4276	5.7505 %
0.5	0.4667	0.4239	9.1776 %	0.4518	3.2010 %	0.4377	6.2058 %
0.6	0.4775	0.4317	9.5943 %	0.4612	3.4122 %	0.4460	6.6060 %
0.7	0.4869	0.4384	9.9572 %	0.4693	3.6025 %	0.4529	6.9656 %
0.8	0.4950	0.4442	10.2795 %	0.4763	3.7766 %	0.4589	7.2936 %
0.9	0.5023	0.4492	10.5699 %	0.4826	3.9376 %	0.4642	7.5962 %
1.0	0.5090	0.4538	10.8345 %	0.4881	4.0880 %	0.4689	7.8780 %

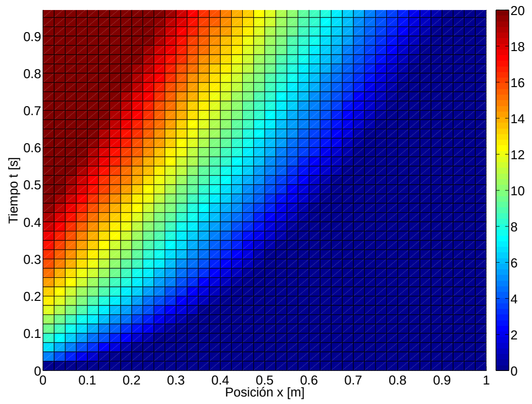

Figura 5.4: Mapa de colores para T

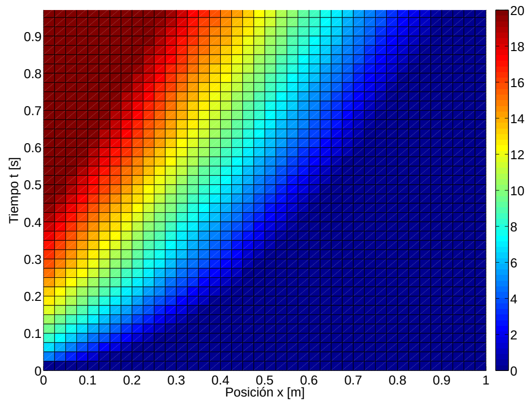

Figura 5.5: Mapa de colores para T_1

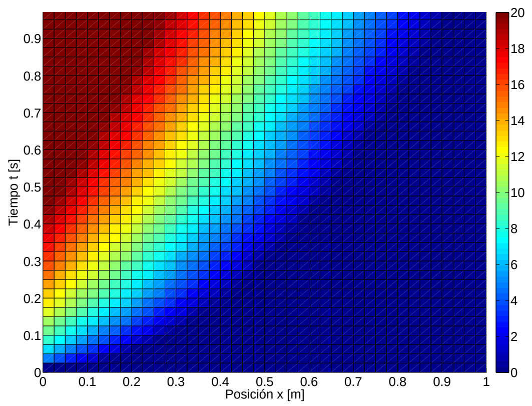

Figura 5.6: Mapa de colores para T_2

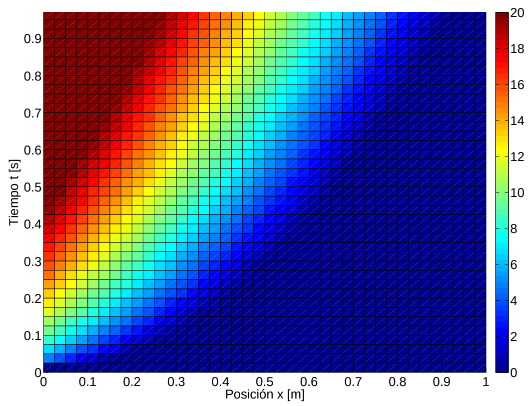

Figura 5.7: Mapa de colores para T_3

5.3. Aproximaciones al problema de Stefan a una fase con condición convectiva en el borde fijo

La solución al problema (P_h), dada en el Teorema 3.1, se reescribe como

$$T_h(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_h M\left(-\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{1}{2},-\eta^2\right) + B_h \eta M\left(-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\eta^2\right)\right], \tag{5.41}$$

$$s_h(t) = 2a\nu_h\sqrt{t}, \tag{5.42}$$

donde $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ y

$$A_h = \frac{-\nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu_h^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)} B_h, \tag{5.43}$$

$$B_h = \frac{-\theta_\infty M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right)}{\left[\frac{1}{2\mathrm{Bi}} M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu_h^2\right) + \nu_h M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu_h^2\right)\right]}, \tag{5.44}$$

siendo ν_h la única solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{\mathrm{Ste}}{2^{\alpha+1}} \frac{1}{\left[\frac{1}{f(z)} + \frac{1}{2\mathrm{Bi}} M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\right)\right]} = z^{\alpha+1}, \qquad z>0, \tag{5.45}$$

donde $\mathrm{Ste} = \frac{\theta_\infty k}{\gamma a^{\alpha+2}}$, $\mathrm{Bi} = \frac{hk}{a}$ y

$$f(z) = \frac{1}{zM\left(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2},z^2\right)}.$$

5.3.1. Solución aproximada a través del método de balance integral clásico

El método de balance integral clásico postula aproximar la solución del problema (P_h) mediante la resolución de un problema aproximado al cual llamaremos (P_{1h}). Dicho problema consiste en hallar la temperatura $T_{1h} = T_{1h}(x,t)$ y la frontera libre $s_{1h} = s_{1h}(t)$ de manera que se satisfagan: (5.1a*), (5.1b*),(5.1c), (5.1d*) y (5.1e). Es decir:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{s_{1h}(t)} T_{1h}(x,t)dx = -a^2\left[\frac{\gamma}{k}s_{1h}^{\alpha}(t)\dot{s}_{1h}(t)+\frac{\partial T_{1h}}{\partial x}(0,t)\right], \quad 0<x<s_{1h}(t), \quad t>0, \tag{5.46a}$$

$$\frac{\partial T_{1h}}{\partial x}(0,t) = \frac{h}{\sqrt{t}}\left[T_{1h}(0,t)-\theta_\infty t^{\alpha/2}\right] \qquad t>0, \tag{5.46b}$$

$$T_{1h}(s_{1h}(t),t) = 0, \qquad t>0, \tag{5.46c}$$

$$\frac{k}{\gamma s_{1h}^{\alpha}(t)}\left[\frac{\partial T_{1h}}{\partial x}(s_{1h}(t),t)\right]^2 = a^2\frac{\partial^2 T_{1h}}{\partial x^2}(s_{1h}(t),t), \qquad t>0, \tag{5.46d}$$

$$s_{1h}(0) = 0, \tag{5.46e}$$

Se asume que T_{1h} adopta un perfil cuadrático en el espacio

$$T_{1h}(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_{1h}\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_{1h}(t)}\right)+B_{1h}\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_{1h}(t)}\right)^2\right] \tag{5.47}$$

donde A_{1h} y B_{1h} serán constantes a determinar.

Teorema 5.4. *Si* $0<\text{Ste}<1$*,* $\alpha\geq 0$ *y* Bi *es suficientemente grande, existe al menos una solución al problema (5.46), al cual llamamos* $(\mathrm{P}_{1\mathrm{h}})$*, la cual está dada por:*

$$\begin{aligned} T_{1h}(x,t) &= t^{\alpha/2}\left[A_{1h}\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_{1h}(t)}\right)+B_{1h}\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_{1h}(t)}\right)^2\right], && (5.48)\\ s_{1h}(t) &= 2a\nu_{1h}\sqrt{t}, && (5.49)\end{aligned}$$

donde las constantes A_{1h}, B_{1h} *son:*

$$A_{1h} = \frac{6\text{Ste}-2\text{Ste}\,\nu_{1h}^2(\alpha+1)-\frac{3}{\text{Bi}}2^{\alpha+1}\nu_{1h}^{\alpha+1}-3\,2^{\alpha+1}\nu_{1h}^{\alpha+2}}{\text{Ste}\left[\nu_{1h}^2(\alpha+1)+\frac{2}{\text{Bi}}\nu_{1h}(\alpha+1)+3\right]}, \tag{5.50}$$

$$B_{1h} = \frac{-3\text{Ste}+3\text{Ste}\,\nu_{1h}^2(\alpha+1)+\frac{3}{\text{Bi}}2^{\alpha}\nu_{1h}^{\alpha+1}+3\,2^{\alpha+1}\nu_{1h}^{\alpha+2}}{\text{Ste}\left[\nu_{1h}^2(\alpha+1)+\frac{2}{\text{Bi}}\nu_{1h}(\alpha+1)+3\right]}, \tag{5.51}$$

y ν_{1h} *es solución de*

$$z^{2\alpha+4}(-3)2^{2\alpha+1}(\alpha-2)+z^{2\alpha+3}(-3)\tfrac{2^{2\alpha}}{\mathrm{Bi}}(5\alpha-7)+z^{2\alpha+2}(-3)2^{2\alpha+1}\left(\tfrac{\alpha-2}{\mathrm{Bi}^2}+3\right)$$
$$+z^{2\alpha+1}(-9)\tfrac{2^{2\alpha}}{\mathrm{Bi}}+z^{\alpha+4}(-3)2^{\alpha}\mathrm{Ste}(\alpha-3)(\alpha+1)+z^{\alpha+3}(-3)\tfrac{2^{\alpha+1}}{\mathrm{Bi}}\mathrm{Ste}(\alpha-1)(\alpha+1)$$
$$+z^{\alpha+2}(-3)2^{\alpha+1}\mathrm{Ste}(\alpha+7)+z^{\alpha+1}3\tfrac{2^{\alpha+1}}{\mathrm{Bi}}\mathrm{Ste}(\alpha-5)+z^{\alpha}9\;2^{\alpha}\mathrm{Ste}+z^{4}2\mathrm{Ste}^2(1+\alpha)^2$$
$$+z^{2}(-12)\mathrm{Ste}^2(\alpha+1)+18\mathrm{Ste}^2=0,\qquad z>0. \tag{5.52}$$

Demostración. Primero se observa que adoptar el perfil dado por (5.47), hace que se verifique automáticamente la condición (5.46c).

Además se verifica

$$\frac{\partial T_{1h}}{\partial x}(x,t)=-t^{\alpha/2}\theta_{\infty}\left[\frac{A_{1h}}{s_{1h}(t)}+\frac{2B_{1h}}{s_{1h}(t)}\left(1-\frac{x}{s_{1h}(t)}\right)\right],$$

y

$$\frac{\partial^2 T_{1h}}{\partial x^2}(x,t)=t^{\alpha/2}\theta_{\infty}\frac{2B_{1h}}{s_{1h}^2(t)}.$$

En virtud de la condición (5.46d) se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{k}{\gamma s_{1h}^{\alpha}(t)}t^{\alpha}\theta_{\infty}^2\frac{A_{1h}^2}{s_{1h}^2(t)}=a^2t^{\alpha/2}\theta_{\infty}\frac{2B_{1h}}{s_{1h}^2(t)}.$$

De donde surge que

$$s_{1h}(t)=\left(\frac{A_{1h}^2}{2B_{1h}}\frac{k\theta_{\infty}}{\gamma a^2}\right)^{1/\alpha}\sqrt{t}.$$

Definiendo ν_{1h} de manera que $2a\nu_{1h}=\left(\frac{A_{1h}^2}{2B_{1h}}\frac{k\theta_{\infty}}{\gamma a^2}\right)^{1/\alpha}$, resulta

$$s_{1h}(t)=2a\nu_{1h}\sqrt{t}, \tag{5.53}$$

donde ν_{1h} es una incógnita que se relaciona con A_{1h} y B_{1h} de la siguiente manera

$$A_{1h}^2=\frac{2^{\alpha+1}\nu_{1h}^{\alpha}}{\mathrm{Ste}}B_{1h}. \tag{5.54}$$

Luego, de la ecuación (5.46a) surge

$$A_{1h}\left[(\alpha+1)\nu_{1h}^2-1\right]+B_{1h}\left[\tfrac{2}{3}(\alpha+1)\nu_{1h}^2-2\right]=-\frac{2^{\alpha+1}}{\mathrm{Ste}}\nu_{1h}. \tag{5.55}$$

Por otra parte, de acuerdo a (5.46b) se sigue que

$$A_{1h}\left(1+2\mathrm{Bi}\,\nu_{1h}\right)+2B_{1h}\left(1+\mathrm{Bi}\,\nu_{1h}\right)=2\mathrm{Bi}\,\nu_{1h}. \tag{5.56}$$

De este modo, se obtienen tres ecuaciones (5.54), (5.55) y (5.56), que relacionan a los coeficientes desconocidos A_{1h}, B_{1h} y ν_{1h}.

De (5.55) y (5.56) se obtiene que A_{1h} y B_{1h} están dados en función de ν_{1h} por (5.50), (5.51), respectivamente.

Luego, de la ecuación (5.54) surge que ν_{1h} debe ser solución positiva de la ecuación (5.52).

Si se denota con $\omega_{1h}=\omega_{1h}(z)$ al lado izquierdo de la ecuación (5.52), se tiene que

$$\omega_{1h}(0)=18\ \mathrm{Ste}^2>0 \tag{5.57}$$

y

$$\begin{aligned}\omega_{1h}(1)=&-\alpha^2\left(3\ 2^\alpha-2\mathrm{Ste}+\frac{3}{\mathrm{Bi}}2^{\alpha+1}\right)\mathrm{Ste}-2\alpha\left(3\ 4^\alpha+4\mathrm{Ste}^2+\frac{21}{\mathrm{Bi}}2^{\alpha-1}-\frac{3}{\mathrm{Bi}}2^\alpha\mathrm{Ste}\right)\\&-2\left(3\ 4^\alpha+3\ 2^{2+\alpha}\mathrm{Ste}-4\mathrm{Ste}^2\right)+\frac{3}{\mathrm{Bi}}\left(2^{2\alpha+3}-2^{3+\alpha}\mathrm{Ste}\right).\end{aligned} \tag{5.58}$$

Se observa que para todo $0<\mathrm{Ste}<1$, $\alpha\geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}&3\ 2^\alpha-2\mathrm{Ste}+\frac{3}{\mathrm{Bi}}2^{\alpha+1}>0,\\&3\ 4^\alpha+3\ 2^{2+\alpha}\mathrm{Ste}-4\mathrm{Ste}^2>0,\end{aligned}$$

y

$$3\ 4^\alpha+4\mathrm{Ste}^2+\frac{21}{\mathrm{Bi}}2^{\alpha-1}-\frac{3}{\mathrm{Bi}}2^\alpha\mathrm{Ste}=3\ 4^\alpha+4\mathrm{Ste}^2+\frac{3}{\mathrm{Bi}}2^\alpha\left(\frac{7}{2}-\mathrm{Ste}\right)>0.$$

Como $2^{2\alpha+3} - 2^{3+\alpha}\text{Ste} = 2^\alpha 2^3(2^\alpha - \text{Ste}) > 0$, se tiene que existirá un número Bi suficientemente grande de manera que $\omega_{1h}(1) < 0$. Por ende, existirá al menos una solución a la ecuación (5.52).

$\blacksquare$

Con el fin de testear la exactitud del método de balance integral clásico, se comparan gráficamente, para distintos valores de Bi y α, fijando Ste $= 0{,}5$, el coeficiente ν_{1h} que caracteriza a la frontera libre aproximada s_{1h} con el coeficiente ν_h que caracteriza a la frontera libre s_h (ver Figura 5.8).

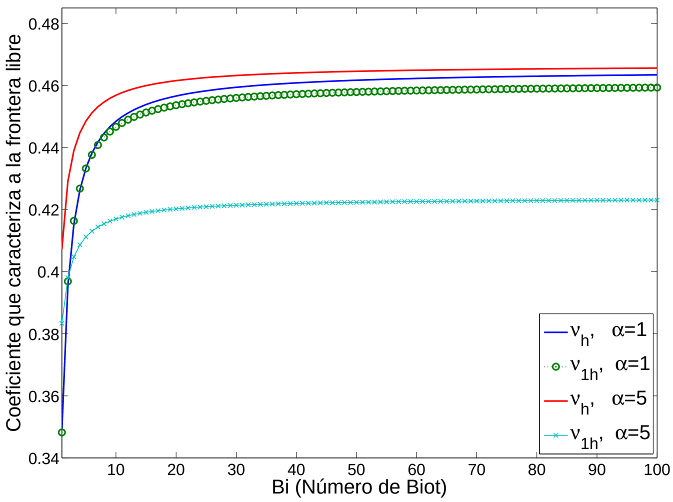

Figura 5.8: Comparación de ν_h y ν_{1h} para distintos valores de Bi fijando $\alpha = 1$ o 5 y Ste $= 0{,}5$

5.3.2. Solución aproximada a través del método de balance integral modificado

El método de balance integral modificado postula aproximar la solución del problema (P$_h$) mediante la resolución de un problema aproximado al cual llamaremos (P$_{2h}$). Dicho problema consiste en hallar la temperatura $T_{2h} = T_{2h}(x,t)$ y la frontera libre $s_{2h} = s_{2h}(t)$ de manera que se satisfagan: (5.1a*), (5.1b*),(5.1c)-(5.1e). Es decir:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{s_{2h}(t)} T_{2h}(x,t)dx = -a^2\left[\frac{\gamma}{k}s_{2h}^{\alpha}(t)\dot{s}_{2h}(t) + \tfrac{\partial T_{2h}}{\partial x}(0,t)\right], \quad 0<x<s_{2h}(t), \quad t>0, \tag{5.59a}$$

$$k\frac{\partial T_{2h}}{\partial x}(0,t) = \frac{h}{\sqrt{t}}\left[T_{2h}(0,t) - \theta_{\infty}t^{\alpha/2}\right], \quad t>0, \tag{5.59b}$$

$$T_{2h}(s_{2h}(t),t) = 0, \quad t>0, \tag{5.59c}$$

$$k\frac{\partial T_{2h}}{\partial x}(s_{2h}(t),t) = -\gamma s_{2h}(t)^{\alpha}\dot{s}_{2h}(t), \quad t>0, \tag{5.59d}$$

$$s_{2h}(0) = 0, \tag{5.59e}$$

asumiendo que T_{2h} adopta un perfil cuadrático en el espacio como en (5.4).

Teorema 5.5. *Dado* Ste >0 *y* $\alpha \geq 0$, *existe una única solución al problema (5.22), al cual llamamos* (P_2) *y está dada por:*

$$T_{2h}(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_{2h}\theta_{\infty}\left(1-\frac{x}{s_{2h}(t)}\right) + B_{2h}\theta_{\infty}\left(1-\frac{x}{s_{2h}(t)}\right)^2\right], \tag{5.60}$$

$$s_{2h}(t) = 2a\nu_{2h}\sqrt{t}, \tag{5.61}$$

donde las constantes A_{2h}, B_{2h} *son:*

$$A_{2h} = \frac{6\mathrm{Ste} - 2\mathrm{Ste}\,\nu_{2h}^2(\alpha+1) - \frac{3}{\mathrm{Bi}}2^{\alpha+1}\nu_{2h}^{\alpha+1} - 3\;2^{\alpha+1}\nu_{2h}^{\alpha+2}}{\mathrm{Ste}\left[\nu_{2h}^2(\alpha+1) + \frac{2}{\mathrm{Bi}}\nu_{2h}(\alpha+1)+3\right]}, \tag{5.62}$$

$$B_{2h} = \frac{-3\mathrm{Ste} + 3\mathrm{Ste}\,\nu_{2h}^2(\alpha+1) + \frac{3}{\mathrm{Bi}}2^{\alpha}\nu_{2h}^{\alpha+1} + 3\;2^{\alpha+1}\nu_{2h}^{\alpha+2}}{\mathrm{Ste}\left[\nu_{2h}^2(\alpha+1) + \frac{2}{\mathrm{Bi}}\nu_{2h}(\alpha+1)+3\right]}, \tag{5.63}$$

donde ν_{2h} *es la única solución de*

$$z^{\alpha+4}2^{\alpha}(\alpha+1) + z^{\alpha+3}\,\frac{2^{\alpha+1}}{\mathrm{Bi}}(\alpha+1) + z^{\alpha+2}3\;2^{\alpha+1} + z^{\alpha+1}3\frac{2^{\alpha}}{\mathrm{Bi}} + z^2\mathrm{Ste}(\alpha+1) - 3\mathrm{Ste} = 0, \qquad z>0. \tag{5.64}$$

Demostración. Se observa que la condición (5.59c) se verifica automáticamente por el perfil de temperatura elegido. De la condición de Stefan (5.59d) y del perfil adoptado se tiene que

$$-kt^{\alpha/2}\theta_\infty \frac{A_{2h}}{s_{2h}(t)} = -\gamma s_{2h}^{\alpha}(t)\dot{s}_{2h}(t). \tag{5.65}$$

De allí surge que

$$s_{2h}(t) = \left(\frac{(\alpha+2)}{(\frac{\alpha}{2}+1)}\frac{k\theta_\infty}{\gamma}A_{2h}\right)^{1/(\alpha+2)}\sqrt{t}. \tag{5.66}$$

Si se introduce la variable ν_{2h} de manera que $2a\nu_{2h} = \left(\frac{(\alpha+2)}{(\frac{\alpha}{2}+1)}\frac{k\theta_\infty}{\gamma}A_{2h}\right)^{1/(\alpha+2)}$, la frontera libre se expresa de la forma

$$s_{2h}(t) = 2a\;\nu_{2h}\sqrt{t}, \tag{5.67}$$

donde se verifica la siguiente relación

$$A_{2h} = \frac{2^{\alpha+1}\nu_{2h}^{\alpha+2}}{\mathrm{Ste}}. \tag{5.68}$$

De la condición en el borde fijo (5.59b) surge que

$$A_{2h}(1+2\mathrm{Bi}\;\nu_{2h}) + 2B_{2h}(1+\nu_{2h}) = 2\mathrm{Bi}\;\nu_{2h}. \tag{5.69}$$

Además en virtud de (5.59a) resulta

$$A_{2h}\left((\alpha+1)\nu_{2h}^2 - 1\right) + B_2\left(\tfrac{2}{3}(\alpha+1)\nu_{2h}^2 - 2\right) = \frac{-2^{\alpha+1}\nu_{2h}^{\alpha+2}}{\mathrm{Ste}}. \tag{5.70}$$

De las ecuaciones (5.68)-(5.70) surge que A_{2h} y B_{2h} se escriben en función de ν_{2h} a través de (5.62) y (5.63), respectivamente. Así como también que ν_{2h} debe ser solución de la ecuación (5.64). Para que el teorema quede demostrado, resta probar que la ecuación (5.64) tiene una única solución positiva. Esto es equivalente a probar que la función $w_{2h} = w_{2h}(z)$ tiene una única raíz real positiva, siendo w_{2h} el lado izquierdo de (5.64). Ahora bien, eso resulta trivial ya que

$$w_{2h}(0) = -3\mathrm{Ste} < 0, \qquad w_{2h}(+\infty) = +\infty, \qquad \frac{dw_{2h}}{dz}(z) > 0, \quad \forall z > 0.$$

■

Se ha demostrado en el Capítulo 3 que la solución del problema exacto (P_h) converge a la solución del problema (P) cuando el coeficiente h, que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo tiende a infinito. A continuación se prueba que sucede los mismo para los problemas aproximados que surgen de aplicar el método de balance integral modificado.

Teorema 5.6. *La solución del problema (P_{2h}) dada por el Teorema 5.5 converge a la solución del problema (P_2) dada por el Teorema 5.2 cuando el coeficiente h que caracteriza a la transferencia de calor en el borde fijo tiende a infinito.*

Demostración. La frontera libre solución del problema (P_{2h}) se caracteriza por un coeficiente ν_{2h} que es única raíz positiva de la función $\omega_{2h} = \omega_{2h}(z)$ definida por el lado izquierdo de la ecuación (5.64). Se observa por un lado que si $h_1 < h_2$ entonces $\omega_{2\mathrm{h}_1}(z) > \omega_{2\mathrm{h}_2}(z)$ y por ende $\nu_{2\mathrm{h}_1} < \nu_{2\mathrm{h}_2}$.
Por otra parte, si se define la función $\omega_2 = \omega_2(z)$ como el lado izquierdo de la ecuación (5.27), se tiene

$$\omega_{2h}(z) - \omega_2(z) = z^{\alpha+3}\frac{2^{\alpha+1}}{\mathrm{Bi}}(\alpha+1) + z^{\alpha+1}3\frac{2^{\alpha}}{\mathrm{Bi}} > 0, \quad \forall z > 0.$$

Se tiene entonces que $\{\nu_h\}_h$ es una sucesión creciente, acotada superiormente por ν.

Luego, cuando $h \to \infty$, o equivalentemente cuando $\mathrm{Bi} \to \infty$, se tiene que $\omega_{2h} \to \omega_2$ y por ende $\nu_{2h} \to \nu_2$. Surge de manera trivial que $s_{2h}(t) \to s_2(t)$, para todo $t > 0$. Probando además que $A_{2h} \to A_2$ y $B_{2h} \to B_2$ sigue que $T_{2h}(x,t) \to T_2(x,t)$ cuando $h \to \infty$ para cada $t > 0$ y $0 < x < s_2(t)$. ■

En la Figura 5.9 se comparan gráficamente, para valores de $\mathrm{Bi} > 1$, el coeficiente ν_{2h} que caracteriza a la frontera libre aproximada s_{2h} con el coeficiente ν_h que caracteriza a la frontera libre s_h, para distintos valores de la potencia α que define al calor latente y fijando $\mathrm{Ste} = 0{,}5$. Se observa que a medida que Bi crece, el valor de ν_{2h} se acerca al valor de ν_2, coeficiente que caracteriza a la frontera libre del problema con condición de temperatura en el borde fijo.

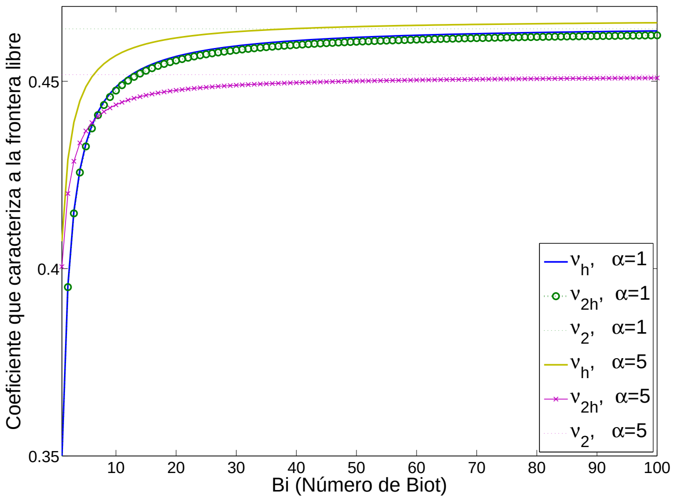

Figura 5.9: Comparación de ν y ν_{2h} para distintos valores de Bi, fijando $\alpha = 1$ o 5 y Ste $= 0{,}5$

5.3.3. Solución aproximada a través del método de balance integral refinado

El método de balance integral refinado postula aproximar la solución del problema (P$_h$) mediante la resolución de un problema aproximado al cual llamaremos (P$_{3h}$). Dicho problema consiste en hallar la temperatura $T_{3h} = T_{3h}(x,t)$ y la frontera libre $s_{3h} = s_{3h}(t)$ de manera que se satisfagan: (5.1a†), (5.1b*),(5.1c)-(5.1e). Es decir:

$$\int_0^{s_{3h}(t)}\int_0^x \frac{\partial T_{3h}}{\partial t}(z,t)dzdx = -a^2\left[T_{3h}(0,t) + \frac{\partial T_{3h}}{\partial x}(0,t)s_{3h}(t)\right], 0 < x < s_{3h}(t), t > 0, \quad (5.71a)$$

$$k\frac{\partial T_{3h}}{\partial x}(0,t) = \frac{h}{\sqrt{t}}\left[T_{3h}(0,t) - \theta_\infty t^{\alpha/2}\right], \qquad t > 0, \quad (5.71b)$$

$$T_{3h}(s_{3h}(t),t) = 0, \qquad t > 0, \quad (5.71c)$$

$$k\frac{\partial T_{3h}}{\partial x}(s_{3h}(t),t) = -\gamma s_{3h}(t)^\alpha \dot{s}_{3h}(t), \qquad t > 0, \quad (5.71d)$$

$$s_{3h}(0) = 0, \quad (5.71e)$$

asumiendo que T_{3h} adopta un perfil cuadrático en el espacio como en (5.4).

Teorema 5.7. *Sean* $0 <$ Ste < 1, $\alpha \geq 0$ *y* Bi ≥ 0*, luego existe una única solución al* *problema (5.71), al cual llamamos* (P_{3h})*, y está dada por:*

$$T_{3h}(x,t) = t^{\alpha/2}\left[A_{3h}\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_{3h}(t)}\right)+B_{3h}\theta_\infty\left(1-\frac{x}{s_{3h}(t)}\right)^2\right], \tag{5.72}$$

$$s_{3h}(t) = 2a\nu_{3h}\sqrt{t}, \tag{5.73}$$

donde las constantes A_{3h}, B_{3h} *son:*

$$A_{3h} = \frac{12\nu_{3h}\left(1-\nu_{3h}^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}\right)\right)}{2\alpha\nu_{3h}^3+\left(\frac{5\alpha+2}{\mathrm{Bi}}\right)\nu_{3h}^2+\frac{6}{\mathrm{Bi}}+12\nu_{3h}}, \tag{5.74}$$

$$B_{3h} = \frac{12\nu_{3h}^3\left(\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{3}\right)}{2\alpha\nu_{3h}^3+\left(\frac{5\alpha+2}{\mathrm{Bi}}\right)\nu_{3h}^2+\frac{6}{\mathrm{Bi}}+12\nu_{3h}}, \tag{5.75}$$

donde ν_{3h} *es la única solución de*

$$z^{\alpha+4}2^{\alpha+1}\alpha+z^{\alpha+3}\left(\frac{2^\alpha(2+5\alpha)}{\mathrm{Bi}}\right)+z^{\alpha+2}3\ 2^{\alpha+2}+z^{\alpha+1}\frac{3\ 2^{\alpha+1}}{\mathrm{Bi}}$$
$$+z^2\mathrm{Ste}(2+3\alpha)-6\mathrm{Ste}=0, \qquad z>0. \tag{5.76}$$

Demostración. La demostración resulta análoga a la del Teorema 5.5. Basta observar que la única diferencia radica en la ecuación (5.71a), la cual resulta equivalente a

$$\nu_{3h}^2\left[A_{3h}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\alpha\right)+B_{3h}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{\alpha}{2}\right)\right]=B_{3h} \tag{5.77}$$

■

Teorema 5.8. *La solución del problema* (P_{3h}) *dada por el Teorema 5.7 converge a la solución del problema* (P_3) *dada por el Teorema 5.3 cuando el coeficiente que caracteriza a la transferencia de calor en el borde fijo h tiende a infinito.*

Demostración. La prueba resulta análoga a la realizada en el Teorema 5.6. ■

En la Figura 5.10 se comparan gráficamente, para valores de Bi >1, el coeficiente ν_{3h} que caracteriza a la frontera libre aproximada s_{3h} con el coeficiente ν_h que caracteriza a la frontera libre s_h, para distintos valores de la potencia α que define al calor latente y fijando Ste $= 0{,}5$. Se observa que a medida que Bi crece, el valor de ν_{3h} se acerca al valor de ν_3, coeficiente que caracteriza a la frontera libre del problema con condición de temperatura en el borde fijo.

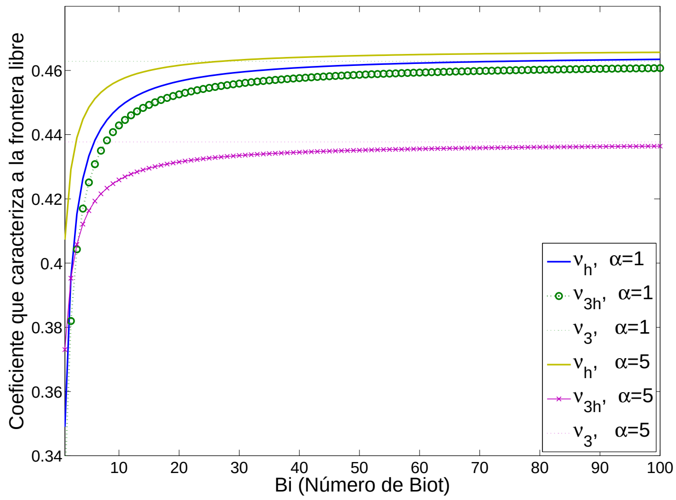

Figura 5.10: Comparación de ν y ν_{3h} para distintos valores de Bi, fijando $\alpha = 1$ o 5 y Ste $= 0{,}5$

5.3.4. Comparaciones entre soluciones aproximadas

En esta sección se comparan las tres soluciones aproximadas obtenidas para el problema con condición convectiva en el borde fijo (P_h).

Para cada uno de estos métodos, es decir, para cada problema (P_{ih}), $i = 1, 2, 3$ se han comparado gráficamente los coeficientes adimensionales ν_{ih} que caracterizan a la frontera libre aproximada s_{ih}, con el coeficiente ν_h que caracteriza a la frontera exacta s_h.

El objetivo es entonces comparar numéricamente el valor de ν_h dado por (**??**) con los valores aproximados ν_{1h}, ν_{2h} y ν_{3h} dados por (5.52), (5.64) y (5.76), respectivamente.

Para que las comparaciones sean más representativas, en la Tablas 5.4-5.6 se muestran los valores del coeficiente exacto ν_h, del aproximado ν_{ih} y el error porcentual cometido en cada caso $E(\nu_{ih}) = 100 \left| \frac{\nu_h - \nu_{ih}}{\nu_h} \right|$, $i = 1, 2, 3$ para diferentes valores de Bi y α fijando Ste $= 0{,}5$.

Tabla 5.4: Coeficientes adimensionales de las fronteras libres y sus errores relativos respecto de la solución exacta fijando $\alpha = 0$ y Ste $= 0{,}5$.

Bi	ν_h	ν_{1h}	$E_{\text{rel}}(\nu_{1h})$	ν_{2h}	$E_{\text{rel}}(\nu_{2h})$	ν_{3h}	$E_{\text{rel}}(\nu_{3h})$
1	0.2926	0.2966	1.3828 %	0.2937	0.3939 %	0.2899	0.9103 %
10	0.4422	0.4681	5.8548 %	0.4484	1.4111 %	0.4545	2.7969 %
20	0.4533	0.4776	5.3525 %	0.4602	1.5151 %	0.4672	3.0744 %
30	0.4571	0.4807	5.1622 %	0.4642	1.5514 %	0.4716	3.1679 %
40	0.4590	0.4822	5.0628 %	0.4662	1.5699 %	0.4738	3.2148 %
50	0.4601	0.4832	5.0019 %	0.4674	1.5811 %	0.4751	3.2430 %
60	0.4609	0.4838	4.9606 %	0.4682	1.5886 %	0.4759	3.2618 %
70	0.4615	0.4842	4.9309 %	0.4688	1.5940 %	0.4766	3.2752 %
80	0.4619	0.4845	4.9085 %	0.4693	1.5980 %	0.4771	3.2853 %
90	0.4622	0.4848	4.8909 %	0.4696	1.6012 %	0.4774	3.2932 %
100	0.4625	0.4850	4.8768 %	0.4699	1.6037 %	0.4777	3.2994 %

Tabla 5.5: Coeficientes adimensionales de las fronteras libres y sus errores relativos respecto de la solución exacta, fijando $\alpha = 5$ y Ste $= 0{,}5$.

Bi	ν_h	ν_{1h}	$E_{\text{rel}}(\nu_{1h})$	ν_{2h}	$E_{\text{rel}}(\nu_{2h})$	ν_{3h}	$E_{\text{rel}}(\nu_{3h})$
1	0.3274	0.3293	0.5908 %	0.3280	0.1779 %	0.3160	3.4746 %
10	0.4459	0.4551	2.0484 %	0.4480	0.4543 %	0.4474	0.3370 %
20	0.4553	0.4631	1.7173 %	0.4574	0.4798 %	0.4583	0.6724 %
30	0.4585	0.4657	1.5912 %	0.4607	0.4886 %	0.4621	0.7874 %
40	0.4601	0.4671	1.5250 %	0.4623	0.4931 %	0.4640	0.8456 %
50	0.4610	0.4679	1.4844 %	0.4633	0.4958 %	0.4651	0.8807 %
60	0.4617	0.4684	1.4569 %	0.4640	0.4976 %	0.4659	0.9042 %
70	0.4622	0.4688	1.4370 %	0.4645	0.4989 %	0.4664	0.9210 %
80	0.4625	0.4691	1.4220 %	0.4648	0.4999 %	0.4668	0.9336 %
90	0.4628	0.4693	1.4103 %	0.4651	0.5006 %	0.4672	0.9434 %
100	0.4630	0.4695	1.4009 %	0.4653	0.5012 %	0.4674	0.9513 %

Se observa a partir de las tablas que para $\alpha = 0{,}5$, los errores cometidos por los métodos son menores que para $\alpha = 0$ o $\alpha = 5$. En todos los casos, el método que mejor aproxima a la frontera libre exacta del problema (P_h) es el dado por el método de balance integral modificado (P_{2h}).

Por otra parte, a partir de los resultados obtenidos en las secciones anteriores, también se compara la temperatura exacta T_h con la temperatura aproximada T_{ih}, $i = 1, 2, 3$, dadas por (5.47), (5.60) y (5.72), respectivamente, fijando $\alpha = 5$, Ste $= 0{,}5$, $\theta_\infty = 30, a = 1$

Tabla 5.6: Coeficientes adimensionales de las fronteras libres y sus errores relativos respecto de la solución exacta, fijando $\alpha = 0{,}5$ y $\text{Ste} = 0{,}5$.

Bi	ν_h	ν_{1h}	$E_{\text{rel}}(\nu_{1h})$	ν_{2h}	$E_{\text{rel}}(\nu_{2h})$	ν_{3h}	$E_{\text{rel}}(\nu_{3h})$
1	0.4073	0.3834	5.8702 %	0.4005	1.6647 %	0.3730	8.4069 %
10	0.4569	0.4170	8.7307 %	0.4437	2.8806 %	0.4259	6.7799 %
20	0.4616	0.4203	8.9507 %	0.4476	3.0301 %	0.4315	6.5196 %
30	0.4632	0.4214	9.0256 %	0.4489	3.0845 %	0.4335	6.4217 %
40	0.4641	0.4220	9.0633 %	0.4496	3.1126 %	0.4345	6.3703 %
50	0.4646	0.4224	9.0861 %	0.4501	3.1298 %	0.4351	6.3387 %
60	0.4649	0.4226	9.1012 %	0.4503	3.1414 %	0.4356	6.3173 %
70	0.4652	0.4228	9.1121 %	0.4505	3.1497 %	0.4359	6.3018 %
80	0.4654	0.4229	9.1203 %	0.4507	3.1560 %	0.4361	6.2901 %
90	0.4655	0.4230	9.1266 %	0.4508	3.1609 %	0.4363	6.2809 %
100	0.4656	0.4231	9.1317 %	0.4509	3.1649 %	0.4364	6.2736 %

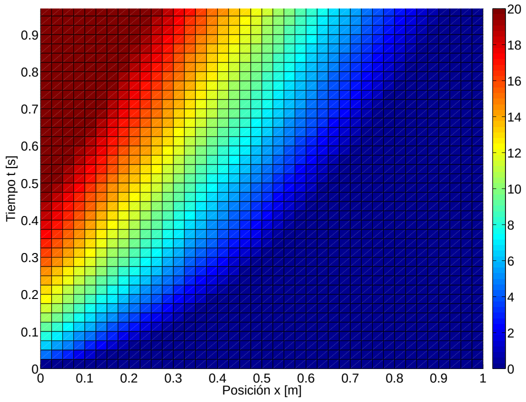

Figura 5.11: Mapa de colores para T_h

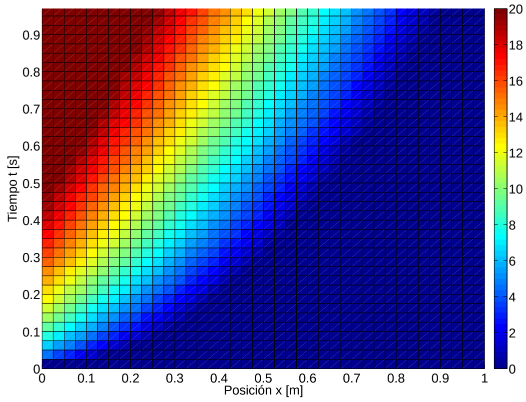

Figura 5.12: Mapa de colores para T_{1h}

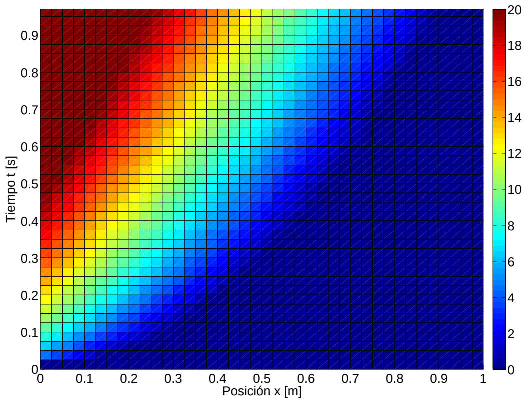

Figura 5.13: Mapa de colores para T_{2h}

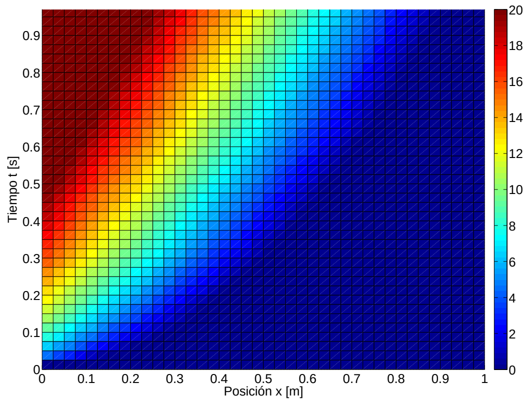

Figura 5.14: Mapa de colores para T_{3h}

Conclusiones

En esta Tesis se han obtenido soluciones exactas y aproximadas a problemas de tipo Stefan con calor latente variable sobre medios unidimensionales semi-infinitos, homogéneos e isotrópicos, complementando los trabajos iniciados en [1, 2, 3, 35, 36, 37].

En primer lugar, se presentaron las diferentes aplicaciones que motivaron el estudio de este tipo de problemas como ser: el movimiento de las costas marítimas en una cuenca sedimentaria, la consolidación unidimensional del suelo con umbral de gradiente y la congelación artificial del suelo.

Luego, se presentaron dos problemas de tipo Stefan con calor latente definido como una potencia no negativa de la posición y con una condición de tipo Robin en el borde fijo del material: el primero a una fase y el segundo a dos fases. Se hallaron soluciones de similaridad utilizando las funciones de Kummer. Se analizó también el comportamiento límite cuando el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo tiende a infinito. Se exhibieron diferentes ejemplos numéricos. Para el caso del problema a una fase, se estudiaron las condiciones sobre los datos del problema, para que el mismo resulte equivalente al problema que posee una condición de Dirichlet o Neumann, en vez de Robin, en el borde fijo.

Posteriormente, se realizó una generalización matemática del primer problema estudiado, considerando problemas de tipo Stefan con calor latente dependiente no sólo de una potencia de la posición sino también de una potencia de la velocidad. De manera análoga, se resolvieron los problemas con condiciones de temperatura flujo o convectiva en el borde fijo, mediante el método de similaridad. Para el caso convectivo, se realizó un estudio del comportamiento límite de la solución cuando el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo tiene a infinito. Se proporcionaron ejemplos computacionales para el cálculo de la frontera libre y el calor latente (variable en el tiempo).

Finalmente, se presentaron aproximaciones para el problema de Stefan a una fase con calor latente dependiente de la posición y condiciones de tipo Dirichlet o Robin en el borde fijo. Para obtener dichas aproximaciones se utilizaron los métodos de balance integral clásico, una variante del mismo, y el método de balance integral refinado. Se compararon las distintas aproximaciones obtenidas con la soluciones exactas correspondientes y se calcularon los errores relativos porcentuales cometidos en cada método.

Bibliografía

[1] V. R. Voller, J. Swenson, C. Paola, An analytical solution for a stefan problem with variable latent heat, International Journal of Heat and Mass transfer 47 (2004) 5387–5390.

[2] Y. Zhou, W. Bu, M. Lu, One-dimensional consolidation with a threshold gradient: a Stefan problem with rate-dependent latent heat, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 37 (2013) 2825–2832.

[3] Y. Zhou, X. Shi, G. Zhou, Exact solution for a two-phase Stefan problem with power-type latent heat, Journal of Engineering Mathematics, 110 (2018) 1–13.

[4] J. Stefan, Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung, Zitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaftliche Classe 98 (1889) 473–484.

[5] J. Stefan, Über die Diffusion von Säuren und Basen qeqen einander, Zitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaftliche Classe 98 (1889) 616–634.

[6] J. Stefan, Über die Verdampfung und die Auflösung als Vorgänge Diffusion, Zitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaftliche Classe 98 (1889) 1418–1442.

[7] G. Lamé, B. P. E. Clapeyron, Memoire sur la solidification par refroidissiment d'un globe liquide, Ann. Chem. Phys. 47 (1831) 250–256.

[8] M. Brillouin, Sur quelques problémes non résolus de la physique mathématique classique. propagation de la fusion, Annales de L'Inst. H. Pincaré 1 (1930/31) 285–308.

[9] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, Conduction of heat in solids, Clarendon Press, Oxford, 1959.

[10] H. M. Weber, Die partiellen Differential-Gleinchungen der Mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen, Braunschweig, 1901.

[11] C. Pekeris, L. Skichter, Problem of ice formation, Journal of Applied Physics 10 (1939) 135–137.

[12] J. Crank, The mathematics of diffusion, Clarendon Press, Oxford, 1956.

[13] V. Alexiades, A. D. Solomon, Mathematical modeling of melting and freezing processes, Hemisphere Publishing Corp., Washington, 1993.

[14] P. M. Beckett, A note on surface heat transfer coefficients, International Journal of Heat and Mass Transfer 34 (1991) 2165–2166.

[15] A. C. Briozzo, D. A. Tarzia, Explicit solution of a free-boundary problem for a nonlinear absorption model of mixed saturated-unsaturated flow, Advances in Water Resources 21 (1998) 713–721.

[16] P. Boadbridge, Solution of a nonlinear absorption model of mixed saturated-unsaturated flow, Water Resources Research 26 (1990) 2435–2443.

[17] A. C. Briozzo, M. F. Natale, D. A. Tarzia, The Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity and a convective term with a convective condition at the fixed face, Comm. Pure Appl. Anal. 9 (2010) 1209–1220.

[18] J. Cadwell, Y. Kwan, A brief review of several numerical methods for one-dimensional Stefan problems, Thermal Science 13 (2009) 61–72.

[19] S. D. Foss, An approximate solution to the moving boundary problem associated with the freezing and melting of lake ice, A. I. Ch. E. Symposium Series 74 (1978) 250–255.

[20] D. A. Tarzia, A bibliography on moving-free boundary problems for heat diffusion equation. The Stefan problem, MAT-Serie A 2 (2000) 1–297.

[21] D. A. Tarzia, Relationship between Neumann solutions for two-phase Lamé-Clapeyron-Stefan problems with convective and temperature boundary conditions, Thermal Science 21-1 (2017) 187–197.

[22] S. M. Zubair, M. A. Chaudhry, Exact solution of solid-liquid phase-change heat transfer when subjected to convective boundary conditions, Wärme und Stoffübertragung 30 (1994) 77–81.

[23] G. Barenblatt, Scaling, self-similarity and intermediate asymptotics, Cambridge University Press, Washington, 1996.

[24] T. Goodman, The heat balance integral methods and its application to problems involving a change of phase, Transactions of the ASME 80 (1958) 335–342.

[25] A. S. Wood, A new look at the heat balance integral method, Applied Mathematical Modelling 25 (2001) 815–824.

[26] N. Sadoun, E. Si-ahmed, J. Colinet, On the refined integral method for the one-phase stefan problem with time-dependent boundary conditions, Applied Mathematical Modelling 30 (2006) 531–544.

[27] J. Hristov, The heat-balance integral method by a parabolic profile with unspecified exponent:analysis and benchmark exercises, Thermal Science 13 (2009) 27–48.

[28] J. Hristov, Research note on a parabolic heat-balance integral method with unspecified exponent: An entropy generation approach in optimal profile determination, Thermal Science 13 (2009) 49–59.

[29] S. L. Mitchell, Applying the combined integral method to one-dimensional ablation, Applied Mathematical Modelling 36 (2012) 127–138.

[30] S. L. Mitchell, T. Myers, Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions, International Journal of Heat and Mass Transfer 53 (2010) 3540–3551.

[31] S. L. Mitchell, T. Myers, Application of heat balance integral methods to one-dimensional phase change problems, Applied Mathematics and Computation 2012 (2012) 1–22.

[32] F. Mosally, A. Wood, A. Al-Fhaid, An exponential heat balance integral method, Applied Mathematics and Computation 130 (2002) 87–100.

[33] J. Swenson, V. Voller, C. Paola, G. Parker, J. Marr, Fluvio-deltaic sedimentation: a generalized stefan problem, European Journal of Applied Mathematics 11 (2000) 433–452.

[34] M. Primicerio, Stefan-like problems with space-dependent latent heat, Meccanica 5 (1970) 187–190.

[35] N. N. Salva, D. A. Tarzia, Explicit solution for a Stefan problem with variable latent heat and constant heat flux boundary conditions, Journal of Mathematical Analysis and Applications 379 (2011) 240–244.

[36] Y. Zhou, Y. Wang, W. Bu, Exact solution for a Stefan problem with a latent heat a power function of position, International Journal of Heat and Mass Transfer 69 (2014) 451–454.

[37] Y. Zhou, L. Xia, Exact solution for Stefan problem with general power-type latent heat using Kummer function, International Journal of Heat and Mass Transfer 84 (2015) 114–118.

[38] A. Fasano, Alcune osservazioni su una classe di problemi a contorno libero per l'equazione del calore, Le Matematiche 29 (1974) 397–411.

[39] A. Schatz, Free boundary problems of stephan type with prescribed flux, Journal of Mathematical Analysis and Applications 28 (1969) 569–580.

[40] Y. Zhou, X. Hu, T. Li, D. Zhang, G. Zhou, Similarity type of general solution for one-dimensional heat conduction in the cylindrical coordinate, International Journal of Heat and Mass Transfer 119 (2018) 542–550.

[41] J. Bollati, D. Tarzia, Explicit solution for the one-phase Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face, Communications in Applied Analysis 22 (2018) 309–332.

[42] J. Bollati, D. Tarzia, Exact solution for a two-phase Stefan problem with variable latent heat and a convective boundary condition at the fixed face, Z. Angew. Math. Phys. 69-38 (2018) 1–15.

[43] H. Gottlieb, Exact solution of a Stefan problem in a nonhomogeneous cylinder, Applied Mathematics Letters 15 (2002) 167–172.

[44] O. Layeni, J. Jhonshon, Exact closed-form solutions of some Stefan problems in thermally heterogeneous cylinders, Mechanics Research Communications 71 (2016) 32–37.

[45] H. Ribera, T. Myers, A mathematical model for nanoparticle melting with size-dependent latent heat and melt temperature, Microfluid Nanofluid 20-147 (2016) 1–13.

[46] T. Myers, F. Font, On the one-phase reduction of the Stefan problem with a variable phase change temperature, International Communications in Heat and Mass Transfer 61 (2015) 37–41.

[47] L. Bougoffa, On the solucions of a Stefan problem with variable latent heat, Mathematical Problems in Engineering, (2018). doi:doi:10.1155/2014/180764.

[48] L. Bougoffa, R. Rach, A. Wazwaz, J. Duan, On the adomian decomposition method for solving the Stefan problem, International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow 25 (2015) 912–928.

[49] R. Kushwaha, M. Kushwaha, Adomian decomposition method for a moving boundary problem with variable latent heat, Journal of ACM 1 (2012) 1–4.

[50] S. Rajeev, A. Singh, Homotopy analysis method for a fractional Stefan problem, Nonlinear Science Letters A 8 (2017) 50–59.

[51] V. R. Voller, J. Swenson, W. Kim, C. Paola, An enthalpy method for moving boundary problems on the earth's surface, International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow 16 (2006) 641–654.

[52] J. Bollati, D. Tarzia, One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change, Electronic Journal of Differential Equations 2018-10 (2018) 1–12.

[53] J. Bollati, D. Tarzia, One-phase Stefan-like problems with a latent heat depending on the position and velocity of the free boundary, and with Neumann or Robin boundary conditions at the fixed face, Mathematical Problems in Engineering, 2018 (2018) 1–11. doi:10.1155/2018/4960391.

[54] F. Olver, D. Lozier, R. Boisvert, C. Clark, NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, New York, 2010.

[55] D. A. Tarzia, An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem, Quarterly of Applied Mathematics 39 (1981-1982) 491–497.

[56] C. Rogers, Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem, J. Phys. A -Math. Gen. 18 (1985) L105–L109.

[57] Y. Tao, The exact solutions of some stefan problems with prescribed heat flux, Journal of Applied Mechanics 48 (1981) 732–736.

[58] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, National Bureau of Standards, Washington, 1964.

[59] J. R. Cannon, The one-dimensional heat equation, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1984.

[60] J. Crank, Free and moving boundary problems, Clarendon Press, Oxford, 1984.

[61] S. C. Gupta, The classical Stefan problem. Basic concepts, modelling and analysis, Elsevier, Amsterdam, 2003.

[62] V. J. Lunardini, Heat transfer with freezing and thawing, Elsevier Science Publishers B. V., 1991.

[63] L. Rubinstein, The Stefan problem, American Mathematical Society, Providence, 1971.

[64] D. A. Tarzia, Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface, Prof. Mohamed El-Amin (Ed.), In Tech, Rijeka, 2011, Ch. 20, Advanced Topics in Mass Transfer, pp. 439–484.

[65] A. D. Solomon, An easily computable solution to a two-phase Stefan problem, Solar energy 33 (1979) 525–528.