

SOLUCIONES APROXIMADAS PARA UN PROBLEMA DE STEFAN A UNA FASE CON CALOR LATENTE VARIABLE

Julieta Bollati[†] y Domingo A. Tarzia[†]

[†]*Depto de Matemática, FCE-Universidad Austral-CONICET, Paraguay 1950, 2000 Rosario, Argentina, jbollati@austral.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar*

Resumen: Se obtienen diferentes aproximaciones para un problema unidimensional de Stefan a una fase asumiendo un calor latente variable, dependiente de la posición, y una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo. Se compara la solución exacta de dicho problema con las soluciones aproximadas obtenidas a partir del método de balance integral clásico, de una variante del mismo y del método de balance integral refinado, para un perfil de temperatura cuadrático en el espacio. En todos los casos, el análisis se realiza en forma adimensional. Se proveen ejemplos computacionales.

Palabras clave: *Problema de Stefan, Calor latente variable, Método de balance integral*

2000 AMS Subject Classification: 35C05-35C06-35K05-35R35-80A22.

1. INTRODUCCIÓN

Se estudian diferentes aproximaciones para un problema de Stefan a una fase con calor latente variable, al que llamaremos (P), el cual consiste en hallar la temperatura $T = T(x, t)$ y la frontera libre $s = s(t)$ de manera que se verifiquen las siguientes condiciones

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1a)$$

$$T(0, t) = \theta_0 t^{\alpha/2} \quad t > 0, \quad (1b)$$

$$T(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (1c)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\gamma s(t)^\alpha \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (1d)$$

$$s(0) = 0, \quad (1e)$$

donde a^2 es el coeficiente de difusividad térmica, k representa la conductividad térmica y γx^α es el calor latente por unidad de volumen con $\alpha \geq 0$. La temperatura de cambio de fase es cero (1c). Se impone una condición de temperatura dependiente del tiempo en el borde fijo $x = 0$ caracterizada por el coeficiente θ_0 . Notar que $\dot{s}(t)$ representa la velocidad de la interfase. La solución exacta de tipo similaridad de dicho problema fue hallada en [1] y está dada por

$$T(x, t) = t^{\alpha/2} [AM(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\eta^2) + B\eta M(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\eta^2)], \quad (2)$$

$$s(t) = 2a\nu\sqrt{t}, \quad (3)$$

donde $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$, los coeficientes A y B están definidos por $A = \theta_0$, $B = \frac{-\theta_0 M(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\nu^2)}{\nu M(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\nu^2)}$, y el parámetro ν está dado por la única solución de la siguiente ecuación

$$\frac{\text{Ste}}{2^{\alpha+1}} f(z) = z^{\alpha+1}, \quad z > 0 \quad (4)$$

con $\text{Ste} = \frac{k\theta_0}{\gamma a^{\alpha+2}}$ y $f(z) = \frac{1}{z M(\frac{\alpha}{2} + 1, \frac{3}{2}, z^2)}$, siendo M la función de Kummer de primera especie dada por $M(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n n!} z^n$, donde b no puede ser un entero no positivo y donde $(a)_n$ es el símbolo de Pochhammer definido por $(a)_0 = 1$ y $(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$.

2. MÉTODOS DE BALANCE INTEGRAL

En este trabajo se compararán las aproximaciones que se obtendrán a partir del método de balance integral clásico [2], el método de balance integral modificado [3] y el método de balance integral refinado [4], con la solución exacta del problema (1), similarmente a lo realizado en [5].

El método de balance integral clásico introducido en [2] para resolver problemas que involucran un cambio de fase consiste en transformar la ecuación del calor (1a) en una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo mediante: asumir un perfil de temperatura adecuado consistente con las condiciones de frontera, integrar (1a) con respecto a la variable espacial en el intervalo $(0, s(t))$, y sustituir la condición de Stefan (1d) por una nueva ecuación obtenida a partir de la temperatura de cambio de fase (1c). Es decir, si se deriva respecto del tiempo a la condición (1c), y se considera la ecuación del calor (1a) se obtiene

$$\frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t)\dot{s}(t) + a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(s(t), t) = 0. \quad (5)$$

Despejando \dot{s} y reemplazándola en la condición de tipo Stefan (1d) resulta

$$\frac{k}{\gamma s^\alpha(t)} \left[\frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) \right]^2 = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(s(t), t). \quad (1d^*)$$

Esta nueva condición sustituirá a la condición de Stefan en el problema aproximado obtenido a partir del método de balance integral clásico.

Por otra parte utilizando la ecuación (1a) y la condición (1c) se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} T(x, t) dx = a^2 \left[\frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) - \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right].$$

Utilizando la condición (1d) resulta

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} T(x, t) dx = -a^2 \left[\frac{\gamma}{k} s^\alpha(t) \dot{s}(t) + \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right]. \quad (1a^*)$$

El **método de balance integral clásico**, introducido en [2] propone aproximar la solución del problema (P) mediante la resolución de un problema aproximado que surge de reemplazar la ecuación del calor (1a) por (1a^{*}) y la condición de Stefan (1d) por (1d^{*}) manteniendo el resto de las condiciones del problema (P) iguales. Se propone entonces el **problema (P₁)** gobernado por (1a^{*}), (1b), (1c), (1d^{*}) y (1e).

En [3], se propone una **variante al método de balance integral clásico**, el cual consiste en resolver un problema en el que sólo se reemplaza la ecuación del calor (1a) por la del balance integral (1a^{*}), manteniendo el resto de las condiciones de (P) iguales. Es decir, se propone el siguiente **problema (P₂)** aproximado gobernado por (1a^{*}), (1b)-(1e).

Por otra parte, a partir de la ecuación del calor (1a), y la condición (1c) se tiene

$$\int_0^{s(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t}(z, t) dz dx = -a^2 \left[T(0, t) + \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) s(t) \right]. \quad (1a^\dagger)$$

El **método de balance integral refinado** introducido en [4] propone aproximar la solución del problema (P), mediante la resolución del **problema (P₃)** gobernado por (1a[†]), (1b)-(1e). Es decir, se reemplaza la ecuación (1a) por (1a[†]).

Para la resolución de los problemas aproximados que acaban de presentarse, se propone un **perfil cuadrático en el espacio para la temperatura**:

$$\tilde{T}(x, t) = \tilde{A}\theta_0 \left(1 - \frac{x}{\tilde{s}(t)} \right) + \tilde{B}\theta_0 \left(1 - \frac{x}{\tilde{s}(t)} \right)^2, \quad (6)$$

donde \tilde{T} y \tilde{s} serán aproximaciones de T y s respectivamente.

3. APROXIMACIONES Y EJEMPLOS COMPUTACIONALES

De manera análoga a lo realizado para los métodos presentados en la sección anterior, se propone un perfil adecuado para la temperatura y se obtienen los siguientes resultados.

Teorema 1 Si $0 < Ste < 1$, existe al menos una solución (T_1, s_1) al problema (P_1) gobernado por $(1a^*)$, $(1b)$, $(1c)$, $(1d^*)$ dada por

$$T_1(x, t) = t^{\alpha/2} \left[A_1 \theta_0 \left(1 - \frac{x}{s_1(t)} \right) + B_1 \theta_0 \left(1 - \frac{x}{s_1(t)} \right)^2 \right], \quad s_1(t) = 2a\nu_1 \sqrt{t},$$

donde $A_1 = \frac{-2[3 \ 2^\alpha \nu_1^{\alpha+2} + Ste((-3+(1+\alpha)\nu_1^2)]}{Ste(3+(1+\alpha)\nu_1^2)}$, $B_1 = \frac{3[2^{\alpha+1}\nu_1^{\alpha+2} + Ste(-1+(1+\alpha)\nu_1^2)]}{Ste(3+(1+\alpha)\nu_1^2)}$ y ν_1 es una solución de la ecuación siguiente:

$$z^{2\alpha+4}(-3) \ 2^{2\alpha+1}(\alpha - 2) + z^{2\alpha+2}(-9) \ 2^{2\alpha+1} + z^{4+\alpha}(-3) \ 2^\alpha(\alpha - 3)(\alpha + 1)Ste + z^{\alpha+2}(-3) \ 2^{\alpha+1}(\alpha + 7)Ste + z^\alpha 9 \ 2^\alpha Ste + z^4 2(\alpha + 1)^2 Ste^2 + z^2(-12)(\alpha + 1)Ste^2 + 18Ste^2 = 0, \quad z > 0. \tag{7}$$

Teorema 2 La solución (T_2, s_2) del problema (P_2) gobernado por $(1a^*)$, $(1b)$ - $(1e)$, está dada por:

$$T_2(x, t) = t^{\alpha/2} \left[A_2 \theta_0 \left(1 - \frac{x}{s_2(t)} \right) + B_2 \theta_0 \left(1 - \frac{x}{s_2(t)} \right)^2 \right], \quad s_2(t) = 2a\nu_2 \sqrt{t},$$

donde $A_2 = \frac{6Ste - 2Ste \ \nu_2^2(\alpha+1) - 3 \ 2^{\alpha+1}\nu_2^{\alpha+2}}{Ste(\nu_2^2(\alpha+1)+3)}$, $B_2 = \frac{-3Ste + 3Ste \ \nu_2^2(\alpha+1) + 3 \ 2^{\alpha+1}\nu_2^{\alpha+2}}{Ste(\nu_2^2(\alpha+1)+3)}$, y ν_2 es la única solución de

$$z^{\alpha+4} 2^\alpha(\alpha + 1) + z^{\alpha+2} 3 \ 2^{\alpha+1} + z^2 Ste(\alpha + 1) - 3Ste = 0, \quad z > 0. \tag{8}$$

Teorema 3 La solución al problema (P_3) gobernado por $(1a^\dagger)$, $(1b)$ - $(1e)$, está dada por:

$$T_3(x, t) = t^{\alpha/2} \left[A_3 \theta_0 \left(1 - \frac{x}{s_3(t)} \right) + B_3 \theta_0 \left(1 - \frac{x}{s_3(t)} \right)^2 \right], \quad s_3(t) = 2a\nu_3 \sqrt{t},$$

donde $A_3 = \frac{6Ste - 2Ste \ \nu_3^2(\alpha+1) - 3 \ 2^{\alpha+1}\nu_3^{\alpha+2}}{Ste(\nu_3^2(\alpha+1)+3)}$, $B_3 = \frac{-3Ste + 3Ste \ \nu_3^2(\alpha+1) + 3 \ 2^{\alpha+1}\nu_3^{\alpha+2}}{Ste(\nu_3^2(\alpha+1)+3)}$ y ν_3 es la única solución de

$$z^{\alpha+4} 2^{\alpha+1} \alpha + z^{\alpha+2} 3 \ 2^{\alpha+2} + z^2 Ste(2 + 3\alpha) - 6Ste = 0, \quad z > 0. \tag{9}$$

Con el fin de testear la exactitud del método de balance integral clásico, se comparan gráficamente, para valores de $Ste < 1$, el coeficiente ν_1 que caracteriza a la frontera libre aproximada s_1 con el coeficiente ν que caracteriza a la frontera libre s , para distintos valores de la potencia α que define al calor latente (ver Figura 1). Cabe mencionar, que se considera $Ste < 1$ no sólo por la hipótesis del Teorema 1, sino también porque generalmente los materiales de cambio de fase bajo temperaturas adecuadas (realistas) presentan un número de Stefan menor a 1.

En la Figura 2, al igual que para ν_1 se comparan gráficamente, el coeficiente ν_2 que caracteriza a la frontera libre aproximada s_2 con el coeficiente ν que caracteriza a la frontera libre s , para distintos valores de la potencia α que define al calor latente. En la Figura 3 se realizan las mismas comparaciones para ν_3 .

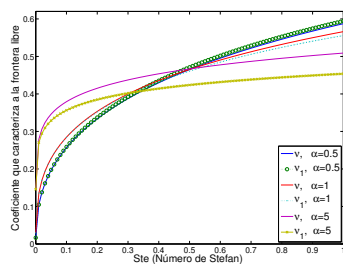


Figura 1

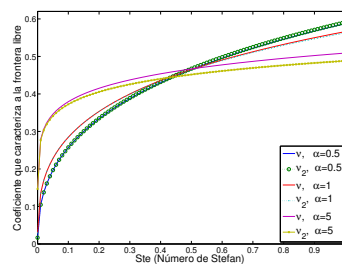


Figura 2

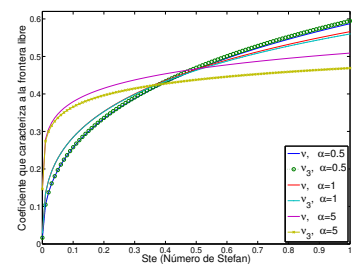


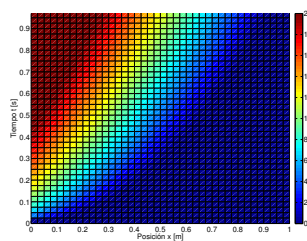
Figura 3

A continuación para diferentes valores del número de Stefan, se compara numéricamente el valor de ν dado por (4) con los valores aproximados ν_1 , ν_2 y ν_3 dados por (7), (8) y (9), respectivamente. En la Tabla 1 se muestran los valores del coeficiente exacto ν , del aproximado ν_i y el error porcentual cometido en cada caso $E(\nu_i) = 100 \left| \frac{\nu - \nu_i}{\nu} \right|$, $i = 1, 2, 3$ para diferentes valores de Ste fijando $\alpha = 0$ (correspondiente al problema de Stefan clásico).

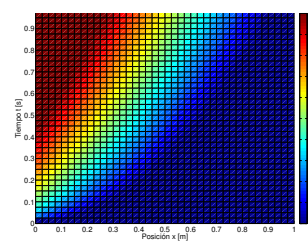
Ste	ν	ν_1	$E_{rel}(\nu_1)$	ν_2	$E_{rel}(\nu_2)$	ν_3	$E_{rel}(\nu_3)$
0.1	0.2200	0.2232	1.4530 %	0.2209	0.3947 %	0.2218	0.7954 %
0.2	0.3064	0.3143	2.5729 %	0.3087	0.7499 %	0.3111	1.5213 %
0.3	0.3699	0.3827	3.4575 %	0.3738	1.0707 %	0.3780	2.1856 %
0.4	0.4212	0.4388	4.1687 %	0.4270	1.3618 %	0.4330	2.7953 %
0.5	0.4648	0.4869	4.7478 %	0.4723	1.6266 %	0.4804	3.3561 %
0.6	0.5028	0.5290	5.2236 %	0.5122	1.8683 %	0.5222	3.8729 %
0.7	0.5365	0.5666	5.6173 %	0.5477	2.0895 %	0.5599	4.3501 %
0.8	0.5669	0.6006	5.9443 %	0.5799	2.2923 %	0.5941	4.7913 %
0.9	0.5946	0.6316	6.2165 %	0.6094	2.4786 %	0.6255	5.1999 %
1.0	0.6201	0.6600	6.4432 %	0.6365	2.6500 %	0.6547	5.5786 %

Tabla 1

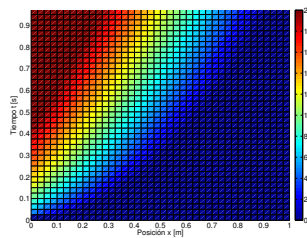
Por otra parte, a partir de los teoremas obtenidos en la sección anterior, se compara la temperatura exacta T con la temperatura aproximada T_i , $i = 1, 2, 3$, fijando $\alpha = 5$, Ste = 0,5, $\theta_0 = 30$, $a = 1$



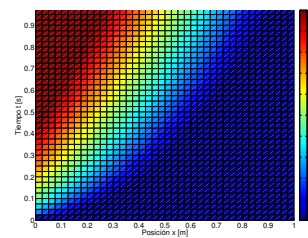
Mapa de colores para T



Mapa de colores para T_1



Mapa de colores para T_2



Mapa de colores para T_3

En todos los ejemplos computacionales presentados puede observarse que la solución del problema (P_2) es la que mejor aproxima a la solución del problema exacto.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente patrocinado por el Proyecto PIP No 0275 de CONICET-UA, Rosario, Argentina, y ANPCyT PICTO Austral 2016 No 0090.

REFERENCIAS

[1] Y. ZHOU AND L. XIA, *Exact solution for Stefan problem with general power-type latent heat using Kummer function*, Int. J. Heat Mass Transfer 84 (2015), pp. 114-118.
 [2] T. GOODMAN , *The heat balance integral methods and its application to problems involving a change of phase*, Trans. ASME 80 (1958), pp. 335-342.
 [3] A. WOOD, *A new look at the heat balance integral method*, Appl. Math. Modelling 25 (2001), pp. 815-824.
 [4] N. SADOUN AND E.K. SI-AHMED AND P. COLINET , *On the refined integral method for the one-phase Stefan problem with time-dependent boundary conditions*, Appl. Math. Modelling 30 (2006), pp. 531-544.
 [5] J. BOLLATI AND J.A. SEMITIEL AND D.A. TARZIA, *Heat balance integral methods applied to the one-phase Stefan problem with a convective boundary condition at the fixed face*, Appl. Math. Comput. 331 (2018), pp. 1-19.