CONTROL ÓPTIMO PARA UNA INECUACIÓN CUASIVARIACIONAL DIFERENCIAL

Julieta Bollati[†‡], M. Sofonea[⋆] y Doming A. Tarzia[†‡]

[†]*Depto. Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina,*
[‡]*CONICET, Argentina, jbollati@austral.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar*
[⋆] *Département de Mathématiques, Université de Perpignan Via Domitia, 52 Avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan, France, sofonea@univ-perp.fr*

Resumen: Se plantea una inecuación cuasivariacional diferencial en la cual se acopla una inecuación cuasivariacional con una ecuación diferencial. Se prueba la dependencia continua de dicha inecuación respecto a los datos. El resultado de convergencia que se obtiene permite probar la existencia de al menos un par óptimo continuo asociado al problema de control.

Palabras clave: *inecuación cuasivariacional diferencial, convergencia de Mosco, control óptimo.*
2000 AMS Subject Classification: 35M87, 35R35, 47J20, 49J40, 49J45, 74M15.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de inecuaciones variacionales juega un rol muy importante en la mecánica y la física ya que una gran cantidad de problemas nos conducen al estudio de inecuaciones variacionales elípticas o parabólicas. Algunos ejemplos son los problemas de frontera libre relacionados a los fluidos en medios porosos, procesos de cambio de fase para el problema de Stefan a una fase [3] y a dos fases [14].

Muchas inecuaciones variacionales surgen del estudio de modelos matemáticos en mecánica del contacto [4, 10, 12] de donde se desprenden distintos problemas de control optimal [2, 15].

Una inecuación variacional diferencial representa un sistema que acopla una ecuación diferencial con una inecuación variacional o cuasivariacional. Este término fue utilizado por primera vez en [1]. Algunos trabajos donde se pueden encontrar resultados de existencia, unicidad y convergencia son [5, 6, 8, 9], en algunos de los cuales se hace referencia a distintas aplicaciones en la mecánica del contacto.

2. PRELIMINARES

Sea I un intervalo de tiempo (acotado o no acotado), i.e., $I = [0, T]$ con $T > 0$ o $I = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Sean X, V espacios de Banach y Z un espacio de Hilbert dotado del producto interno $(\cdot, \cdot)_Z$. La norma en estos espacios se notará con $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_Z$, respectivamente. El espacio dual topólogico de V lo denotamos con V^*. Dados $F : I \times X \times V \to X$, $x_0 \in X$, $A : X \times V \to V^*$, $j : X \times V \times V \to \mathbb{R}$, $\pi : V \to Z$, $f : I \to V$ y $K \subset V$ definimos la siguiente inecuación cuasivariacional diferencial:

Problema $\mathcal{P}$. *Hallar* $x \in C^1(I; X)$ *y* $u \in C(I; V)$ *tales que*

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)) \qquad \forall\, t \in I, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} u(t) \in K, \quad & \langle A(x(t), u(t)), v - u(t)\rangle + j(x(t), u(t), v) - j(x(t), u(t), u(t)) \\ & \geq (f(t), \pi v - \pi u(t))_Z \quad \forall\, v \in K,\ t \in I. \end{aligned} \tag{3}$$

Consideremos las siguientes hipótesis sobre los datos del problema $\mathcal{P}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) El mapeo } t \to F(t, x, u) \text{ es continuo } \forall x \in X, u \in V. \\ \text{(b) Para todo conjunto compacto } J \subset I \text{ existe } L_J > 0 \text{ tal que} \\ \qquad \|F(t, x_1, u_1) - F(t, x_2, u_2)\|_X \leq L_J\ (\|x_1 - x_2\|_X + \|u_1 - u_2\|_V) \\ \quad \forall x_1, x_2 \in X,\ u_1, u_2 \in V,\ t \in J. \end{array} \right. \tag{4}$$

$$\begin{cases} \text{(a) Existe } L' > 0 \text{ tal que } \|A(x_1,u) - A(x_2,u)\|_{V^*} \leq L'\|x_1 - x_2\|_X,\ \forall x_1,x_2 \in X,\ u \in V. \\ \text{(b) Existe } L'' > 0 \text{ tal que } \|A(x,u_1) - A(x,u_2)\|_{V^*} \leq L''\|u_1 - u_2\|_V,\ \forall x \in X,\ u_1,u_2 \in V. \\ \text{(c) Existe } m > 0 \text{ tal que } \langle A(x,u_1) - A(x,u_2), u_1 - u_2\rangle \geq m\|u_1 - u_2\|_V^2, \forall x \in X,\ u_1,u_2 \in V. \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \text{(a)} \forall x \in X, u \in V,\ j(x,u,\cdot) \text{ es convexa y semicontinua inferiormente (l.s.c) en } V. \\ \text{(b) Existen } \alpha > 0 \text{ y } \beta > 0 \text{ tales que} \\ \quad j(x_1,u_1,v_2) - j(x_1,u_1,v_1) + j(x_2,u_2,v_1) - j(x_2,u_2,v_2) \\ \leq \alpha\|x_1 - x_2\|_X\|v_1 - v_2\|_V + \beta\|u_1 - u_2\|_V\|v_1 - v_2\|_V, \forall x_1,x_2 \in X,\ u_1,u_2 \in V,\ v_1,v_2 \in V. \end{cases} \tag{6}$$

$$x_0 \in X, \quad K \neq \emptyset \text{ es un subconjunto cerrado convexo de } V, \quad m > \beta, \quad f \in C(I;Z). \tag{7}$$

$$\pi : V \to Z \text{ operador lineal y continuo, i.e., } \exists\, c_0 > 0 \text{ tal que } \|\pi v\|_Z \leq c_0\,\|v\|_V\ \ \forall\, v \in V. \tag{8}$$

A partir de (8) y del Teorema de representación de Riesz definimos $\overline{f} : I \to V^*$ de manera que $\langle \overline{f}, v\rangle = (f(t), \pi v)_Z \ \ \forall\, v \in V,\ t \in I$. Además, la hipótesis (7) sobre f implica que $\overline{f} \in C(I;V^*)$. Como consecuencia directa de [7] se tienen los siguientes resultados:

Teorema 1 *Sea X un espacio de Banach, V un espacio de Banach reflexivo, Z un espacio de Hilbert. Si se asume* (4)–(8)*, entonces el problema $\mathcal{P}$ tiene una única solución $(x,u) \in C^1(I;X) \times C(I;V)$.*

Lema 1 *Sea X un espacio de Banach, V un espacio de Banach reflexivo y asumamos* (5)–(8)*. Entonces, para cada $\widetilde{x}(t) \in C^1(I;X)$, existe una única función $u \in C(I;V)$ tal que*

$$\begin{aligned} u(t) \in K, \qquad & \langle A(\widetilde{x}(t), u(t)), v - u(t)\rangle + j(\widetilde{x}(t), u(t), v) - j(\widetilde{x}(t), u(t), u(t)) \\ & \geq (f(t), \pi v - \pi u(t))_Z, \qquad \forall\, v \in K,\ t \in I. \end{aligned} \tag{9}$$

3. Resultado de Convergencia

La solución (x,u) al problema $\mathcal{P}$ obtenido en el Teorema 1 depende de los datos F, x_0, A, K, j y f. Probaremos a continuación un resultado de convergencia que muestra la dependencia continua de (x,u) con respecto a los datos. Este resultado será esencial para el estudio del problema de control óptimo que estudiaremos en la Sección 4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos la función F_n, el dato inicial x_{0n}, el conjunto convexo K_n, el operador A_n y dos funciones j_n y f_n que satisfacen las hipótesis (4)–(7), respectivamente, con las constantes L_{Jn}, L'_n, L''_n, m_n, α_n y β_n. Para evitar confusión nos referiremos a dichas hipótesis de la siguiente manera $(4)_n$ –$(7)_n$. Se asume que $\{L_{Jn}\}$, $\{L'_n\}$, $\{L''_n\}$, $\{m_n\}$, $\{\alpha_n\}$ son acotadas, y que :

$$L_{Jn} \leq L_J, \quad L'_n \leq L', \quad L''_n < L'' \quad m_n \geq m, \quad \alpha_n \leq \alpha, \quad \beta_n \leq \beta \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{10}$$

donde $L_J, L', L'', m, \alpha, \beta$ son las constantes asociadas a (4)–(7), respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea:

Problema $\mathcal{P}_n$. *Hallar $x_n \in C^1(I;X)$ y $u_n \in C(I;V)$ de manera que*

$$\dot{x}_n(t) = F_n(t, x_n(t), u_n(t)) \qquad \forall\, t \in I, \tag{11}$$

$$x_n(0) = x_{0n}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} u_n(t) \in K_n, \qquad & \langle A_n(x_n(t), u_n(t)), v_n - u_n(t)\rangle + j_n(x_n(t), u_n(t), v_n) - j_n(x_n(t), u_n(t), u_n(t)) \\ & \geq (f_n(t), \pi v_n - \pi u_n(t))_Z \quad \forall\, v_n \in K_n,\ t \in I. \end{aligned} \tag{13}$$

Notemos que, si $(4)_n$-$(7)_n$ y (8) se satisfacen, el Teorema 1 garantiza la existencia de una única solución al problema $\mathcal{P}_n$, la cual llamaremos con (x_n, u_n). Consideramos la siguientes hipótesis adicionales:

$$\begin{cases} \text{Para todo } n \in \mathbb{N} \text{ existen } \Gamma_n \geq 0, \text{ y } \gamma_n \geq 0 \text{ tales que :} \\ \text{(a) } \|F_n(t,x,u) - F(t,x,u)\|_X \leq \Gamma_n\left(\|x\|_X + \|u\|_V + \gamma_n\right), \forall\, t \in I, x \in X,\ u \in V. \\ \text{(b) } \lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n = 0. \qquad \text{(c) } \{\gamma_n\} \subset \mathbb{R} \text{ es acotada.} \end{cases} \tag{14}$$

$$x_{0n} \to x_0 \ \text{ in } \ X. \tag{15}$$

$$\{K_n\} \text{ converge a } K \text{ en el sentido de Mosco [11]} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \text{Para cada } n \in \mathbb{N} \text{ existen } \Lambda_n \geq 0, \ \text{y } \lambda_n \geq 0 \text{ tales que :} \\ \text{(a) } \|A_n(x,u) - A(x,u)\|_{V^*} \leq \Lambda_n \left(\|x\|_X + \|u\|_V + \lambda_n\right) \quad \forall\, x \in X, \ u \in V. \\ \text{(b) } \lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n = 0. \qquad\qquad \text{(c) } \{\lambda_n\} \subset \mathbb{R} \text{ es acotada.} \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \text{(a) Para cada } n \in \mathbb{N} \text{ existen } \tau_n \geq 0 \text{ y } \delta_n \geq 0 \text{ tales que :} \\ j_n(x,u,v_1) - j_n(x,u,v_2) \leq [\tau_n + \delta_n(\|x\|_X + \|u\|_V)]\, \|v_1 - v_2\|_V, \forall\, x \in X, \ u \in V, \ v_1, v_2 \in V. \\ \text{(b) Existen } \tau_0 > 0 \text{ y } \delta_0 > 0 \text{ tales que } \tau_n \leq \tau_0 \text{ y } \delta_n \leq \delta_0 < m. \\ \text{(c) Si } \{u_n\} \subset V, \ \{v_n\} \subset V \text{ son tales que } u_n \rightharpoonup u \text{ en } V, \ v_n \rightharpoonup v \text{ en } V \text{ entonces} \\ \qquad \limsup\limits_{n\to\infty} [j_n(x,u_n,v_n) - j_n(x,u_n,u_n)] \leq j(x,u,v) - j(x,u,u) \quad \forall\, x \in X. \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} \text{(a) } f_n(t) \rightharpoonup f(t) \ \text{ en } \ Z \text{ cuado } n \to \infty \quad \forall\, t \in I; \\ \text{(b) Para todo compacto } J \subset I \text{ existe } w_J > 0 \text{ tal que } \|f_n(t)\|_Z \leq w_J \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \ t \in J. \end{cases} \tag{19}$$

$$\text{Para todo } \{v_n\} \subset V \text{ tal que } v_n \rightharpoonup v \ \text{ en } \ V \quad \text{se cumple} \quad \pi v_n \to \pi v \ \text{ en } \ Z. \tag{20}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define además el siguiente problema auxiliar

Problema $\widetilde{\mathcal{P}}_n$. *Hallar* $\widetilde{u}_n \in C(I;V)$ *tal que*

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_n(t) \in K_n, \ \ &\langle A_n(x(t), \widetilde{u}_n(t)), v_n - \widetilde{u}_n(t)\rangle + j_n(x(t), \widetilde{u}_n(t), v_n) - j_n(x(t), \widetilde{u}_n(t), \widetilde{u}_n(t)) \\ &\geq (f_n(t), \pi v_n - \pi \widetilde{u}_n(t))_Z \qquad \forall\, v_n \in K_n, \ t \in I, \end{aligned} \tag{21}$$

Luego se demuestran los siguientes lemas que dan lugar al teorema de convergencia principal:

Lema 2 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, el problema* $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ *tiene una única solución* $\widetilde{u}_n \in C(I;V)$*. Además, para cada compacto* $J \subset I$*, existe* $\widetilde{C}_J > 0$ *tal que* $\|\widetilde{u}_n(t)\|_V \leq \widetilde{C}_J, \quad \forall\, t \in J, \ n \in \mathbb{N}$.

Lema 3 *Para cada* $t \in I$ *se tiene la siguiente convergencia débil:* $\widetilde{u}_n(t) \rightharpoonup u(t) \ \text{ en } \ V \ \text{ cuando } n \to \infty$.

Teorema 2 *Supongamos que se satisfacen* (4)–(8) *y* $(4)_n$–$(7)_n$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Además, asumamos* (10) *y* (14)–(20)*. Entonces, la solución* (x_n, u_n) *al problema* $\mathcal{P}_n$ *converge a la solución* (x, u) *del problema* $\mathcal{P}$ *cuando* $n \to \infty$*, i.e., para cada* $t \in I$ *se tiene* $u_n(t) \to u(t)$ *en* V *y* $x_n(t) \to x(t)$ *en* X *cuando* $n \to \infty$.

4. Un problema de control óptimo

Consideramos $(W, \|\cdot\|_W)$ un espacio reflexivo de Banach. Sea U un subconjunto no vacío de W. Para cada $q \in U$ se considera la función F_q, el dato inicial x_{0q}, el conjunto convexo K_q, el operador A_q y las funciones j_q y f_q tales que verifiquen (4)–(7), respectivamente con las contantes L_{Jq}, L'_q, L''_q, m_q, α_q y β_q. Para evitar confusión,cuando consideramos estas hipótesis para q las denotaremos de la forma $(4)_q$–$(7)_q$. Consideremos el siguiente problema

Problema $\mathcal{P}_q$. *Hallar* $x_q \in C^1(I;X)$ *y* $u_q \in C(I;V)$ *tales que*

$$\dot{x}_q(t) = F_q(t, x_q(t), u_q(t)) \qquad \forall\, t \in I, \tag{22}$$

$$x_q(0) = x_{0q}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} u_q(t) \in K_q, \qquad &\langle A_q(x_q(t), u_q(t)), v_q - u_q(t)\rangle + j_q(x_q(t), u_q(t), v_q) - j_q(x_q(t), u_q(t), u_q(t)) \\ &\geq (f_q(t), \pi v_q - \pi u_q(t))_Z \quad \forall\, v_q \in K_q, \ t \in I. \end{aligned} \tag{24}$$

El Teorema 1 garantiza que para cada $q \in U$ existe una única solución $(x_q, u_q) \in C^1(I;X) \times C(I;V)$ al problema $\mathcal{P}_q$. Consideremos una función de costo $\mathcal{L} : X \times V \times U \to \mathbb{R}$ para la cual se define el siguiente problema de control

Problema $\mathcal{Q}$. *Dado* $t \in I$, *hallar* $q^* \in U$ *tal que*

$$\mathcal{L}(x_{q^*}(t), u_{q^*}(t), q^*) = \min_{q \in U} \mathcal{L}(x_q(t), u_q(t), q). \tag{25}$$

Sean las siguientes hipótesis:

$$U \text{ es un conjunto no vacío, débilmente cerrado de } W. \tag{26}$$

$$\begin{cases} \text{Para todas } \{x_n\} \subset X,\ \{u_n\} \subset V,\ \{q_n\} \subset U \text{ tales que} \\ x_n \to x \text{ en } X,\ u_n \to u \text{ en } V,\ q_n \rightharpoonup q \text{ en } W, \text{ se tiene} \\ \liminf_{n\to\infty} \mathcal{L}(x_n, u_n, q_n) \geq \mathcal{L}(x, u, q). \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} \text{Existe } z : U \to \mathbb{R} \text{ tal que} \\ \text{(a) } \mathcal{L}(x, u, q) \geq z(q) \quad \forall\, x \in X,\ u \in V,\ q \in U. \\ \text{(b) } \|q_n\|_W \to \infty \text{ implica que } z(q_n) \to \infty. \end{cases} \tag{28}$$

$$U \text{ es un subconjunto acotado de } W. \tag{29}$$

El principal resultado de este trabajo se enuncia a continuación:

Teorema 3 *Asumamos que se verifican* $(4)_q$–$(7)_q$, *para cada* $q \in U$. *Además, se supone* (8), (20), (26), (27) *donde se cumple* (28) *o* (29). *Para cada sucesión* $\{q_n\} \subset U$ *tal que* $q_n \rightharpoonup q$ *en* W *se define* $F = F_q, x_0 = x_{0q}, K = K_q, A = A_q, j = j_q, f = f_q$ *y* $F_n = F_{q_n}, x_{0n} = x_{0q_n}, K_n = K_{q_n}, A_n = A_{q_n}, j_n = j_{q_n}, f_n = f_{q_n}$. *Si se verifican* (10), (14)–(19), *entonces para cada* $t \in I$, *el problema de control óptimo* $\mathcal{Q}$ *tiene al menos una solución* q^*.

Observación 1 *Mas detalles sobre las convergencias y ejemplos de aplicación en mecánica de contacto pueden verse en [13].*

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente patrocinado por el Proyecto PIP No 0275 de CONICET-UA, Rosario, Argentina, y ANPCyT PICTO Austral 2016 No 0090, y por European Union's Horizon 2020 Research and Innovation Programme under the Marie Sklodowska-Curie grant agreement 823731 CONMECH.

REFERENCIAS

[1] J. P. AUBIN AND A. CELLINA, *Differential inclusions*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[2] F. CLARKE, *Functional analysis, calculus of variations and optimal control*, Springer, London, 2013.

[3] G. DUVAUT, *Résolution d' un probème de Stefan (fusion d' un bloc de glace à zéro degrée)* , C. R. Acad. Sci. Paris, 276A (1973), pp. 1461-1463.

[4] G. DUVAUT AND J. L. LIONS, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[5] J. GWINNER, *Three-field modelling of nonlinear nonsmooth boundary problems and stability of differential mixed variational inequalities*, Abstract and Applied Analysis, Article ID 108043, (2013), pp. 1-10.

[6] Z. H. LIU, S. MIGÓRSKI AND S. D. ZENG, *Partial differential variational inequalities involving nonlocal boundary conditions in Banach spaces*, J. Differential Equations, 263 (2017), pp. 3989-4006.

[7] Z. H. LIU AND M. SOFONEA, *Differential quasivariational inequalities in contact mechanics*, Mathematics and Mechanics of Solids, 24 (2018), pp. 845-861.

[8] Z. H. LIU AND S. ZENG, *Penalty method for a class of differential variational inequalities*, Applicable Analysis, (2019). doi:10.1080/00036811.2019.165273

[9] Z. H. LIU, S. D. ZENG AND D. MOTREANU, *Evolutionary problems driven by variational inequalities*, J. Differential Equations, 260 (2016), pp. 6787-6799.

[10] S. MIGÓRSKI, A. OCHAL AND M. SOFONEA, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and analysis of contract problems*, Springer, New York, 2013.

[11] U. MOSCO, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. Math., 3 (1969), pp. 510-585.

[12] M. SOFONEA AND S. MIGÓRSKI, *Variational-hemivariational inequalities with applications*, Boca Raton: Chapman Hall/CRC Press, 2018.

[13] M. SOFONEA, J. BOLLATI AND D.A. TARZIA. *Optimal control of differential quasivariational inequalities with applications in contact mechanics*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 493 (2021), 124567 pp.1-23.

[14] D.A. TARZIA, *Sur le problème de Stefan à deux phases*, C.R. Acad. Sci. Paris, 288A (1979), pp. 941-944

[15] F. TRÖLTZSCH, *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications*, American Mathematical Society, Providence, 2010.