Existencia y unicidad de solución para un problema de Stefan a una fase con coeficientes térmicos variables

Julieta Bollati[†‡], María F. Natale[†], José A. Semitiel[†] y Domingo A. Tarzia[†‡]

[†]*Depto de Matemática, FCE-Universidad Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario, Argentina, fnatale@austral.edu.ar, jsemitiel@austral.edu.ar*
[‡]*CONICET, Argentina, jbollati@austral.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar*

Resumen: Se considera un problema de Stefan unidimensional a una fase con coeficientes térmicos dependientes de la temperatura y una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo $x = 0$ para un material semi-infinito. Se prueba existencia y unicidad de solución. Se proveen ejemplos computacionales.

Palabras clave: *Conductividad térmica variable, calor específico variable, problema de Stefan, coeficientes térmicos dependientes de la temperatura, variable de similaridad.*
2000 AMS Subject Classification: 34A34 - 35K05 - 80A22 - 35R35 - 35C06

1. Introducción

En este trabajo, se considera un problema de fusión a una fase con conductividad térmica dependiente de la temperatura $k(T)$ y calor específico $c(T)$. Algunos modelos que involucran coeficientes térmicos dependientes de la temperatura pueden encontrarse en [1, 2, 3, 4, 5]. El modelo matemático que describe este proceso está gobernado por las siguientes ecuaciones:

$$\rho c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right), \qquad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$T(0,t) = T_0, \qquad t > 0, \tag{2}$$

$$T(s(t),t) = T_f, \qquad t > 0, \tag{3}$$

$$k_0\frac{\partial T}{\partial x}(s(t),t) = -\rho l\dot{s}(t), \qquad t > 0, \tag{4}$$

$$s(0) = 0, \tag{5}$$

donde las funciones a determinar son la temperatura $T = T(x,t)$ y la frontera libre $x = s(t)$ que separa dichas fases. Los parámetros $\rho > 0$ (densidad), $l > 0$ (calor latente por unidad de masa), $T_0 > 0$ (temperatura impuesta en el borde fijo $x = 0$) con $T_0 > T_f$ (temperatura de cambio de fase en la frontera libre $x = s(t)$) son constantes conocidas. Las funciones k y c se definen por:

$$k(T) = k_0\left(1 + \delta\left(\tfrac{T-T_f}{T_0-T_f}\right)^p\right) \tag{6}$$

$$c(T) = c_0\left(1 + \delta\left(\tfrac{T-T_f}{T_0-T_f}\right)^p\right), \tag{7}$$

donde δ es una constante positiva dada, k_0 y c_0 son la conductividad térmica y calor específico de referencia, respectivamente.

El problema (1)-(5) fue considerado previamente [6] donde se obtuvo un problema diferencial ordinario equivalente. Sin embargo, sólo para el caso $p = 1$ dicho problema fue resuelto. En [7], la existencia de solución de tipo similaridad utilizando un doble punto fijo fue obtenida para coeficientes térmicos variables definidos por funciones acotadas de tipo Lipschitz.

En este trabajo se obtiene solución de tipo similaridad para el problema (1)-(5). Más precisamente, para el caso en que $T = T(x,t)$ pueda escribirse como función de una única variable (similaridad). A través del siguiente cambio de variables

$$y(\eta) = \tfrac{T(x,t)-T_f}{T_0-T_f} \geq 0 \tag{8}$$

donde

$$\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{9}$$

la frontera libre está dada por

$$s(t) = 2a\lambda\sqrt{t} \tag{10}$$

donde $a^2 = \frac{k_0}{\rho c_0}$ (difusividad térmica) y $\lambda > 0$ una constante a determinar.

Es fácil ver que el problema de Stefan (1)-(5) tiene una solución de similaridad (T, s) dada por:

$$T(x,t) = (T_0 - T_f)\, y\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + T_f, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{11}$$

$$s(t) = 2a\lambda\sqrt{t}, \qquad t > 0 \tag{12}$$

si y sólo si y y el parámetro $\lambda > 0$ satisfacen el siguiente problema diferencial ordinario:

$$2\eta(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta) + [(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta)]' = 0, \qquad 0 < \eta < \lambda, \tag{13}$$

$$y(0) = 1, \tag{14}$$

$$y(\lambda) = 0, \tag{15}$$

$$y'(\lambda) = -\frac{2\lambda}{\text{Ste}} \tag{16}$$

donde $\delta \geq 0$, $p \geq 1$ y $\text{Ste} = \frac{c_0(T_0 - T_f)}{l} > 0$ es el número de Stefan.

En [6], la solución del problema diferencial ordinario (13)-(16) fue aproximada a través de los polinomios de Chebyshev. Además, en dicho trabajo se obtuvo la solución exacta para casos particulares. EL objetivo de este trabajo es probar existencia y unicidad de solución para cada $\delta \geq 0$ y $p \geq 1$.

En la sección 2, se prueba existencia y unicidad de solución del problema (1)-(5) a través del análisis del problema (13)-(16).

2. Existencia y unicidad de solución

Se estudia la existencia y unicidad de solución del problema (1)-(5) a través del problema diferencial ordinario (13)-(16).

Lema 1 *Sean $p \geq 1$, $\delta \geq 0$, $\lambda > 0$, $y \in C^\infty[0, \lambda]$, $y \geq 0$ entonces, (y, λ) es solución del problema diferencial ordinario* (13)-(16) *si y sólo si λ es la única solución de*

$$f(x) = g, \qquad x > 0, \tag{17}$$

y la función y verifica

$$F(y(\eta)) = G(\eta), \qquad 0 < \eta < \lambda, \tag{18}$$

donde

$$g = \frac{\text{Ste}}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{\delta}{p+1}\right), \qquad f(x) = x\exp(x^2)\operatorname{erf}(x), \tag{19}$$

$$F(x) = x + \frac{\delta}{p+1}x^p, \qquad G(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}}\,\lambda\exp(\lambda^2)\left(\operatorname{erf}(\lambda) - \operatorname{erf}(x)\right). \tag{20}$$

Prueba. Sea (y, λ) solución del problema (13)-(16).

Se define $v(\eta) = (1 + \delta y^p(\eta))\, y'(\eta)$. Teniendo en cuenta la ecuación diferencial ordinaria (13) y la condición (14), v se puede reescribir como $v(\eta) = (1 + \delta)y'(0)\exp(-\eta^2)$. Luego

$$y'(\eta) + \delta y^p(\eta)y'(\eta) = (1 + \delta)y'(0)\exp(-\eta^2). \tag{21}$$

Si se integra (21) en $(0, \eta)$, y se tienen en cuenta las condiciones (14)-(15) se deduce

$$y(\eta) + \frac{\delta}{p+1}y^{p+1}(\eta) = 1 + \frac{\delta}{p+1} - \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}}\lambda\exp(\lambda^2)\operatorname{erf}(\eta) \tag{22}$$

Tomando $\eta = \lambda$ en la ecuación anterior, por (15) se obtiene (17). Además, a partir de (17) se puede reescribir (22) como (18).

Recíprocamente, si (y, λ) es solución de (17)-(18) se tiene

$$y(\eta) = -\tfrac{\delta}{p+1} y^{p+1}(\eta) + \left(1 + \tfrac{\delta}{p+1}\right)\left(1 - \tfrac{\operatorname{erf}(\eta)}{\operatorname{erf}(\lambda)}\right). \tag{23}$$

A través de cálculos elementales se puede ver que (y, λ) es solución del problema diferencial ordinario (13)-(16) . $\square$

De acuerdo al resultado anterior, se procede a probar que existe una única solución al problema (17)-(18).

Lema 2 *Si $p \geq 1$ y $\delta \geq 0$, entonces existe una única solución (y, λ) al problema (17)-(18) con $\lambda > 0$, $y \in C^\infty[0, \lambda]$, $y \geq 0$.*

Prueba. Dado que f definida por (19) es una función creciente que satisface $f(0) = 0$ y $f(+\infty) = +\infty$, se deduce que existe un único $\lambda > 0$ solución de la ecuación (17). Luego, para dicho $\lambda > 0$, es fácil ver que F dada por (20) resulta una función creciente, y entonces existe $F^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Como G definida por (20) es una función positiva, se puede asegurar que existe una única solución $y \in C^\infty[0, \lambda]$ de la ecuación (18) dada por

$$y(\eta) = F^{-1}\left(G(\eta)\right), \qquad 0 < \eta < \lambda. \tag{24}$$

$\square$

Nota 1 *Por un lado se tiene que F es una función creciente con $F(0) = 0$ y $F(1) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$. Por otra parte, G es una función decreciente que satisface $G(0) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$ y $G(\lambda) = 0$. Luego resulta que $0 \leq y(\eta) \leq 1$, para $0 < \eta < \lambda$.*

A partir de los lemas anteriores se puede deducir el siguiente resultado:

Teorema 1 *El problema de Stefan gobernado por (1)-(5) tiene una única solución de tipo similaridad dada por (11)-(12) donde (y, λ) es la única solución del problema funcional (17)-(18).*

Nota 2 *De la nota 1 y el teorema 1 se tiene*

$$T_f < T(x,t) < T_0, \qquad\qquad 0 < x < s(t), \quad t > 0.$$

Nota 3 *Para el caso particular $p = 1$, $\delta \geq 0$, la solución del problema (17)-(18) está dada por*

$$y(\eta) = \tfrac{1}{\delta}\left[\sqrt{(1+\delta)^2 - \delta(2+\delta)\tfrac{\operatorname{erf}(\eta)}{\operatorname{erf}(\lambda)}} - 1\right], \qquad 0 < \eta < \lambda, \tag{25}$$

donde λ verifica

$$\lambda \exp(\lambda^2) \operatorname{erf}(\lambda) = \tfrac{\mathrm{Ste}}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \tfrac{\delta}{2}\right). \tag{26}$$

De los lemas 1 y 2, se puede calcular la solución (y, λ) del problema diferencial ordinario (13)-(16), utilizando su formulación funcional.

En la Figura 1, para diferentes valores de p, se grafica la solución (y, λ) del problema (17)-(18). Con el fin de comparar las soluciones y obtenidas, se extienden por cero para $\eta > \lambda$. Se asume $\delta = 5$ y Ste $= 0,5$. Vale la pena destacar que la elección de Ste se debe al hecho de que para la mayoría de los materiales de cambio de fase el número de Stefan no supera 1 (ver [8]).

Se observa gráficamente que a medida que p aumenta, el valor de λ disminuye.

A partir del Teorema 1, se puede graficar también la solución (T, s) del problema (13)-(16). En la Figura 2 se presenta un mapa de colores para la temperatura $T = T(x,t)$ extendiendo la misma por cero para $x > s(t)$.

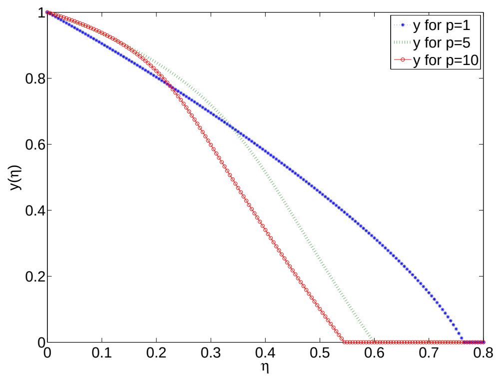

Figura 1: Gráfica de la función y para diferentes valores de $p = 1, 5, 10$, fijando $\delta = 5$ y Ste $= 0{,}5$.

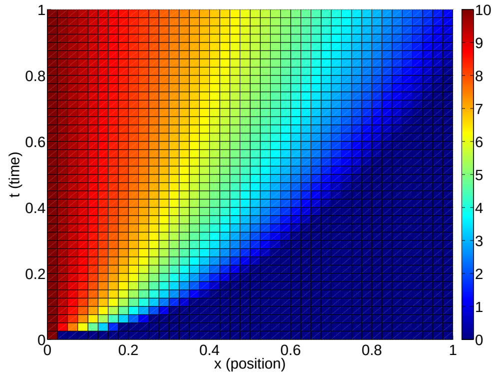

Figura 2: Mapa de colores para la función $T = T(x,t)$ fijando $\delta = 1$, $p = 1$, Ste $= 0{,}5$, $T_f = 0$, $T_0 = 10$ y $a = 1$

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente patrocinado por el Proyecto PIP No 0275 de CONICET-UA, Rosario, Argentina, y ANPCyT PICTO Austral 2016 No 0090.

REFERENCIAS

[1] M. NATALE, AND D. TARZIA, *Explicit soltuions to the two-phase Stefan problem for Storm-type materials*, J. Phys. A: Math. Gen., 33 (2000), pp.395–404.

[2] A. BRIOZZO, AND M. NATALE, *One-dimensional nonlinear Stefan problems in Storm's materials*, One-dimensional nonlinear Stefan problems in Storm's materials, Vol. 2 (2014), pp. 1-11.

[3] A. BRIOZZO, AND M. NATALE, *Nonlinear Stefan problem with convective boundary condition in Storm's materials*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 67(2) (2016), pp.1-11.

[4] A. BRIOZZO, AND M. NATALE, *Two-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients and a convective boundary condition*, IMA Journal of Applied Mathematics, (2018), pp. 1-15.

[5] O. MAKINDE, N. SANDEEP, T. AJAYI, AND I. ANIMASAUN, *Numerical Exploration of Heat Transfer and Lorentz Force Effects on the Flow of MHD Casson Fluid over an Upper Horizontal Surface of a Thermally Stratified Melting Surface of a Paraboloid of Revolution*, Int. J. Nonlinear Sci. Simul., 19(2-3) (2018), pp. 93-106.

[6] A. KUMAR, A. K. SINGH,AND RAJEEV, *A moving boundary problem with variable specific heat and thermal conductivity*, Journal of King Saud University - Science, (2018), doi: https://doi.org/10.1016/j.jksus.2018.05.028.

[7] A. BRIOZZO, M. NATALE, AND D. TARZIA, *Existence for an exact solution for a one-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients from Tirskii's method*, Nonlinear Analysis, 67 (2007), pp. 1989-1998.

[8] A. SOLOMON, *An easily computable solution to a two-phase Stefan problem*, Solar energy, 33 (1979), pp.525–528.