EXISTENCIA DE SOLUCIÓN PARA UN PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES CON COEFICIENTES TÉRMICOS VARIABLES

Julieta Bollati†‡, María F. Natale†, José A. Semitiel† y Domingo A. Tarzia†‡

†*Depto de Matemática, FCE-Universidad Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario, Argentina, fnatale@austral.edu.ar, jsemitiel@austral.edu.ar*
‡*CONICET, Argentina, jbollati@austral.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar*

Resumen: Se estudia un problema de Stefan unidimensional a dos fases no clásico con coeficientes térmicos dependientes de la temperatura y una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo $x = 0$. Se transforma el problema en un problema diferencial ordinario y luego se define un operador contractivo para probar existencia de solución de tipo similaridad.

Palabras clave: *coeficientes térmicos variables,problema de Stefan, variable de similaridad*
2000 AMS Subject Classification: 34A34 - 35K05 - 80A22 - 35R35 - 35C06

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo, se considera un problema de solidificación para un problema de Stefan a dos fases con conductividades térmicas $k_i(T_i)$ y calores específicos $c_i(T_i)$ dependientes de las temperaturas T_i con $i = 1, 2$, donde $T_1 = T_1(x, t)$ es la temperatura del material en la fase sólida y $T_2 = T_2(x, t)$ es la temperatura del material en la fase líquida. Otros problemas con coeficientes térmicos variables pueden verse en [1]-[5].

El modelo matemático que describe este proceso es el siguiente:

$$\rho c_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}\right), \qquad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\rho c_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x}\right), \qquad x > s(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

$$T_2(+\infty, t) = T_2(x, 0) = T_*, \qquad x > s(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

$$T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = T_f, \quad T_1(0, t) = T_0, \qquad t > 0, \tag{4}$$

$$k_1(T_f)\frac{\partial T_1}{\partial x}(s(t), t) - k_2(T_f)\frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t), t) = \rho l \dot{s}(t), \qquad t > 0, \tag{5}$$

$$s(0) = 0, \tag{6}$$

donde las funciones a determinar son las temperaturas de ambas fases $T_i = T_i(x, t)$, $i = 1, 2$ y la frontera libre $x = s(t)$ que separa dichas fases. El parámetro $\rho > 0$ (densidad), $l > 0$ (calor latente por unidad de masa), T_0 (temperatura impuesta en el borde fijo $x = 0$), $T_* > 0$ temperatura inicial del material y T_f (temperatura de cambio de fase en la frontera libre $x = s(t)$) son todas constantes dadas tales que

$$T_0 < T_f < T_*. \tag{7}$$

La conductividad térmica k_i y el calor específico c_i están defnidas por:

$$k_i(T_i) = k_i^0\left(1 + \delta\left(\tfrac{T_i - T_*}{T_f - T_*}\right)^p\right) \qquad c_i(T_i) = c_i^0\left(1 + \delta\left(\tfrac{T_i - T_*}{T_f - T_*}\right)^p\right), \tag{8}$$

donde $\delta > 0$ es una constante dada, k_i^0 and c_i^0 son las conductividades térmicas y calor específico de referencias, respectivamente para $i = 1, 2$.

Se obtendrá una solución de tipo similaridad al problema (1)-(6). Más precisamente, uno en el cual las temperaturas $T_i = T_i(x, t)$ puedan ser escritas como una función de una sola variable a través de:

$$y_i(\eta) = \tfrac{T_i(x,t) - T_*}{T_f - T_*}, \quad i = 1, 2, \quad \eta = \tfrac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}. \tag{9}$$

Así, la frontera libre está dada por

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_2 t} \tag{10}$$

donde $\alpha_2 = \frac{k_2^0}{\rho c_2^0}$ (difusividad térmica del líquido) y $\lambda > 0$ es un parámetro a ser determinado. Un problema análogo a una fase fue considerado en [6] solo para el caso $p = 1$ y en [7] también se estudia el caso a una fase con coeficientes térmicos variables pero acotados y Lipschitzianos encontrando solución de tipo similaridad.

Entonces la solución de tipo similaridad (T_1, T_2, s) al problema de Stefan (1)-(6) será

$$T_1(x,t) = (T_f - T_*)\, y_1\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right) + T_f, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{11}$$

$$T_2(x,t) = (T_f - T_*)\, y_2\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right) + T_f, \quad x > s(t), \quad t > 0, \tag{12}$$

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}, \quad t > 0, \tag{13}$$

si y sólo si las funciones y_1, y_2 y el parámetro $\lambda > 0$ satisfacen el siguiente problema diferencial ordinario:

$$2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\eta(1 + \delta y_1^p(\eta))y_1'(\eta) + [(1 + \delta y_1^p(\eta))y_1'(\eta)]' = 0, \qquad 0 < \eta < \lambda, \tag{14}$$

$$y_1(0) = \frac{T_* - T_0}{T_* - T_f} \equiv \beta_1 > 0, \tag{15}$$

$$y_1(\lambda) = 1, \tag{16}$$

$$2\eta(1 + \delta y_2^p(\eta))y_2'(\eta) + [(1 + \delta y_2^p(\eta))y_2'(\eta)]' = 0, \qquad \eta > \lambda, \tag{17}$$

$$y_2(+\infty) = 0, \tag{18}$$

$$y_2(\lambda) = 1, \tag{19}$$

$$y_1'(\lambda) - \frac{k_2^0}{k_1^0}y_2'(\lambda) = -2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\lambda}{(1+\delta)\mathrm{Ste}}, \tag{20}$$

donde $\delta \geq 0$, $p \geq 1$ y $\mathrm{Ste} = \frac{c_1^0\left(T_* - T_f\right)}{l} > 0$ es el número de Stefan. Se probará en la Sección 2 la existencia de solución al problema (1)-(6) a través del análisis del problema diferencial ordinario (14)-(20) definiendo dos operadores contractivos.

2. Existencia de solución de tipo similaridad

Se verá que el problema (14)-(16) es equivalente a una ecuación integral y utilizando el teorema del punto fijo de Banach se probará la existencia de una única solución. Para cada $\lambda > 0$ and $\delta > 0$ fijos se nota con X al conjunto de todas las funciones analíticas $h : [0, \lambda] \to \mathbb{R}$. El conjunto X con la norma del máximo $\|\cdot\|$ es un espacio de Banach. El subconjunto de X dado por

$$K_1 = \{h \in C^\infty[0,\lambda] \,/\, h(0) = \beta_1,\, h(\lambda) = 1,\, 1 \leq h(x) \leq \beta_1,\, \forall x \in [0,\lambda]\} \tag{21}$$

es no vacío y compacto.

Lema 1 *Sea $\delta \geq 0$, $\gamma > 0$, $p \geq 1$. La función $y_1 \in K_1$ es una solución al problema (14)-(16) si y sólo si y_1 es un punto fijo del operador $T_1 : K_1 \to K_1$ dado por:*

$$T_1(h)(\eta) = \beta_1 - \beta_2\,\frac{\displaystyle\int_0^\eta g_h(\xi)\mathrm{d}\xi}{\displaystyle\int_0^\lambda g_h(\xi)\mathrm{d}\xi}, \qquad 0 < \xi < \eta,, \tag{22}$$

con β_1 definida en (15),

$$\beta_2 = \frac{T_f - T_0}{T_* - T_f} > 0, \quad g_h(\xi) = \frac{exp\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\xi^2\right)}{1+\delta h^p(\xi)}, \qquad 0 < \xi < \eta. \tag{23}$$

Prueba. En primer lugar el operador T_1 está bien definido ya que fácilmente puede verse que para cada $y_1 \in K_1$ se tiene que

$$\frac{\exp(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\xi^2)}{1+\delta\beta_1^p} \leq g_{y_1}(\eta) \leq \frac{\exp(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\xi^2)}{1+\delta},$$

luego

$$\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\operatorname{erf}(\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\lambda)}{1+\delta\beta_1^p} < \int_0^\lambda g_{y_1}(\eta)\mathrm{d}\eta \leq \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2(1+\delta)}. \tag{24}$$

Luego, de (21) y (22), se tiene que $T(y_1) \in K_1$.

Si definimos $v_1(\eta) = (1 + \delta y_1^p(\eta))y_1'(\eta)$, la ecuación diferencial ordinaria (14) es equivalente a

$$v_1'(\eta) + 2\eta v_1(\eta) = 0$$

de donde se tiene:

$$y_1(\eta) = a_1 \int_0^\eta g_{y_1}(\xi)\mathrm{d}\xi + a_2,$$

con a_1 y a_2 son constantes a determinar. Imponiendo las condiciones (15) y (16) se tiene que

$$y_1(\eta) = \beta_1 - \beta_2 \frac{\displaystyle\int_0^\eta g_{y_1}(\xi)\mathrm{d}\xi}{\displaystyle\int_0^\lambda g_{y_1}(\xi)\mathrm{d}\xi}, \qquad 0 < \xi < \eta, \tag{25}$$

donde $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ están definidas en (15) y (23) respectivamente. Luego, y_1 es una solución al problema (14)-(16) si y sólo si y_1 es un punto fijo del operador T_1. □

En virtud del Lema 1, el próximo paso es probar que T_1 es un operador contractivo sobre K_1.

Lema 2 *Sea $p \geq 1$ y $\lambda > 0$. El problema (14)-(16) tiene una única solución $y_1 \in K_1$ si y sólo si $0 \leq \delta < \delta_1$ donde $\delta_1 = f_1^{-1}(1)$, con*

$$f_1(\delta) = \beta_2 p\delta(1 + \delta\beta_1^p)(2 + \delta\beta_1^p). \tag{26}$$

Prueba. Sean $y_a, y_b \in K_1$ y $\eta \geq 0$, teniendo en cuenta (23)-(25), el teorema del valor medio y

$$\int_0^\lambda \exp(-\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\xi^2)\delta\left|y_a^p(\xi) - y_b^p(\xi)\right|\mathrm{d}\xi \leq p\,\delta\|y_a - y_b\| \int_0^\lambda \exp(-\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\xi^2)\,\mathrm{d}\xi \leq p\,\delta\|y_a - y_b\|\sqrt{\tfrac{\alpha_1}{\alpha_2}}\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(\sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}\lambda),$$

se obtiene que

$$\|T_1(y_b) - T_1(y_a)\| \leq f_1(\delta)\|y_b - y_a\|, \tag{27}$$

donde $f_1(\delta) = \beta_2 p\delta(1+\delta\beta_1^p)(2+\delta\beta_1^p)$. Como $f_1(0) = 0$, $f_1(+\infty) = +\infty$ y f_1 es una función estrictamente creciente, entonces existe un único $\delta_1 > 0$ such that $f_1(\delta_1) = 1$. Por lo tanto, si $0 \leq \delta < \delta_1$ se tiene que T_1 es un operador contractivo y entonces el problem (14)-(16) tiene una única solución no negativa. □

Ahora se probará que fijado $\delta \geq 0$, $\gamma > 0$, $p \geq 1$ existe solución a las ecuaciones (17)-(19). Análogamente a lo propuesto anteriormente definimos $v_2(\eta) = (1 + \delta y_2^p(\eta))y_2'(\eta)$ y

$$K_2 = \{h \in C^\infty[\lambda, +\infty) \,/\, h(+\infty) = 0,\, h(\lambda) = 1,\, 0 \leq h(x) \leq 1,\, \forall x \in [\lambda, +\infty)\}\,. \tag{28}$$

subconjunto no vacío y compacto de X. Se puede demostrar el siguiente Lema:

Lema 3 *Sea $\delta \geq 0$, $\gamma > 0$, $p \geq 1$. La función $y_2 \in K_2$ es una solución al problema (17)-(19) si y sólo si y_2 es un punto fijo del operador $T_2 : K_2 \to K_2$ dado por:*

$$T_2(h)(\eta) = \frac{\displaystyle\int_\eta^{+\infty} G_{y_2}(\xi)\mathrm{d}\xi}{\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} G_{y_2}(\xi)\mathrm{d}\xi}, \qquad \lambda < \eta, \quad G_h(\xi) = \frac{exp\left(-\xi^2\right)}{1 + \delta h^p(\xi)}, \qquad 0 < \xi < \eta \tag{29}$$

También de manera análoga puede demostrarse el siguiente resultado:

Lema 4 *Sea* $p \geq 1$ *y* $\lambda > 0$. *El problema* (17)-(19) *tiene una única solución* $y_2 \in K_2$ *si y sólo si* $0 \leq \delta < \delta_2$ *donde* $\delta_2 = f_2^{-1}(1)$, *con*

$$f_2(\delta) = p\delta(1 + \delta\beta_1^p)(2 + \delta\beta_1^p). \tag{30}$$

Por último basta ver que exista al menos un valor de $\lambda > 0$ solución de la ecuación de Stefan dada por (20). Teniendo en cuenta los lemas previos podemos enunciar el siguiente resultado:

Lema 5 *Sea* $\delta \geq 0$, $\gamma > 0$, $p \geq 1$. *La ecuación* (20) *tiene al menos una solución* $\lambda > 0$.
Prueba. Reemplazando en (20) las expresiones de las derivadas de y_1 *e* y_2 *y evaluándolas en* $\eta = \lambda$, *es fácil ver que la ecuación que debe verificar* λ *es:*

$$W_1(x) = W_2(x), \quad x \geq 0 \tag{31}$$

con

$$W_1(x) = \frac{\frac{k_2^0}{k_1^0} \, exp(-\lambda^2)}{\displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} G_{y_2}(\xi)\mathrm{d}\xi} + 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1 \mathit{Ste}}\lambda, \qquad W_2(x) = \frac{\beta_2}{exp\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\lambda^2\right)\displaystyle\int_0^{\lambda} g_{y_1}(\xi)\mathrm{d}\xi} \tag{32}$$

Teniendo en cuenta (24) y la siguiente desigualdad

$$\tfrac{1}{1+\delta}\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - \mathrm{erf}(\lambda) \leq \int_{\lambda}^{+\infty} G_{y_2}(\eta)\mathrm{d}\eta \leq \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - \mathrm{erf}(\lambda) \tag{33}$$

es fácil ver que $W_1(0) = +\infty, W_1(+\infty) =$ *constante* $> 0, W_2(0) =$*constante* > 0, $W_2(+\infty) = +\infty$, *luego existe al menos una solución.* □

Ahora se está en condiciones de establecer el Teorema que garantiza la existencia de solución al problema de Stefan (1)-(6).

Teorema 1 *Sea* $p \geq 1$, $\gamma > 0$ *y* $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ *con* δ_1 *y* δ_2 *dados en los Lemas 2 y 4 respectivamente. El problema* $(1) - (6)$ *tiene al menos una solución* (T_1, T_2, s) *dada por* $(11) - (13)$ *respectivamente siendo* y_1 *el único punto fijo del operador dado en* (22), y_2 *el único punto fijo del operador dado en* (29) *y* λ *alguna solución de la ecuación* (31).

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido parcialmente patrocinado por el Proyecto PIP No 0275 de CONICET-UA, Rosario, Argentina, y ANPCyT PICTO Austral 2016 No 0090.

Referencias

[1] M. Natale, and D. Tarzia, *Explicit soltuions to the two-phase Stefan problem for Storm-type materials*, J. Phys. A: Math. Gen., 33 (2000), pp.395-404.

[2] A. Briozzo, and M. Natale, *One-dimensional nonlinear Stefan problems in Storms materials*, One-dimensional nonlinear Stefan problems in Storms materials, Vol. 2 (2014), pp. 1-11.

[3] A. Briozzo, and M. Natale, *Nonlinear Stefan problem with convective boundary condition in Storm's materials*, Zeitschrift fr angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 67(2) (2016), pp.1-11.

[4] A. Briozzo, and M. Natale, *Two-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients and a convective boundary condition*, IMA Journal of Applied Mathematics, (2018), pp. 1-15.

[5] O. Makinde, N. Sandeep, T. Ajayi, and I. Animasaun, *Numerical Exploration of Heat Transfer and Lorentz Force Effects on the Flow of MHD Casson Fluid over an Upper Horizontal Surface of a Thermally Stratified Melting Surface of a Paraboloid of Revolution*, Int. J. Nonlinear Sci. Simul., 19(2-3) (2018), pp. 93-106.

[6] A. Kumar, A. K. Singh,and Rajeev, *A moving boundary problem with variable specific heat and thermal conductivity*, Journal of King Saud University - Science, (2018), doi: https://doi.org/10.1016/j.jksus.2018.05.028.

[7] A. Briozzo, M. Natale, and D. Tarzia, *Existence for an exact solution for a one-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients from Tirskii's method*, Nonlinear Analysis, 67 (2007), pp. 1989-1998.