SOLUCIONES EXPLÍCITAS DE PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO DISTRIBUIDO, FRONTERA Y DISTRIBUIDO-FRONTERA

Julieta Bollati[†], Claudia M. Gariboldi[‡] y Domingo A. Tarzia[†]

[†]*Depto. Matemática - CONICET, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.*
JBollati@austral.edu.ar, DTarzia@austral.edu.ar
[‡] *Depto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Rio Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Rio Cuarto, Argentina.*
cgariboldi@exa.unrc.edu.ar

Resumen:

Se considera un problema estacionario de conducción del calor en un dominio multidimensional acotado Ω para la ecuación de Poisson con fuente g y con condiciones de contorno mixtas dadas por una temperatura b en la porción Γ_1 de frontera y un flujo de calor q en la porción Γ_2 restante de frontera. Además, se considera una familia de problemas estacionarios imponiendo sobre la frontera Γ_1 una condición convectiva con coeficiente α y temperatura exterior b. Se obtienen de manera explícita, para un dominio rectangular, los controles óptimos, los estados del sistema y estados adjuntos para los siguientes cuatro problemas de control óptimo: un problema de control *distribuido* sobre la fuente de energía g, dos problemas de control *frontera* sobre el flujo del calor q y sobre la temperatura b en un entorno externo a través de una condición de Robin, respectivamente y un problema de control óptimo simultáneo *distribuido-frontera* sobre la fuente g y el flujo q. Estas soluciones explícitas podrían ser utilizadas para chequear cálculos numéricos.

Palabras clave: *Ecuaciones variacionales elípticas, Controles óptimos, Condiciones de contorno mixtas, Soluciones explícitas.*
2000 AMS Subject Classification: 35C05,35J25,35J86,35R35,49J20,49K20.

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^n$ cuya frontera regular Γ consiste en la unión de dos porciones disjuntas Γ_1 y Γ_2 con $med(\Gamma_1) > 0$ y $med(\Gamma_2) > 0$. Se presentan los siguientes problemas estacionarios de conducción del calor P y P_α (para cada parámetro $\alpha > 0$) respectivamente, con condiciones de frontera mixtas:

$$\Delta u = g \text{ in } \Omega \qquad u\big|_{\Gamma_1} = b \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \tag{1}$$

$$-\Delta u = g \text{ in } \Omega \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha(u-b) \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \tag{2}$$

donde g es la energía interna en Ω, b es la temperatura sobre Γ_1 para (1) y la temperatura del entorno externo de Γ_1 para (2), q es el flujo de calor sobre Γ_2 y $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia de calor sobre Γ_1, que satisfacen las hipótesis: $g \in H = L^2(\Omega)$, $q \in Q = L^2(\Gamma_2)$ y $b \in B = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Estos pueden ser considerados como problemas estacionarios de Stefan [7].

Sean u y u_α las únicas soluciones de los problemas elípticos (1) and (2), respectivamente, cuyas formulaciones variacionales están dadas por ([5],[7]):

$$a(u,v) = L(v), \ \forall v \in V_0, \ u \in K \tag{3}$$

$$a_\alpha(u_\alpha, v) = L_\alpha(v), \ \forall v \in V, \ u_\alpha \in V \tag{4}$$

donde

$$V = H^1(\Omega)\,; \qquad V_0 = \{v \in V / \, v\big|_{\Gamma_1} = 0\} \quad \text{y} \quad K = v_0 + V_0$$

para $v_0 \in V$ dado, con $v_0\big|_{\Gamma_1} = b$, $(g,h)_H = \int_\Omega gh\,dx$ y $(q,\eta)_Q = \int_{\Gamma_2} q\eta\,d\gamma$,

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx; \qquad a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha(u,v)_{L^2(\Gamma_1)}$$

$$L(v) = (g,v)_H - (q,v)_Q; \qquad L_\alpha(v) = L(v) + \alpha(b,v)_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Vinculados a estos sistemas de estado, se han considerado los cuatro problemas de control óptimo que se detallan a continuación ([6],[8]).

1.1. Control óptimo distribuido sobre la fuente de energía g

En [2] se consideraron los siguientes problemas de control óptimo distribuido:

$$\text{hallar} \quad g_{op} \in H \quad \text{tal que} \quad J_1(g_{op}) = \min_{g \in H} J_1(g), \tag{5}$$

$$\text{hallar} \quad g_{\alpha_{op}} \in H \quad \text{tal que} \quad J_{1\alpha}(g_{\alpha_{op}}) = \min_{g \in H} J_{1\alpha}(g), \tag{6}$$

con $J_1 : H \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_{1\alpha} : H \to \mathbb{R}_0^+$, dados por:

$$J_1(g) = \frac{1}{2} \|u_g - z_d\|_H^2 + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2 \qquad \text{y} \qquad J_{1\alpha}(g) = \frac{1}{2} \|u_{\alpha g} - z_d\|_H^2 + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2$$

donde u_g y $u_{\alpha g}$ denotan las únicas soluciones de los problemas (3) y (4) respectivamente, para datos $q \in Q$, $b \in B$, $z_d \in L^2(\Omega)$ y $M_1 > 0$.

1.2. Control óptimo frontera sobre el flujo del calor q sobre Γ_2

En [3] se estudiaron los siguientes problemas de control óptimo frontera:

$$\text{hallar} \quad q_{op} \in U_{ad} \quad \text{tal que} \quad J_2(q_{op}) = \min_{q \in U_{ad}} J_2(q), \tag{7}$$

$$\text{hallar} \quad q_{\alpha_{op}} \in U_{ad} \quad \text{tal que} \quad J_{2\alpha}(q_{\alpha_{op}}) = \min_{q \in U_{ad}} J_{2\alpha}(q), \tag{8}$$

con $U_{ad} = \{q \in Q : q \geq 0 \text{ en } \Gamma_2\}$, $J_2 : Q \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_{2\alpha} : Q \to \mathbb{R}_0^+$, dados por:

$$J_2(q) = \frac{1}{2} \|u_q - z_d\|_H^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2 \qquad \text{y} \qquad J_{2\alpha}(q) = \frac{1}{2} \|u_{\alpha q} - z_d\|_H^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2$$

donde u_q y $u_{\alpha q}$ son las únicas soluciones de los problemas (3) y (4) respectivamente, para datos $g \in H$, $b \in B$, $z_d \in L^2(\Omega)$ y $M_2 > 0$.

1.3. Control óptimo frontera sobre la temperatura b en un entorno externo de Γ_1

En [1] se consideraron los siguientes problemas de control óptimo frontera:

$$\text{hallar} \quad b_{op} \in H^{1/2}(\Gamma_1) \quad \text{tal que} \quad J_3(b_{op}) = \min_{b \in H^{1/2}(\Gamma_1)} J_3(b), \tag{9}$$

$$\text{hallar} \quad b_{\alpha_{op}} \in H^{1/2}(\Gamma_1) \quad \text{tal que} \quad J_{3\alpha}(b_{\alpha_{op}}) = \min_{b \in H^{1/2}(\Gamma_1)} J_{3\alpha}(q), \tag{10}$$

con $J_3 : H^{1/2}(\Gamma_1)) \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_{3\alpha} : H^{1/2}(\Gamma_1) \to \mathbb{R}_0^+$, dados por:

$$J_3(b) = \frac{1}{2} \|u_b - z_d\|_H^2 + \frac{M_3}{2} \|b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \qquad \text{y} \qquad J_{3\alpha}(b) = \frac{1}{2} \|u_{\alpha b} - z_d\|_H^2 + \frac{M_3}{2} \|b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2$$

donde u_b y $u_{\alpha b}$ son las únicas soluciones de los problemas (3) y (4) respectivamente, para datos $g \in H$, $q \in Q$, $z_d \in L^2(\Omega)$ y $M_3 > 0$.

1.4. Control óptimo simultáneo distribuido-frontera sobre la fuente g y el flujo q

En [4] se estudiaron los siguientes problemas de control óptimo simultáneo distribuido-frontera:

$$\text{hallar} \quad (g,q)_{op} \in H \times U_{ad} \quad \text{tal que} \quad J_4((g,q)_{op}) = \min_{g \in H, q \in U_{ad}} J_4(g,q), \tag{11}$$

$$\text{hallar} \quad (g,q)_{\alpha_{op}} \in H \times U_{ad} \quad \text{tal que} \quad J_{4\alpha}((g,q)_{\alpha_{op}}) = \min_{g \in H, q \in U_{ad}} J_{4\alpha}(g,q), \tag{12}$$

con los funcionales costo $J_4 : H \times Q \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_{4\alpha} : H \times Q \to \mathbb{R}_0^+$ dados por:

$$J_4(g,q) = \frac{1}{2}\left\|u_{(g,q)} - z_d\right\|_H^2 + \frac{M_1}{2}\left\|g\right\|_H^2 + \frac{M_2}{2}\left\|q\right\|_Q^2$$

$$J_{4\alpha}(g,q) = \frac{1}{2}\left\|u_{\alpha(g,q)} - z_d\right\|_H^2 + \frac{M_1}{2}\left\|g\right\|_H^2 + \frac{M_2}{2}\left\|q\right\|_Q^2$$

donde $u_{(g,q)}$ y $u_{\alpha(g,q)}$ son las únicas soluciones de los problemas (3) y (4) respectivamente, para datos $b \in B$, $z_d \in L^2(\Omega)$, $M_1 > 0$ y $M_2 > 0$.

En los trabajos [1, 2, 3, 4] se obtuvieron resultados de existencia y unicidad de los controles óptimos, como así también resultados de convergencia, cuando el coeficiente de transferencia del calor α tiende a infinito, de los controles óptimos, los estados del sistema y los estados adjuntos correspondientes, en determinados espacios de Sobolev.

En este trabajo se consideran dominios Ω particulares, de forma rectangular y circular en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, y se calculan de manera explícita los controles óptimos, los estados del sistema y estados adjuntos para los cuatro problemas de control óptimo planteados anteriormente.

En la Sección 2 se presenta solamente, por motivo de espacio, las soluciones explícitas en un dominio rectangular en $\mathbb{R}^2$.

2. Soluciones Óptimas en un dominio rectangular en el plano

Si se considera el dominio $\Omega = (0, x_0) \times (0, y_0)$ con $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, se obtiene que las soluciones de los problemas (1) y (2) están dadas por:

$$u(x,y) = -g\frac{x^2}{2} + (gx_0 - q)x + b,$$

$$u_\alpha(x,y) = -g\frac{x^2}{2} + (gx_0 - q)x + \frac{gx_0 - q}{\alpha} + b,$$

con datos g, b, α y q constantes. Se considera además $z_d \in \mathbb{R}$.

Para los problemas de control óptimo distribuidos (5) y (6), las soluciones óptimas son:

$$g_{op} = \frac{x_0^2\left(\frac{5}{12}qx_0 - \frac{2}{3}(b - z_d)\right)}{\left(\frac{4}{15}x_0^4 + 2M_1\right)},$$

$$g_{\alpha_{op}} = \frac{\left[\frac{5}{12}qx_0^4 - \left(-\frac{5}{3}\frac{q}{\alpha} + \frac{2}{3}(b - z_d)\right)x_0^3 - \frac{2}{\alpha}\left(-\frac{q}{\alpha} + (b - z_d)\right)x_0^2\right]}{\left(M_1 x_0 + \frac{2}{15}x_0^5 + \frac{2}{3\alpha}x_0^4 + \frac{1}{\alpha^2}x_0^3\right)}.$$

Para los problemas de control óptimo fronteras (7) y (8), se obtienen:

$$q_{op} = \frac{\left(\frac{5}{12}gx_0^2 + (b - z_d)\right)}{2x_0\left(\frac{M_2}{x_0^3} + \frac{1}{3}\right)},$$

$$q_{\alpha_{op}} = \frac{\left[gx_0^2\left(\frac{2}{\alpha^2} + \frac{5}{3}\frac{x_0}{\alpha} + \frac{5}{12}x_0^2\right) + (b - z_d)x_0\left(x_0 + \frac{2}{\alpha}\right)\right]}{2\left(M_2 + \frac{x_0^3}{3} + \frac{x_0^2}{\alpha} + \frac{x_0}{\alpha^2}\right)}.$$

En los problemas de control óptimo fronteras (9) y (10), los controles óptimos están dados por:

$$b_{op} = \frac{\left(-\frac{1}{3}gx_0^2 + q\frac{x_0}{2} + z_d\right)}{\left(1 + \frac{M_3}{x_0}\right)},$$

$$b_{\alpha_{op}} = \frac{\left[g\frac{x_0^3}{3} - (gx_0 - q)x_0^2 - 2\left(\frac{gx_0 - q}{\alpha} - z_d\right)x_0\right]}{2\left(x_0 + M_3\right)}.$$

Para el problema de control óptimo distribuido-frontera (11), la solución óptima está dada por:

$$(g,q)_{op} = \left(-\frac{(b-z_d)}{x_0^2}C_4, -\frac{(b-z_d)}{x_0}C_5\right)$$

donde:

$$C_4 = \frac{1}{2\left(\frac{2}{15}+\frac{M_4}{x_0^4}\right)}\left(\frac{2}{3} - \frac{\frac{5}{12}\left(-\frac{5}{18}+2\left(\frac{2}{15}+\frac{M_4}{x_0^5}\right)\right)}{4\left(\frac{2}{15}+\frac{M_4}{x_0^4}\left(\frac{1}{3}+\frac{M_5}{x_0^3}\right)-\frac{25}{144}\right)}\right),$$

$$C_5 = \frac{\left[\frac{5}{18}-2\left(\frac{2}{15}+\frac{M_1}{x_0^4}\right)\right]}{\left[\left(\frac{8}{15}+4\frac{M_4}{x_0^4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{M_1}{x_0^4}-\frac{25}{144}\right)\right]},$$

y para el problema de control óptimo distribuido-frontera (12) que depende del parámetro $\alpha > 0$, se obtiene:

$$(g,q)_{\alpha_{op}} = \left(-\frac{(b-z_d)}{x_0^2}C_{4\alpha}, -\frac{(b-z_d)}{x_0}C_{5\alpha}\right)$$

donde

$$C_{4\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{4}{15}+\frac{4}{3}\frac{1}{\alpha x_0}+\frac{2}{\alpha^2 x_0^2}+\frac{2M_4}{x_0^4}\right)}\left\{\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{\alpha x_0}\right)+D_{4\alpha}\right\},$$

$$C_{5\alpha} = \frac{\left[\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{3\alpha x_0}+\frac{2}{\alpha x_0}\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{\alpha x_0}\right)-\left(\frac{4}{15}+\frac{4}{3\alpha x_0}+\frac{2}{\alpha^2 x_0^2}+\frac{M_4}{x_0^4}\right)\left(1+\frac{2}{\alpha x_0}\right)\right]}{\left[\left(\frac{8}{15}+\frac{8}{3\alpha x_0}+\frac{4}{\alpha^2 x_0^2}+\frac{4M_4}{x_0^4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\alpha x_0}+\frac{1}{\alpha^2 x_0^2}+\frac{M_5}{x_0^3}\right)-\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{3\alpha x_0}+\frac{2}{\alpha^2 x_0^2}\right)^2\right]},$$

con

$$D_{4\alpha} = \frac{\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{3\alpha x_0}+\frac{2}{\alpha^2 x_0^2}\right)\left[\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{\alpha x_0}+\frac{2}{\alpha^2 x_0^2}\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{\alpha x_0}\right)-\left(\frac{4}{15}+\frac{4}{3\alpha x_0}+\frac{2}{\alpha^2 x_0^2}+\frac{2M_4}{x_0^4}\right)\left(1+\frac{2}{\alpha x_0}\right)\right]}{\left[\left(\frac{8}{15}+\frac{8}{3\alpha x_0}+\frac{4}{\alpha^2 x_0^2}+\frac{4M_4}{x_0^4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\alpha x_0}+\frac{1}{\alpha^2 x_0^2}+\frac{M_5}{x_0^3}\right)-\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{3\alpha x_0}+\frac{2}{\alpha^2 x_0^2}\right)^2\right]}.$$

Observación. Resultados análogos pueden obtenerse también para los siguientes dominios:
i) Corona circular en $\mathbb{R}^2$: $\Omega = \{(r,\theta) : r_1 \le r \le r_2, 0 \le \theta \le 2\pi\}$,
ii) Corona circular en $\mathbb{R}^3$: $\Omega = \{(r,\theta,\varphi) : r_1 \le r \le r_2, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi\}$.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos PIP No 0534 de CONICET–Univ. Austral, Rosario, Argentina, PPI No C468 de SECyT-UNRC, Río Cuarto, Argentina y AFOSR-SOARD Grant FA9550-14-1-0122.

REFERENCIAS

[1] F. BEN BELGACEM - H. EL FEKIH - H. METOUI, *Singular perturbation for the Dirichlet boundary control of elliptic problems*, ESAIM: M2AN, 37 (2003), 833-850.

[2] C.M. GARIBOLDI - D.A. TARZIA, *Convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity*, Appl. Math. Optim., 47 (2003), 213-230.

[3] C.M. GARIBOLDI AND D.A. TARZIA, *Convergence of boundary optimal control problems with restrictions in mixed elliptic Stefan-like problems*, Adv. in Diff. Eq. and Control Processes, 1(2) (2008), 113-132.

[4] C. M. GARIBOLDI - D. A. TARZIA, *Existence, Uniqueness and Convergence of Simultaneous Distributed-Boundary Optimal Control Problems*, Control and Cybernetics, 44(1) (2015), 5-17.

[5] O. KINDERLEHRER - G. STAMPACCHIA, *An introduction to variational inequalities and their applications*, SIAM, Philadelphia (2000).

[6] J.L. LIONS, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux drives partielles*, Dunod, Paris (1968).

[7] D.A. TARZIA, *Sur le problème de Stefan à deux phases*, C.R. Acad. Sc. Paris, 288A (1979), 941-944.

[8] F. TRÖLSTZSCH, *Optimal control of partial differetnial equations. Theory, methods and applications*, American Math. Soc., Providence (2010).