UN PROBLEMA DE STEFAN A UNA FASE PARA LA ECUACIÓN DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN CON UNA FUENTE DE CALOR

Julieta Bollati[†‡] y Adriana C. Briozzo[†‡]

[†]*Depto. Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina,*
[‡]*CONICET, Argentina, jbollati@austral.edu.ar, abriozzo@austral.edu.ar*

Resumen: Se considera un problema de Stefan a una fase para la ecuación de convección-difusión con presencia de una particular fuente de calor. Se asumen una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo y coeficientes térmicos variables dependientes de la temperatura. Se obtiene un problema diferencial ordinario equivalente que da lugar a una ecuación integral acoplada a una condición sobre el parámetro que caracteriza la frontera libre, la cual se resuelve a través de un teorema de punto fijo.

Palabras clave: *problema de Stefan, ecuación de convección-difusión, coeficientes térmicos variables, soluciones de similaridad.*
2000 AMS Subject Classification: 80A22-35R35-35K05-47H10

1. INTRODUCCIÓN

Motivados por [8, 9], en este trabajo se considera un problema de frontera libre en un dominio semi-infinito $x > 0$ para la ecuación no lineal de convección-difusión.

El problema a resolver constituye un problema de Stefan no clásico debido a que contempla la existencia de una fuente de energía interna [3, 7]. Además se considera la presencia de coeficientes térmicos no constantes, dependientes de la temperatura [1, 4, 5, 6].

El problema consiste en hallar la temperatura $T = T(x,t)$ en el dominio $0 < x < s(t)$ y la frontera libre $x = s(t)$ de manera que:

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) - v(T)\frac{\partial T}{\partial x} - F(T), \qquad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{1a}$$

$$T(0,t) = T^*, \qquad t > 0, \tag{1b}$$

$$T(s(t),t) = T_m, \qquad t > 0, \tag{1c}$$

$$k\left(T(s(t),t)\right)\frac{\partial T}{\partial x}(s(t),t) = -\rho_0 \ell \dot{s}(t), \qquad t > 0, \tag{1d}$$

$$s(0) = 0, \tag{1e}$$

donde ρ es la densidad de masa, c el calor específico y k la conductividad térmica. Se denota con ρ_0, c_0 y k_0 a la densidad de masa, el calor específico y la conductividad térmica de referencia. El calor latente está dado por el coeficiente constante $\ell > 0$. Se asume que, la temperatura en el borde fijo T^* y la temperatura de cambio de fase T_m satisfacen la siguiente relación $T^* > T_m$ y que la velocidad que caracteriza al término convectivo y la fuente de calor vienen dadas por

$$v(T) = \frac{\mu(T)}{\sqrt{t}}, \qquad F(T) = \frac{\beta(T)}{t},$$

donde μ y β son funciones conocidas de la temperatura.

2. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN

Para probar existencia de solución seguiremos la metodología dada en [2, 6].

Teorema 1 *Sea* $\xi = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_0 t}}$ *la variable de similaridad donde* $\alpha_0 = \frac{k_0}{\rho c_0}$ *es la difusividad térmica. El problema* (1a)-(1e) *tiene una solución de similaridad* (T, s) *dada por*

$$\begin{aligned} T(x,t) &= f(\xi)(T^* - T_m) + T_m, \qquad && 0 < x < s(t),\ t > 0, \\ s(t) &= 2\lambda\sqrt{\alpha_0 t} && t > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

si y sólo si la función $f > 0$ y el parámetro $\lambda > 0$ satisfacen el siguiente problema diferencial ordinario

$$\Big(L^*(f(\xi))f'(\xi)\Big)' + 2\xi N^*(f(\xi))f'(\xi) - 2\mu^*(f(\xi))f'(\xi) - \beta^*(f(\xi)) = 0, \qquad 0 < \xi < \lambda, \tag{3a}$$

$$f(0) = 1, \tag{3b}$$

$$f(\lambda) = 0, \tag{3c}$$

acoplados a la condición

$$L^*(f(\lambda))f'(\lambda) = -\tfrac{2\lambda}{\text{Ste}}, \tag{4}$$

donde

$$L^*(f) = \tfrac{k(T)}{k_0}, \qquad N^*(f) = \tfrac{\rho(T)c(T)}{\rho_0 c_0}, \qquad \mu^*(f) = \tfrac{\mu(T)}{\rho_0 c_0 \sqrt{\alpha_0}}, \qquad \beta^*(f) = \tfrac{4\beta(T)}{(T^*-T_m)\rho_0 c_0},$$

y el número de Stefan está dado por $\text{Ste} = \frac{c_0(T^*-T_m)}{\ell}$

Se asumirá que L^*, N^*, μ^* y β^* satisfacen las siguientes hipótesis:

$$\begin{cases} \text{Existen } L_m > 0 \text{ , } L_M > 0 \text{ y } \widetilde{L} > 0 \text{ tales que} \\ L_m \leq L^*(f(\xi)) \leq L_M, \qquad \forall f \in C^0(\mathbb{R}_0^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_0^+),\ \forall \xi \in \mathbb{R}_0^+. \\ |L^*(f_1(\xi)) - L^*(f_2(\xi))| \leq \widetilde{L}\|f_1 - f_2\|,\ \ \forall f_1, f_2 \in C^0(\mathbb{R}_0^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_0^+) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}_0^+. \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \text{Existen } N_m > 0 \text{ , } N_M > 0 \text{ y } \widetilde{N} > 0 \text{ tales que} \\ N_m \leq N^*(f(\xi)) \leq N_M, \quad \forall f \in C^0(\mathbb{R}_0^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_0^+),\ \xi \in \mathbb{R}_0^+. \\ |N^*(f_1(\xi)) - N^*(f_2(\xi))| \leq \widetilde{N}\|f_1 - f_2\|,\ \ \forall f_1, f_2 \in C^0(\mathbb{R}_0^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_0^+),\ \xi \in \mathbb{R}_0^+. \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \text{Existen } \mu_m > 0 \text{ , } \mu_M > 0 \text{ y } \widetilde{\mu} > 0 \text{ tales que} \\ \mu_m \leq \mu^*(f(\xi)) \leq \mu_M, \qquad \forall f \in C^0(\mathbb{R}_0^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_0^+),\ \xi \in \mathbb{R}_0^+. \\ |\mu^*(f_1(\xi)) - \mu^*(f_2(\xi))| \leq \widetilde{\mu}\ \|f_1 - f_2\|,\ \ \forall f_1, f_2 \in C^0(\mathbb{R}_0^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_0^+),\ \xi \in \mathbb{R}_0^+. \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \text{Existen } \beta_m > 0 \text{ , } \beta_M > 0 \text{ y } \widetilde{\beta} > 0 \text{ tales que} \\ \beta_m \leq \beta^*(f(\xi)) \leq \beta_M, \qquad \forall f \in C^0(\mathbb{R}_0^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_0^+),\ \xi \in \mathbb{R}_0^+. \\ |\beta^*(f_1(\xi)) - \beta^*(f_2(\xi))| \leq \widetilde{\beta}\ \|f_1 - f_2\|,\ \ \forall f_1, f_2 \in C^0(\mathbb{R}_0^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_0^+),\ \xi \in \mathbb{R}_0^+. \end{cases} \tag{8}$$

Lema 1 *Fijado $\lambda > 0$ la función f es solución de* (3a)-(3c) *si y sólo si f es punto fijo del operador $\mathcal{H} : C^0[0,\lambda] \to C^0[0,\lambda]$ dado por:*

$$\mathcal{H}(h)(\xi) = (1 + \chi(h)(\xi)) - (1 + \chi(h)(\xi))\,\frac{\Phi(h)(\xi)}{\Phi(h)(\lambda)}, \qquad 0 \leq \xi \leq \lambda, \tag{9}$$

donde $C^0[0,\lambda]$ representa la funciones continuas en el intervalo $[0,\lambda]$ y donde

$$\chi(h)(\xi) = \int_0^\xi \tfrac{E(h)(z)}{L^*(h)(z)} w(h)(z)\,\mathrm{d}z, \qquad \Phi(h)(\xi) = \int_0^\xi \tfrac{E(h)(z)}{L^*(h)(z)}\,\mathrm{d}z,$$

con

$$E(h)(z) = \tfrac{U(h)(z)}{I(h)(z)}, \qquad w(h)(z) = \int_0^z \tfrac{\beta^*(h)(\sigma)}{E(h)(\sigma)}\mathrm{d}\sigma.$$

siendo

$$U(h)(z) = \exp\left(2\int_0^z \tfrac{\mu^*(h)(\sigma)}{L^*(h)(\sigma)}\mathrm{d}\sigma\right), \qquad I(h)(z) = \exp\left(2\int_0^z \tfrac{\sigma N^*(h)(\sigma)}{L^*(h)(\sigma)}\mathrm{d}\sigma\right)$$

Para analizar la existencia de solución del problema (3)-(4), fijado un $\lambda > 0$ se estudiará en primer lugar la ecuación integral

$$\mathcal{H}(f)(\xi) = f(\xi), \qquad 0 \leq \xi \leq \lambda. \tag{10}$$

A tal fin utilizaremos el teorema de punto fijo de Banach aplicado al operador $\mathcal{H}$.

Lema 2 *Para toda $z \in [0, \lambda]$, $h \in C^0[0, \lambda]$, se verifican las siguientes desigualdades*

$$\exp\left(2\tfrac{\mu_m}{L_M}z\right) \leq U(h)(z) \leq \exp\left(2\tfrac{\mu_M}{L_m}z\right), \qquad \exp\left(\tfrac{N_m}{L_M}z^2\right) \leq I(h)(z) \leq \exp\left(\tfrac{N_M}{L_m}z^2\right), \tag{11}$$

$$\exp\left(-\tfrac{N_M}{L_m}z^2\right) \leq \frac{\exp\left(2\frac{\mu_m}{L_M}z\right)}{\exp\left(\frac{N_M}{L_m}z^2\right)} \leq E(h)(z) \leq \frac{\exp\left(2\frac{\mu_M}{L_m}z\right)}{\exp\left(\frac{N_m}{L_M}z^2\right)} \leq \exp\left(2\tfrac{\mu_M}{L_m}z\right), \tag{12}$$

$$\tfrac{z}{L_M}\exp\left(-\tfrac{N_M}{L_m}z^2\right) \leq \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\tfrac{\sqrt{L_m}}{L_M\sqrt{N_M}}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\tfrac{N_M}{L_m}}z\right) \leq \Phi(h)(z) \leq \tfrac{1}{2\mu_M}\exp\left(2\tfrac{\mu_M}{L_m}z\right). \tag{13}$$

$$|w(h)(z)| \leq \beta_M\lambda\exp\left(\tfrac{N_M}{L_m}\lambda^2\right), \qquad |\chi(h)(z)| \leq \exp\left(\tfrac{2\mu_M}{L_m}\lambda + \tfrac{N_M}{L_m}\lambda^2\right)\tfrac{\lambda^2\beta_M}{L_m}. \tag{14}$$

Lema 3 *Dado $\lambda > 0$, para toda $z \in [0, \lambda]$ y $f_1, f_2 \in C^0[0, \lambda]$ se satisfacen las siguientes desigualdades*

$$|U(f_1)(z) - U(f_2)(z)| \leq D_1(\lambda)\|f_1 - f_2\|, \qquad |I(f_1)(z) - I(f_2)(z)| \leq D_2(\lambda)\|f_1 - f_2\|,$$

$$|E(f_1)(z) - E(f_2)(z)| \leq D_3(\lambda)\|f_1 - f_2\|, \qquad |\Phi(f_1)(z) - \Phi(f_2)(z)| \leq \lambda\, D_4(\lambda)\|f_1 - f_2\|,$$

$$|w(f_1)(z) - w(f_2)(z)| \leq D_5(\lambda)\|f_1 - f_2\|, \qquad |\chi(f_1)(z) - \chi(f_2)(z)| \leq \lambda\, D_6(\lambda)\|f_1 - f_2\|,$$

donde

$$D_1(\lambda) = \frac{2\exp\left(\frac{2\mu_M}{L_m}\right)}{L_m^2}\lambda\left(\mu_M\widetilde{L} + L_m\widetilde{\mu}\right),$$

$$D_2(\lambda) = \frac{\exp\left(\frac{N_M}{L_m}\lambda^2\right)}{L_m^2}\lambda^2\left(N_M\widetilde{L} + L_m\widetilde{N}\right),$$

$$D_3(\lambda) = \exp\left(\tfrac{N_M}{L_m}\lambda^2\right)D_1(\lambda) + \exp\left(2\tfrac{\mu_M}{L_m}\lambda\right)D_2(\lambda),$$

$$D_4(\lambda) = \tfrac{1}{L_m^2}\left(\widetilde{L}\exp\left(2\lambda\tfrac{\mu_M}{L_m}\right) + L_mD_3(\lambda)\right),$$

$$D_5(\lambda) = \lambda\exp\left(\tfrac{N_M}{L_m}\lambda^2\right)\left(\widetilde{\beta} + \beta_M\exp\left(\tfrac{N_M}{L_m}\lambda^2\right)D_3(\lambda)\right)$$

$$D_6(\lambda) = \frac{\exp\left(2\frac{\mu_M}{L_m}\lambda\right)}{L_m}\lambda D_5(\lambda) + \tfrac{\beta_M}{L_m}\lambda^2\exp\left(\tfrac{N_M}{L_m}\lambda^2\right)\left(D_3(\lambda) + \tfrac{\widetilde{L}}{L_m}\exp\left(2\tfrac{\mu_M}{L_m}\lambda\right)\right)$$

Lema 4 *Dadas $f_1, f_2 \in C^0[0, \lambda]$ se tiene que el operador $\mathcal{H}$ satisface*

$$||\mathcal{H}(f_1) - \mathcal{H}(f_2)|| \leq \mathcal{E}(\lambda)||f_1 - f_2||,$$

donde

$$\mathcal{E}(\lambda) = 2D_6(\lambda) + D^*(\lambda)\left(1 + D^\dagger(\lambda)\right)$$

con D_6 dado por (15)*, y*

$$D^*(\lambda) = 2L_M\exp\left(\tfrac{N_M}{L_m}\lambda^2\right)D_4(\lambda), \qquad D^\dagger(\lambda) = \exp\left(\tfrac{2\mu_M}{L_m}\lambda + \tfrac{N_M}{L_m}\lambda^2\right)\tfrac{\lambda^2\beta_M}{L_m}.$$

Además $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\lambda)$ verifica

$$\mathcal{E}(0) = \tfrac{2L_M\widetilde{L}}{L_m^2}, \qquad \mathcal{E}(+\infty) = +\infty, \qquad \mathcal{E}'(\lambda) > 0, \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Teorema 2 *Sean L^*, N^*, μ^* y β^* que satisfacen* (5)-(8). *Asumiendo que* $\frac{2L_M\widetilde{L}}{L_m^2} < 1$, *existe* $\overline{\lambda} = \mathcal{E}^{-1}(1)$ *tal que para* $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ *el operador* $\mathcal{H}$ *tiene un único punto fijo* $f_\lambda \in C^0[0,\lambda]$. *Es decir,* $f_\lambda(\xi)$ *satisface* (3a)-(3c).

Resta hallar $0 < \widetilde{\lambda} < \overline{\lambda}$ tal que el par $(f_{\widetilde{\lambda}}, \widetilde{\lambda})$ sea solución (4) .

Lema 5 *La ecuación* (4) *es equivalente a*

$$\mathcal{V}_{f_\lambda}(\lambda) = \lambda, \qquad 0 < \lambda < \overline{\lambda}, \tag{15}$$

donde $\mathcal{V}_{f_\lambda}(\lambda)$ *está definido por*

$$\mathcal{V}_{f_\lambda}(\lambda) := \tfrac{\text{Ste}}{2}\left(1 + \chi(f_\lambda)(\lambda)\right)\tfrac{E(f_\lambda)(\lambda)}{\Phi(f_\lambda)(\lambda)}, \qquad 0 < \lambda < \overline{\lambda}, \tag{16}$$

y satisface

$$\mathcal{V}_{f_\lambda}(\lambda) < \mathcal{W}(\lambda) := \frac{\frac{\text{Ste}\sqrt{N_M}}{\sqrt{\pi L_m}}\exp\left(\frac{2\mu_M}{L_m}\overline{\lambda}\right)\left(1+\frac{\beta_M}{L_m}\overline{\lambda}^2\exp\left(\frac{2\mu_M}{L_m}\overline{\lambda}+\frac{N_M}{L_m}\overline{\lambda}^2\right)\right)}{\operatorname{erf}\sqrt{\frac{N_M}{L_m}}\lambda}, \qquad \forall\, 0 < \lambda < \overline{\lambda}.$$

Lema 6 *Si* $\mathcal{W}(\overline{\lambda}) < \overline{\lambda}$, *entonces existe* $0 < \widetilde{\lambda} < \overline{\lambda}$ *tal que el par* $(f_{\widetilde{\lambda}}, \widetilde{\lambda})$ *satisface* (15).

Teorema 3 *Sean L^*, N^*, μ^* y β^* que satisfacen* (5)-(8) *y* $\frac{2L_M\widetilde{L}}{L_m^2} < 1$. *Si* $\mathcal{W}(\overline{\lambda}) < \overline{\lambda}$ *entonces existe* $(f_{\widetilde{\lambda}}, \widetilde{\lambda})$ *solución al sistema* (3)-(4).

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente patrocinado por el Proyecto PIP No 0275 de CONICET-UA, Rosario, Argentina, y ANPCyT PICTO Austral 2016 No 0090, y por European Union's Horizon 2020 Research and Innovation Programme under the Marie Sklodowska-Curie grant agreement 823731 CONMECH.

REFERENCIAS

[1] J. BOLLATI, M.F. NATALE, J. SEMITIEL, AND D. TARZIA, *Existence and uniqueness of solution for two one-phase Stefan problems with variable thermal coefficients*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 51 (2020), pp.1-11.

[2] A. C. BRIOZZO, M. F. NATALE AND D. A. TARZIA, *Existence of an exact solution for a one-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients from Tirskii's method*, Nonlinear Analysis, 67 (2007) pp. 1989–1998.

[3] A. C. BRIOZZO, M. F. NATALE AND D. A. TARZIA, *Explicit solutions for a two-phase unidimensional Lamé-Clapeyron-Stefan problem with source terms in both phases*, J. Math. Anal. Appl., 329 (2007) pp. 145–162.

[4] A.C. BRIOZZO, AND M. F. NATALE, *One-dimensional nonlinear Stefan problems in Storm's materials*, Mathematics, 2 (2014), pp.1-11.

[5] A.C. BRIOZZO, AND M. F. NATALE, *Two Stefan problems for a non-classical heat equation with nonlinear thermal coefficients*, Differential and Integral Equations, 27 (2014), pp. 1187-1202.

[6] A.C. BRIOZZO, AND M. F. NATALE, *Non-classical Stefan problem with nonlinear thermal coefficients and a Robin boundary condition*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 49 (2019), pp. 159-168.

[7] J. MENALDI AND D.A. TARZIA, *Generalized Lamé-Clapeyron solution for a one-phase source Stefan problem*, Comp. Appl. Math., 12 (1993), pp. 123–142.

[8] A. SINGH, A. KUMAR, AND R. RAJEEV, *A Stefan problem with variable thermal coefficients and moving phase change material*, Journal of King Saud University - Science, 31 (2019), pp. 1064-1069.

[9] M. TURKYILMAZOGLU, *Stefan problems for moving phase change materials and multiple solutions*, International Journal of Thermal Sciences, 126 (2018), pp. 67-73.