UN PROBLEMA DE TIPO STEFAN CORRESPONDIENTE A LA EVAPORACIÓN DE UNA GOTA DE COMBUSTIBLE LÍQUIDA

Julieta Bollati[†‡], Adriana C. Briozzo[†‡] y María S. Gutierrez[†]

[†]*Depto de Matemática, FCE-Universidad Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario, Argentina,* *ma.soledad.g@gmail.com*
[‡]*CONICET, Argentina, jbollati@austral.edu.ar, abriozzo@austral.edu.ar*

Resumen: Se considera un problema de Stefan con simetría esférica correspondiente al proceso de evaporación de una gota de combustible líquida. Se obtiene una representación integral para el problema y se demuestra existencia y unicidad de solución, local en el tiempo, utilizando un teorema de punto fijo.

Palabras clave: *problema de Stefan, simetría esférica, ecuación integral de Volterra*
2000 AMS Subject Classification: 35R35-80A22-45D05.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo, se estudia el proceso de evaporación de una gota de combustible líquida la cual es inmersa en un gas caliente. Dicho proceso puede modelarse matemáticamente a través de un problema de Stefan con simetría esférica, el cual consiste en hallar la temperatura de la gota $T = T(r,t)$ y la frontera libre (radio de la gota) $R = R(t)$ de manera que

$$\rho c T_t = \frac{k}{r^2}(r^2 T_t)_r, \qquad 0 \leq r < R(t)\ ,\ t > 0 \tag{1}$$

$$T(0,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{2}$$

$$kT_r(R(t),t) + h(t)(T(R(t),t) - T_g) = \rho L \dot{R}(t), \qquad t > 0 \tag{3}$$

$$T(r,0) = T_0(r), \qquad 0 \leq r < R(t)\ ,\ t > 0 \tag{4}$$

$$T(R(t),t) = T_s \qquad t > 0, \tag{5}$$

$$R(0) = R_0, \tag{6}$$

donde c representa el calor específico, k la conductividad térmica, ρ la densidad y L el calor específico de evaporación. R_0 y T_0 representan el radio y la temperatura iniciales de la gota. En la frontera libre se asume que la gota tiene una temperatura constante T_s y se considera una condición convectiva (3), siendo T_g la temperatura del gas y $h(t)$ el coeficiente de transferencia de calor.

El problema (1)-(6) fue estudiado numéricamente en [11], asumiendo una condición particular sobre $\dot{R}(t)$. El proceso de evaporación de una gota esférica a través de su calentamiento ha sido estudiado en [7]. Otros problemas de tipo Stefan con simetría esférica pueden encontrarse en la solidificación del metal en procesos de colada continua [8, 10, 5] o en la difusión de fármacos a través de esferas polímeras [6].

2. PRELIMINARES

A partir de la solución fundamental de la ecuación del calor, la función de Green y de Neumann, dadas respectivamente por

$$\overline{K}(r,t,\rho,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(\frac{-(r-\rho)^2}{4(t-\tau)}\right) & \text{si} \quad \tau < t \\ 0 & \text{si} \quad \tau \geq t, \end{cases}$$

$$\overline{G}(r,t,\rho,\tau) = \overline{K}(r,t,\rho,\tau) - \overline{K}(-r,t,\rho,\tau), \qquad \overline{N}(r,t,\rho,\tau) = \overline{K}(r,t,\rho,\tau) + \overline{K}(-r,t,\rho,\tau).$$

se definen las siguientes funciones, como en [3], para $r, \rho \neq 0$:

$$K(r,t,\rho,\tau) = \frac{\overline{K}(r,\alpha t,\rho,\alpha\tau)}{r\rho}, \qquad G(r,t,\rho,\tau) = \frac{\overline{G}(r,\alpha t,\rho,\alpha\tau)}{r\rho} \qquad N(r,t,\rho,\tau) = \frac{\overline{N}(r,\alpha t,\rho,\alpha\tau)}{r\rho}. \tag{7}$$

A partir de las propiedades conocidas en la literatura para las funciones $\overline{K}$, $\overline{G}$ y $\overline{N}$ se tiene el siguiente resultado, el cual se utilizará para obtener la formulación integral del problema de Stefan (1)-(6).

Lema 1 *Se verifican las siguientes propiedades*

i. $G_t - \frac{\alpha}{r^2}\left(r^2 G_r\right)_r = 0, \qquad G_\tau + \frac{\alpha}{\rho^2}(\rho^2 G_\rho)_\rho = 0.$

ii. $G_t(r,t,\rho,\tau) = \frac{\alpha}{r\rho}\overline{G}_t(r,\alpha t,\rho,\alpha\tau), \qquad G_\tau(r,t,\rho,\tau) = \frac{\alpha}{r\rho}\overline{G}_\tau(r,\alpha t,\rho,\alpha\tau)$

iii. $G_r(r,t,\rho,\tau) = -\frac{1}{r^2\rho}\overline{G}(r,\alpha t,\rho,\alpha\tau) + \frac{1}{r\rho}\overline{G}_r(r,\alpha t,\rho,\alpha\tau)$

iv $G_{rr}(r,t,\rho,\tau) = \frac{2}{r^3\rho}\overline{G}(r,\alpha t,\rho,\alpha\tau) - \frac{2}{r^2\rho}\overline{G}_r(r,\alpha t,\rho,\alpha\tau) + \frac{1}{r\rho}\overline{G}_{rr}(r,\alpha t,\rho,\alpha\tau).$

v. La función N verifica de manera análoga a G las propiedades i)-iv).

*vi. Para toda φ continua en $[0,t]$ se tiene la siguiente **Fórmula del salto**:*

$$\lim_{r\to R(t)^\pm} \int_0^t \varphi(\tau)K_r(r,t,R(\tau),\tau)d\tau = \mp\frac{\varphi(t)}{2R^2(t)} + \int_0^t \varphi(\tau)K_r(R(t),t,R(\tau),\tau)d\tau.$$

$$\lim_{r\to R(t)^\pm} \int_0^t \varphi(\tau)R^2(\tau)K_r(r,t,R(\tau),\tau)d\tau = \mp\frac{\varphi(t)}{2} + \int_0^t \varphi(\tau)R^2(\tau)K_r(R(t),t,R(\tau),\tau)d\tau.$$

3. FORMULACIÓN INTEGRAL

En el siguiente teorema se obtiene la formulación integral del problema en estudio, a partir de la cual se probará existencia y unicidad de solución local en el tiempo.

Teorema 1 *Dados $\alpha = \frac{k}{\rho c}$, $H(t) = \frac{h(t)}{k}$, $\beta = \frac{\rho L}{k}$ y $\gamma = \left(1 - \frac{T_s}{2\beta} - \frac{\alpha}{2}\right)^{-1}$ con $\beta(2-\alpha) - T_s \neq 0$, la solución $T = T(r,t)$, $R = R(t)$ del problema de frontera libre dado por (1)-(6) tiene la siguiente representación integral:*

$$\begin{aligned} T(r,t) = &\int_0^{R_0} \rho^2 T_0(\rho)G(r,t,\rho,0)d\rho + \frac{1}{\beta}\int_0^t R^2(\tau)T_s G(r,t,R(\tau),\tau)\left[w(\tau) + H(\tau)(T_s - T_g)\right]d\tau \\ &+ \alpha\int_0^t R^2(\tau)\left[w(\tau)G(r,t,R(\tau),\tau) - T_s G_\rho(r,t,R(\tau),\tau)\right]d\tau. \end{aligned} \tag{8}$$

$$R(t) = R_0 + \frac{1}{\beta}\int_0^t \left[w(\tau) + H(\tau)(T_s - T_g)\right]d\tau. \tag{9}$$

con $w(t) = T_\rho(R(t),t)$ si y sólo si w satisface la siguiente ecuación integral de tipo Volterra

$$\begin{aligned} w(t) = \gamma\Bigg\{&\int_0^{R_0} \rho^2 T_0(\rho)G_r(R(t),t,\rho,0)d\rho + \frac{T_s}{\beta}\frac{H(t)(T_s-T_g)}{2} + \frac{T_s}{\beta}\int_0^t R^2(\tau)G_r(R(t),t,R(\tau),\tau)w(\tau)d\tau \\ &+ \frac{T_s}{\beta}(T_s - T_g)\int_0^t R^2(\tau)H(\tau)G_r(R(t),t,R(\tau),\tau)d\tau + \alpha\int_0^t R^2(\tau)w(\tau)G_r(R(t),t,R(\tau),\tau)d\tau \\ &-\alpha T_s\int_0^t R^2(\tau)G_{\rho r}(R(t),t,R(\tau),\tau)d\tau\Bigg\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Prueba. *Sea $T = T(r,t)$ solución del problema (1)-(6). Si se integra la siguiente identidad de Green*

$$\Big[\rho^2 T(\rho,\tau)G(r,t,\rho,\tau)\Big]_\tau - \Big[\alpha\rho^2\Big(T_\rho(\rho,\tau)G(r,t,\rho,\tau) - T(\rho,\tau)G_\rho(r,t,\rho,\tau)\Big)\Big]_\rho = 0$$

en el dominio $D_{t,\epsilon} = \{(\rho,\tau) : 0 < \rho < R(\tau), \epsilon < \tau < t-\epsilon\}$ y se toma $\epsilon \to 0$ se obtiene (8). Si se deriva (8) con respecto a la variable r y se toma $r \to R(t)^-$, utilizando la fórmula del salto dada en el Lema 1, se obtiene la ecuación integral para w. A partir de (3) y (6) se obtiene la expresión (9).

Recíprocamente, mediante cálculos elementales puede verificarse que si w satisface (10) entonces T dado por (8) y R dado por (9) satisfacen (1)-(6). □

4. Existencia y unicidad de solución

Se utilizará el teorema de punto fijo de Banach para probar la existencia y unicidad local en el tiempo de solución $w \in C^0[0,\sigma]$ para la ecuación integral de tipo Volterra (10), donde σ es un número positivo a determinar. Se considera el espacio de Banach siguiente

$$\mathcal{C}_{\sigma,M} = \{w \in C^0[0,\sigma] : \|w\| \leq M\}$$

donde $\|w\| = \max\limits_{t\in[0,\sigma]} |w(t)|$ y M una constante a determinar.

En dicho espacio, se define el operador Ψ dado por el lado derecho de la ecuación (10), el cual se reescribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Psi(w) = \gamma\Bigg\{&-\int_0^{R_0} \tfrac{T_0(\rho)}{R^2(t)}\overline{G}(R(t),\alpha t,\rho,0)d\rho + \int_0^{R_0} \tfrac{T_0(\rho)+\rho T_0'(\rho)}{R(t)}\overline{N}(R(t),\alpha t,\rho,0)d\rho + \tfrac{T_s}{\beta}\tfrac{H(t)(T_s-T_g)}{2}\\
&+ \tfrac{T_s}{\beta}\int_0^t R^2(\tau)G_r(R(t),t,R(\tau),\tau)d\tau + \tfrac{T_s}{\beta}(T_s-T_g)\int_0^t R^2(\tau)H(\tau)G_r(R(t),t,R(\tau),\tau)d\tau\\
&+ \alpha\int_0^t R^2(\tau)w(\tau)G_r(R(t),t,R(\tau),\tau)d\tau - \alpha T_s\Bigg[\tfrac{1}{R^2(t)}\int_0^t \overline{G}(R(t),\alpha t,R(\tau),\alpha\tau)d\tau\\
&+ \tfrac{1}{R^2(t)}\int_0^t R(\tau)\overline{N}_r(R(t),\alpha t,R(\tau),\alpha\tau)d\tau - \frac{1}{R(t)}\int_0^t \overline{G}_r(R(t),\alpha t,R(\tau),\alpha\tau)d\tau\\
&- \tfrac{1}{\alpha}\int_0^t \tfrac{\dot{R}(t)}{R(t)}\overline{N}(R(t),\alpha t,R(\tau),\alpha\tau)d\tau\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{11}$$

Se debe demostrar que existen σ y M de manera que

$$i)\quad \Psi(w) \in \mathcal{C}_{\sigma,M}, \qquad \forall w \in \mathcal{C}_{\sigma,M}. \tag{12}$$

$$ii)\quad \|\Psi(w_1) - \Psi(w_2)\| \leq k\|w_1 - w_2\|, \qquad k < 1, \quad \forall w_1, w_2 \in \mathcal{C}_{\sigma,M}. \tag{13}$$

Teorema 2 *Para*

$$M = \gamma\left(\tfrac{\|T_0\|}{R_0}\left(6 + \tfrac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi e}}\right) + \tfrac{|T_s|}{\beta}\tfrac{|T_s-T_g|}{2}\||H\| + \alpha T_s R_0 \tfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi e}}\right) + 1, \tag{14}$$

si se elige $\sigma \leq 1$ de manera que se verifiquen las siguientes condiciones

$$F_1(\sigma) \leq 1, \qquad \sigma A(M) \leq \tfrac{R_0}{2}, \qquad F_2(\sigma) < 1 \tag{15}$$

con $A(M) = \frac{M}{\beta} + \|H\||T_s - T_g|$, $F_1(\sigma) = \gamma\sqrt{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{8} B_i$ y $F_2(\sigma) = \gamma\sqrt{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{8} C_i$, donde los coeficientes B_i, C_i están determinados en función de los datos del problema, entonces el operador Ψ dado por (11) es una contracción que lleva $\mathcal{C}_{\sigma,M}$ en sí mismo . Por consiguiente, la ecuación integral de tipo Volterra (10) tiene una única solución en $\mathcal{C}_{\sigma,M}$.

Prueba. Siguiendo la metodología de representación integral Friedman-Rubinstein [4, 9] y utilizando resultados obtenidos en [1, 2] se obtiene el resultado del teorema. □

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente patrocinado por el Proyecto PIP No 0275 de CONICET-UA, Rosario, Argentina, y ANPCyT PICTO Austral 2016 No 0090.

REFERENCIAS

[1] A.C. BRIOZZO AND D.A. TARZIA, *A one-phase Stefan problem for a non-classical heat equation with a heat flux condition on the fixed face*, Appl. Math. Comput., 182 (2006) pp. 809-819.

[2] A.C. BRIOZZO AND D.A. TARZIA, *Existence and uniqueness for one-phase Stefan problems of non-classical heat equation with temperature boundary condition at a fixed face*, Electronic J. Diff. Eq., 2006, No.21 (2006) 1-16.

[3] E. CASE AND J. TAUSCH, *An integral equation method for spherical Stefan problems*, Appl. Math. Comput., 218 (2012) pp. 11451–11460.

[4] A. FRIEDMAN, *Free boundary problems for parabolic equations I. Melting of solids*, J. Math. Mech., 8 (1959) pp. 499-517.

[5] M.A. HERRERO AND J.J.L. VELAZQUEZ, *On the melting of ice balls*, SIAM J. Math. Anal., 28 (1997) pp. 1–32.

[6] S.W. MCCUE AND M. HSIEH AND T.J. MORONEY AND M.I. NELSON, *Asymptotic and numerical results for a model of solvent-dependent drug diffusion through polymeric spheres*, SIAM J. Appl. Math., 71 (2011) pp. 2287–2311.

[7] S.L. MITCHELL AND M. VYNNYCKY, AND I.G. GUSEV, AND S.S. SAZHIN , *An accurate numerical solution for the transient heating of an evaporating droplet*, Appl. Math. Comput., 217 (2011), pp. 9219-9233.

[8] R.I. PEDROSO AND G.A DOMOTO, *Perturbation solutions for spherical solidification of saturated liquids*, J. Heat Transfer, 95 (1973) pp. 42–46.

[9] L.I. RUBINSTEIN, *The Stefan problem*, Trans. Math. Monographs, Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence, 1971

[10] A.M. SOWARD, *A unified approach to Stefan's problem for spheres*, Proc. R. Soc. A, 373 (1980) pp. 131–147.

[11] M. VYNNYCKY, AND S.L. MITCHELL, *On the numerical solution of a Stefan problem with finite extinction time*, J. Comput. Appl. Math., 279 (2015), pp. 98-109.